UNIVERSAL
LIBRARY

PHYSIK

EIN LEHRBUCH FÜR STUDIERENDE AN DEN UNIVERSITÄTEN UND TECHNISCHEN HOCHSCHULEN

VON

WILHELM H. WESTPHAL

A. O. PROFESSOR DER PHYSIK AN DER UNIVERSITÄT BERLIN UND
LEITER DER PHYSIKALISCHEN ÜBUNGEN AN DER
TECHNISCHEN HOCHSCHULE BERLIN

DRITTE AUFLAGE



MIT 503 ABBILDUNGEN



BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1933

DEM ANDENKEN MEINES LEHRERS

HEINRICH RUBENS

GEWIDMET

Vorwort zur dritten Auflage.

Die vorliegende Auflage ist gegenüber den vorhergehenden in vielen Beziehungen verbessert und stofflich stark erweitert. Um den Umfang nicht wesentlich zu erhöhen, wurde einiges weniger Wichtige gestrichen, anderes knapper gefaßt.

In der Mechanik habe ich mich bemüht, die Unterscheidung zwischen den skalaren und den vektoriellen Größen klarer als bisher herauszuarbeiten. Dabei liegt aber eine erhebliche Schwierigkeit in dem Umstand, daß eine Kenntnis der Vektorrechnung bei den meisten meiner Leser noch nicht vorausgesetzt werden darf. Ganz neu geschrieben sind, von zahlreichen einzelnen Paragraphen abgesehen, unter anderen die folgenden Teile: § 17—19 (Bewegungslehre), Kap. 8 (Elastizität), Kap. 11 (Hydrodynamik), Kap. 18 (Binäre Systeme), Kap. 25 und 26 (Magnetismus und Elektrodynamik), ein erheblicher Teil des Kap. 28 (Wechselstrom und Schwingungen), § 477—479 (Farben und Farbensehen). Die Elektrizitätslehre und die Kap. 33 und 34 (Quantentheorie und Atombau) wurden neu disponiert.

Bei der Neubearbeitung der Elektrizitätslehre habe ich ernstlich erwogen, ob ich das elektrostatische und das elektromagnetische Maßsystem ganz durch das internationale elektrische Maßsystem ersetzen solle, wie das heute in den Vorlesungen und Lehrbüchern über Experimentalphysik vielfach der Fall ist. Ich habe das, von anderen Gründen abgesehen, auch deshalb nicht getan, weil dieses Buch kein Lehrbuch der reinen Experimentalphysik sein, sondern den Leser auch wenigstens in die ersten Anfänge der theoretischen Physik einführen will. Dazu aber ist das internationale Maßsystem sehr viel weniger geeignet als die an das CGS-System angeschlossenen Maßsysteme. Ein jedes der gebräuchlichen Maßsysteme hat seine volle Berechtigung an seinem Platze. Ich bin der Meinung, daß nicht nur selbstverständlich jeder Physiker, sondern auch jeder Chemiker und Ingenieur lernen muß, die verschiedenen Maßsysteme (auch in der Mechanik) und ihre Zusammenhänge zu beherrschen. Für den Anfänger aber liegt in der Vielheit der Maßsysteme und der prinzipiellen Verschiedenheit der Grundlagen der praktischen und der CGS-Systeme eine Quelle großer Schwierigkeiten. Ich habe mich deshalb bemüht, ihm diese Schwierigkeit zu erleichtern, indem ich an verschiedenen Stellen die Beziehungen zwischen den einzelnen Maßsystemen und die Art ihrer Grundlegung eingehend besprochen habe.

Wieder wurde ich bei der Vorbereitung der neuen Auflage durch zahlreiche Zuschriften aus dem Leserkreise, insbesondere auch von Studierenden und Lehrern, in dankenswerter Weise zu manchen Verbesserungen angeregt. Ich bitte, mir auch künftig auf diese Weise bei der weiteren Ausgestaltung des Buches zu helfen. Ganz besonderen Dank schulde ich Herrn Dr.-Ing. EGON OROWAN, der mir bei der Korrektur außerordentlich wertvolle Hilfe geleistet hat.

Berlin, im November 1932.

WILHELM WESTPHAL.

Inhaltsverzeichnis.

Tabellen.

A. Die wichtigsten physikalischen Konstanten.

Gravitationskonstante G	$6{,}65 \cdot 10^{-8}$ dyn . cm^{2} . g^{-2}
Schwerebeschleunigung g in 45° Breite	$980{,}665$ cm . sec^{-2}
1 Atmosphäre	$1{,}01325 \cdot 10^{6}$ dyn . cm^{-2}
Spezifisches Gewicht des Quecksilbers bei 0°	$13{,}5955$ g . cm^{-3}
Absoluter Nullpunkt der Temperatur	—273,2° C
Molvolumen der idealen Gase	22400 cm^{3} . Mol^{-1}
Allgemeine Gaskonstante R	$1{,}9858$ cal . grad^{-1} . Mol^{-1} $= 8{,}3131 \cdot 10^{7}$ erg . grad^{-1} . Mol^{-1}
Mechanisches Wärmeäquivalent	$4{,}1863 \cdot 10^{7}$ erg = 1 cal
Elektrochemisches Äquivalent des Silbers	$1{,}11800 \cdot 10^{-3}$ g . Coulomb^{-1}
FARADAYsche Konstante	$0{,}9649_4 \cdot 10^{5}$ Coulomb . Mol^{-1}
Atomgewicht des Sauerstoffs	16,000
Atomgewicht des Wasserstoffs	1,0078
LOSCHMIDTsche Zahl	$6{,}06_0 \cdot 10^{23}$ Mol^{-1}
AVOGADROsche Zahl	$2{,}70_6 \cdot 10^{19}$ cm^{-3}
BOLTZMANNsche Konstante k	$1{,}37_2 \cdot 10^{-16}$ erg . grad^{-1}
Elektrisches Elementarquantum	$4{,}76_9 \cdot 10^{-10}$ el. stat. Einh. $= 1{,}59_1 \cdot 10^{-19}$ Coulomb
Spezifische Ladung des Elektrons	$1{,}76_0 \cdot 10^{8}$ Coulomb . g^{-1}
Ruhmasse des Elektrons	$0{,}900_3 \cdot 10^{-27}$ g
Masse des Wasserstoffatoms (Protons)	$1{,}66_2 \cdot 10^{-24}$ g
Masse eines Atoms vom Atomgewicht α	$\alpha \cdot 1{,}64_9 \cdot 10^{-24}$ g
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	$2{,}9979_6 \cdot 10^{10}$ cm . sec^{-1}
RYDBERGsche Konstante	109737,1 cm^{-1}
STEFAN-BOLTZMANNsche Konstante σ	$5{,}77_3 \cdot 10^{-12}$ Watt . cm^{-2} . grad^{-4}
PLANCKsches Wirkungsquantum h	$6{,}54_4 \cdot 10^{-27}$ erg . sec

B. Energieumrechnungstabelle.

Energie $3\,kT/2$ eines Moleküls eines idealen Gases bei der absoluten Temperatur T	$2{,}05_8 \cdot 10^{-16}\, T$ erg
Energie eines durch eine Spannung von U Volt beschleunigten Elektrons	$1{,}59_1 \cdot 10^{-12}\, U$ erg
Geschwindigkeit eines durch eine Spannung von U Volt beschleunigten Elektrons	$5{,}93_5 \cdot 10^{7} \sqrt{U}$ cm sec^{-1}
Energie eines Lichtquants von der Schwingungszahl ν	$6{,}54_4 \cdot 10^{-27} \cdot \nu$ erg
Energie eines Lichtquants von der Wellenzahl N	$1{,}96_2 \cdot 10^{-16}\, N$ erg
Energie eines Lichtquants von der Wellenlänge λ	$1{,}96_2 \cdot 10^{-16} \cdot \lambda^{-1}$ erg
Energie mc^2 eines Wasserstoffatoms (Protons)	$1{,}49_4 \cdot 10^{-3}$ erg
Energie mc^2 eines Elektrons	$0{,}809_3 \cdot 10^{-6}$ erg
Masse eines Lichtquants von der Schwingungszahl ν	$0{,}728_0 \cdot 10^{-47} \cdot \nu$ g
Masse eines Lichtquants von der Wellenzahl N	$2{,}18_3 \cdot 10^{-37}\, N$ g
Masse eines Lichtquants von der Wellenlänge λ	$2{,}18_3 \cdot 10^{-37} \cdot \lambda^{-1}$ g

C. Konstanten der Erde, der Sonne und des Mondes.

Mittlerer Erdradius	6370 km = $6{,}370 \cdot 10^{8}$ cm
Masse der Erde	$5{,}97 \cdot 10^{27}$ g
Mittlere Dichte der Erde	$5{,}52$ g . cm^{-3}
Sterntag	$23^{h}\,56^{m}\,4{,}1^{s}$ = 86164 sec
Bahngeschwindigkeit der Erde	$2{,}98 \cdot 10^{6}$ cm · sec^{-1}
Rotationsgeschwindigkeit der Erde am Äquator	$4{,}65 \cdot 10^{4}$ cm · sec^{-1}
Masse des Mondes	$7{,}4 \cdot 10^{25}$ g = $^{1}/_{81}$ Erdmasse
Entfernung Erde—Mond	384400 km = 60,27 Erdradier
Radius der Sonne	696000 km
Masse der Sonne	$1{,}97 \cdot 10^{33}$ g
Entfernung Erde—Sonne	$1{,}495 \cdot 10^{8}$ km

I. Allgemeines.

1. Kapitel.

Inhalt und Methoden der Physik.

1. Die Physik im Rahmen der Naturwissenschaften. Physik bedeutet die Lehre von der φύσις, von der Natur, also ganz allgemein Naturlehre oder Naturwissenschaft. In der Tat beansprucht die Physik eine Zuständigkeit auf allen Wissensgebieten, die man als die Naturwissenschaften zu bezeichnen pflegt, die Erscheinungen in der belebten Natur nicht ausgenommen. Die Aufteilung der Naturwissenschaft in Teilgebiete, die einzelnen Naturwissenschaften, deren eines die Physik im speziellen Sinne bildet, hat äußere Gründe. Primär waren es historische Gründe. Die einzelnen Teilgebiete haben sich zu sehr verschiedener Zeit entwickelt. Astronomie und Erdkunde z. B. wurden bereits im Altertum betrieben. Die Entwicklung der Physik im speziellen Sinne ist recht jungen Datums. Sie beginnt, von einzelnen Ansätzen im Altertum abgesehen, erst zur Zeit GALILEIS (1564—1642), und sie steckte noch in den Kinderschuhen, als gegen Ende des 18. Jahrhunderts die Chemie bereits wichtige Etappen ihrer Entwicklung vollzogen hatte. Diese sehr verschiedene Entwicklungsgeschwindigkeit brachte es mit sich, daß der untrennbare Zusammenhang der Naturwissenschaften lange Zeit verborgen blieb und erst allmählich in vollem Umfange erkannt wurde. Wenn die Aufteilung der Naturwissenschaft in Teilgebiete auch heute noch besteht, so hat das vor allem praktische Gründe. Erstens ist eine wirkliche Beherrschung der gesamten Naturwissenschaft heute für einen einzelnen völlig unmöglich. ALEXANDER V. HUMBOLDT (1769—1859) war wohl einer der letzten, der noch den größten Teil des naturwissenschaftlichen Wissens seiner Zeit in sich zu vereinigen vermochte. Zweitens aber zwingt die ganz verschiedene Arbeitsmethode der einzelnen Teilgebiete ganz von selbst eine Arbeitsteilung auf. Tatsächlich ist weit weniger das Objekt der Forschung als die Methode zu seiner Erforschung heute das entscheidende Merkmal für die einzelnen Teilgebiete der Naturwissenschaft. Ein typisches Beispiel dafür zeigt die neueste Entwicklung der Physik. Während bis vor etwa zwei Jahrzehnten die Erforschung der Eigenschaften der Moleküle und Atome durchaus der Chemie vorbehalten schien, wurde dies in dem Augenblick eine der wesentlichsten Aufgaben der modernen Physik, in dem die Methoden der Physik sich als darauf anwendbar erwiesen.

Bezüglich ihrer Methodik kann man zwei Typen von Naturwissenschaften unterscheiden. Die ursprüngliche Methode beruht auf der Beobachtung der Vorgänge, wie sie sich in der Natur von selbst, ohne menschliches Zutun, abspielen. Ein Teil der Naturwissenschaften beruht auch heute noch auf dieser Basis, wie z. B. die Astronomie und die Meteorologie. Ihre Arbeitsstätte ist das Observatorium. Erst in einer späteren Phase begann man, Vorgänge zum Zweck ihrer Untersuchung künstlich hervorzurufen, um die Gesetzmäßig-

keiten ihres Ablaufs zu untersuchen. Man erfand das **Experiment**, und so entstand das **Laboratorium**. Die eigentlichen Vertreter der **experimentellen Naturwissenschaften** sind die spezielle Physik und die Chemie. Das schließt nicht aus, daß auch in den anderen Naturwissenschaften, so z. B. in der Physiologie, das Experiment eine ständig wachsende Bedeutung erhält. Es schließt andererseits nicht aus, daß sich die Physik auch der Ergebnisse der beobachtenden Wissenschaften zu ihrem Fortschritt bedient oder sich mit ihrer Deutung befaßt. Seitdem NEWTON den Blick des Physikers von der Erde zu den Sternen erhob, gehören die astronomischen Beobachtungen zu dem wichtigsten Tatsachenmaterial, auf das sich die Physik gründet.

Wegen dieser engen Verknüpfung der gesamten Naturwissenschaft mit der speziellen Physik und wegen der unbestreitbaren Zuständigkeit der Physik auf allen Gebieten der Naturwissenschaft ist für den Physiker ein gewisses Maß **allgemeiner naturwissenschaftlicher Bildung** unerläßlich. Er muß jeden Augenblick bereit sein, die Bedeutung eines Ergebnisses einer Nachbarwissenschaft in seiner Bedeutung für die Physik oder die Anwendbarkeit physikalischer Methoden auf ein der speziellen Physik bisher fremdes Problem zu erkennen. Er muß hierzu fähig sein, obgleich die Breite der heutigen Physik ihn schon in seiner eigenen Wissenschaft zu einer gewissen Spezialisierung zwingt. Gegen diesen Zwang bildet eine allgemeine naturwissenschaftliche Bildung ein sehr wirksames Gegengewicht.

Mit der Anstellung von Experimenten und der Registrierung ihres Verlaufes ist die Aufgabe der Physik nicht erfüllt. Die Experimente sollen ja dazu dienen, die großen Zusammenhänge im Naturgeschehen zu verstehen. Dieser Aufgabe widmet sich die theoretische Physik, die sich dabei in der Hauptsache mathematischer Methoden bedient. Aber nicht allein in der Deutung und Zusammenfassung der experimentellen Ergebnisse liegt ihre Aufgabe, sondern auch in der Voraussage noch unbekannter Tatsachen auf Grund der bestehenden Theorie. Indem sie auf diese Weise neue experimentelle Fragestellungen aufwirft, besteht eine unentbehrliche gegenseitige Wechselwirkung zwischen der theoretischen Physik und der reinen Experimentalphysik.

Die Wurzel der physikalischen Forschung ist der reine Erkenntnistrieb, also ein ganz idealistisches Motiv. Daß physikalische Wissen auch materielle Vorteile für die Menschheit mit sich bringt, trat erst vor etwa einem Jahrhundert deutlich in die Erscheinung. Aus der Anwendung physikalischer Forschungsergebnisse entstand die **Technik**. Durch die Fülle der Probleme, die seitdem von der Technik ständig neu aufgeworfen werden, erwächst der Physik eine außerordentliche Anregung und Förderung.

2. **Kausalität.** Eine Erkenntnis hat nur dann wissenschaftlichen Sinn und Wert, wenn sie sowohl räumlich wie zeitlich Bedeutung über den zufälligen Einzelfall hinaus hat, das heißt, wenn sie uns Schlüsse erlaubt über Vergangenes wie Künftiges, über räumlich Nahes wie räumlich Entferntes. Die Möglichkeit einer auf solchen Erkenntnissen aufgebauten Naturwissenschaft ist gewährleistet, wenn wir es als sicher unterstellen können, daß zwischen Ursache und Wirkung stets und überall eine eindeutige Verknüpfung besteht, daß also die **gleiche Ursache** in jedem Fall die **gleiche Wirkung** hat. Die Behauptung, daß dies zutrifft, heißt das **Kausalitätsgesetz**. Auf die unbezweifelte absolute Geltung dieses Gesetzes ist nicht nur der gesamte Bau der Naturwissenschaften gegründet worden, sondern sie bildet überhaupt eine Voraussetzung für ein geordnetes menschliches Dasein. In der Tat bewährt es sich unter den Verhältnissen des täglichen Lebens und in weiten Bereichen des Naturgeschehens mit jeder beliebigen Genauigkeit. Hiernach ist der weitere Ablauf eines Naturvorganges

in allen Einzelheiten bestimmt oder wie man auch sagt determiniert, wenn er nebst allen einwirkenden Ursachen in einem bestimmten Zeitpunkt in allen Einzelheiten bekannt ist. (Es hängt das wesentlich mit der Möglichkeit der Darstellung der Naturgesetze durch Differentialgleichungen zusammen.)

Wir wissen heute, daß diesem strengen Determinismus eine Grenze gesetzt ist, und zwar im Bereich gewisser Vorgänge an und mit den elementaren Bausteinen der Materie (§ 514). Trotzdem sind diese Vorgänge der wissenschaftlichen Forschung und Erkenntnis nicht entzogen. Ihre genauere theoretische Behandlung überschreitet jedoch den Rahmen dieses Buches, und so dürfen wir das Kausalitätsgesetz im folgenden stets als gültig und alle Naturvorgänge als streng determiniert ansehen.

3. **Das Experiment.** Wie bereits gesagt, zieht die reine Physik ihre Erkenntnisse nur in seltenen Fällen aus der Beobachtung von Vorgängen, die sich in der Natur von selbst, ohne menschliches Zutun, abspielen. Meist sind diese Naturvorgänge zu kompliziert und durch mehrere verschiedene, oft schwer kontrollierbare Ursachen gleichzeitig bedingt, so daß die einfachen Gesetzmäßigkeiten nicht klar genug zutage treten. Im Experiment wird versucht, Bedingungen zu schaffen, bei denen die Wirkung einer in ihren Einzelheiten möglichst genau bekannten Ursache in möglichst klar beobachtbarer Form erscheint. Man hat das Experiment oft eine „Frage an die Natur" genannt, durch deren Beantwortung sie dem Menschen Einblick in ihre Gesetzmäßigkeiten gewährt.

4. **Physikalische Gesetze.** Ein Experiment führt in der Regel zur Messung irgendwelcher Größen, z. B. in einfachen Fällen von Längen, Zeiten, Temperaturen, Gewichten usw. Ein einziges Experiment genügt meist noch nicht zur Auffindung eines Gesetzes Dazu gehört fast stets die Ausführung einer größeren Zahl von Einzelbeobachtungen, bei denen die Versuchsbedingungen in geeigneter Weise verändert werden. So kann man z. B. das Gesetz, nach dem die von einem Körper frei durchfallenen Strecken von der Fallzeit abhängen, nicht aus einer einzigen Beobachtung entnehmen, es bedarf dazu einer größeren Zahl von Beobachtungen bei verschiedenen Fallhöhen. Das Ergebnis ist dann eine Reihe von je zwei oder mehreren einander zugeordneten Zahlen, in unserem Beispiel den Fallhöhen und den ihnen entsprechenden Fallzeiten. Aus diesen Zahlenreihen wird ein physikalisches Gesetz, wenn es gelingt, zwischen den einander zugeordneten Zahlen eine in der ganzen Meßreihe gültige mathematische Beziehung zu finden. So zeigt sich im angezogenen Falle, daß die Fallstrecken s frei fallender Körper den Quadraten der Fallzeiten t proportional sind, so daß man das Gesetz in der mathematischen Form $s = at^2$ aussprechen kann, wo a eine konstante Größe ist, deren Bedeutung man aus anderweitigen Überlegungen oder Versuchen erschließen muß, deren zahlenmäßige Größe aber aus den durch das Experiment gewonnenen Zahlen berechnet werden kann. Ein physikalisches Gesetz läßt sich also in der Regel in die Form einer mathematischen Gleichung kleiden. In selteneren Fällen besteht ein Gesetz in einer einfachen Aussage, z. B. über das Eintreten oder Nichteintreten eines bestimmten Vorganges bei bestimmten Bedingungen. (Man gewöhne sich daran, physikalische Gesetze, soweit irgend möglich, auch in Gleichungsform auszusprechen, weil sie darin ihren kürzesten und meist ihren klarsten Ausdruck finden.)

Ein Gesetz, welches auf Grund zuverlässig beobachteter physikalischer Erscheinungen aufgestellt worden ist, kann grundsätzlich nie umgestoßen werden. Es kann aber geschehen, daß eine Verfeinerung der Beobachtungsmittel oder eine Ausdehnung des Beobachtungsbereichs in eine andere Größenordnung der in Frage stehenden Erscheinung zu der Erkenntnis führt, daß das betreffende Gesetz nur eine für den früheren Beobachtungsbereich mit sehr großer Annäherung

ausreichende Geltung hat. Das vervollkommnete Gesetz aber muß immer das frühere Gesetz als Spezialfall in sich enthalten. Es handelt sich also in solchen Fällen stets um eine Erweiterung eines schon bekannten Gesetzes bzw. um eine Einschränkung seines Gültigkeitsbereichs (vgl. z. B. das NEWTONsche und das EINSTEINsche Gravitationsgesetz, § 542).

Das Wort Gesetz gründet sich gewissermaßen auf die Vorstellung, daß irgendeine unfehlbare Macht diese Gesetze gegeben habe, derart, daß jedes Geschehen in der Welt gezwungen ist, sich vollkommen danach zu richten. Im Gegensatz zu den Gesetzen der menschlichen Gesellschaft sind die Naturgesetze absolut bindend. Wir sind vollkommen gewiß, daß da, wo wir in der Natur einen Widerspruch gegen ein bisher als sicher gültig angesehenes Gesetz entdecken, nicht die Natur einen Verstoß begangen hat, sondern daß wir dieses Gesetz noch nicht in vollem Umfange richtig erkannt haben.

Die fortschreitende Erfahrung hat gezeigt, daß die große Zahl von physikalischen Gesetzen, die sich zunächst aus der experimentellen Untersuchung der verschiedenen Naturerscheinungen ergeben, sich erheblich dadurch verringert, daß sich jeweils viele von ihnen als Sonderfälle einer weit kleineren Zahl von sehr allgemeinen physikalischen Gesetzen erweisen. Es werden also die Vorgänge im gesamten unserer Beobachtung zugänglichen Weltall von einer verhältnismäßig kleinen Zahl von allgemeinen physikalischen Gesetzen beherrscht. Es unterliegt keinem Zweifel, daß die Entwicklung der Physik in dieser Richtung noch lange nicht abgeschlossen ist.

Eine Hypothese ist ein physikalisches Gesetz oder eine Deutung einer physikalischen Tatsache, welche noch der endgültigen Bestätigung bedarf, welche aber vor dem Beweis des Gegenteils am meisten geeignet scheint, irgendwelche Beobachtungen zu erklären. Der wissenschaftliche Wert der Hypothesen besteht darin, daß sie der Forschung Hinweise geben, welcher Art die Experimente sein müssen, die zu einem endgültigen Verständnis der noch nicht restlos geklärten, in Frage stehenden Erscheinung führen können. Im Laufe der Zeit kommt es stets dahin, daß eine Hypothese entweder verworfen werden muß, oder daß sie die Sicherheit eines Gesetzes erlangt, eine feststehende physikalische Tatsache wird. So war z. B. bis vor nicht allzu langer Zeit die Behauptung, daß alle Stoffe aus Molekülen und Atomen aufgebaut seien (§ 14), eine Hypothese. Heute ist sie eine unumstößliche physikalische Tatsache.

Die durch Experimente auf der Erde gefundenen Gesetze sind in ihrer Gültigkeit nicht auf die Erde beschränkt. Es ist bisher keine Beobachtung irgendeines physikalischen Vorganges im Kosmos bekanntgeworden, die den auf der Erde gültigen Gesetzmäßigkeiten prinzipiell widerspricht. Vielmehr haben die auf der Erde als richtig erkannten Gesetze bisher noch fast immer dazu ausgereicht, die auf anderen Himmelskörpern beobachteten Naturvorgänge in ihren wesentlichen Zügen zu verstehen. Und wo dies heute noch nicht ganz der Fall ist, dürfen wir annehmen, daß dies seinen Grund darin hat, daß wir Verhältnisse, wie sie in den Fixsternen herrschen, auf der Erde nicht herzustellen vermögen.

5. Einteilung der Physik. Man kann das Lehrgebäude der Physik in großen Zügen rein logisch in folgende Hauptgebiete einteilen:

1. Die Mechanik. Diese behandelt die Bewegungen der Körper und die Änderungen ihrer Bewegungen sowie ihrer sonstigen physikalischen Eigenschaften und Zustände durch einwirkende Kräfte irgendwelcher Art. Auf den Ursprung dieser Kräfte kommt es dabei nicht an. Einen besonderen Teil der Mechanik bildet die Mechanik der Moleküle, die ihre wichtigste Anwendung

in der Wärmelehre findet. Die Lehre vom Schall bildet, da dieser nur auf einer besonderen Art der Bewegung von Körpern beruht, einen Teil der Mechanik.

2. Die Lehre von den Kräften. Hierher gehören a) die Schwerkraft, b) die elektrischen und die mit ihnen eng zusammenhängenden magnetischen Kräfte. Unter b gehört auch die Lehre vom Licht.

3. Die physikalische Statistik. Diese ist eine Anwendung der Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf solche physikalischen Erscheinungen, an denen eine sehr große Zahl von individuellen Teilchen beteiligt ist, von denen nicht ihr Verhalten im einzelnen, sondern nur ihr durchschnittliches Verhalten festgestellt wird.

4. Die Lehre von den Schwingungen. Diese behandelt in formaler Weise die allgemeinen Gesetzmäßigkeiten periodischer Vorgänge jeglicher Art.

5. Die Lehre vom Bau und Wesen der Materie. Sie behandelt den Bau der Atome, den Aufbau der Moleküle aus diesen und den Aufbau der zusammenhängenden Materie aus Atomen und Molekülen.

Die genannten Gebiete überschneiden sich vielfach. Es ist daher bei einer zusammenhängenden Darstellung der Physik nicht immer möglich, sich an diese Einteilung zu halten. Soweit es jedoch möglich ist, ist es in diesem Buch geschehen. So gehören die Kapitel 4, 5, 7—20 im obigen Sinne zur Mechanik. Dazwischen ist aus didaktischen Gründen in Kapitel 6 die Lehre von der Schwerkraft eingeschoben, welche nebst den Kapiteln 21—32 (Elektrizität, Magnetismus und Optik) nach der vorstehenden Einteilung zur Lehre von den Kräften gehört. Die Lehre vom Bau der Materie ist in Kapitel 33—35 behandelt. Die in Kapitel 36 und 37 behandelte Relativitätstheorie gehört der Mechanik wie der Lehre von den Kräften in gleicher Weise an. Die physikalische Statistik findet ihre Hauptanwendung in den Kapiteln 10, 14 und 19, aber auch in einzelnen anderen Gebieten, die Schwingungslehre in den Kapiteln 12, 28 und 30.

2. Kapitel.

Maß und Messen.

6. Wesen und Zweck der physikalischen Messung. Es ist schon gesagt worden, daß die Mehrzahl der physikalischen Erkenntnisse aus den zahlenmäßigen Ergebnissen von Experimenten gewonnen wird, also aus der Messung bestimmter Größen.

Viele, ja die meisten physikalischen Größen — z. B. Geschwindigkeiten, elektrische Ströme und dergleichen — kann man nicht unmittelbar messen, sondern nur mittelbar aus der Messung anderer, unmittelbar meßbarer Größen erschließen. Unmittelbar meßbar sind in erster Linie Längen. Fast alle physikalischen Messungen werden auf Längenmessungen zurückgeführt. Hierher gehören z. B. alle Messungen, die durch Ablesen an einer Skala, auf der ein Zeiger spielt, erfolgen. Dabei ist die Wegstrecke, die der Zeiger auf der Skala — etwa von einem Nullpunkt an — zurückgelegt hat, ein Maß für die Größe der Wirkung, durch die die Bewegung des Zeigers verursacht wird. Beispiele dieser Art sind z. B. die Uhr, das Zeigerbarometer, die elektrischen Meßinstrumente. Daher sind die Längenmessungen als die wichtigsten physikalischen Messungen zu bezeichnen. Eine wichtige Meßmethode ist die sogenannte Nullmethode, die darin besteht, daß man eine Wirkung durch eine gleich große, aber entgegengesetzt wirkende, meßbar veränderliche Wirkung möglichst genau aufhebt. Ein Beispiel hierfür ist die Wage, bei der der Ausschlag, den ein Gewicht

hervorbringt, durch Auflegen eines gleich großen, bekannten Gegengewichts gerade aufgehoben wird.

Jede Messung beruht auf einem Vergleich mit einer anderen Größe gleicher Art. Der Vergleich kann ein unmittelbarer sein, wie z. B. bei der Wage, oder ein mittelbarer, indem die Meßvorrichtung vorher mit Hilfe bekannter Größen gleicher Art geeicht wurde, wie das z. B. bei den elektrischen Meßinstrumenten geschieht. Um das Ergebnis einer Messung zahlenmäßig in einer für alle verständlichen Weise ausdrücken zu können, bedarf es für jede Art von physikalischen Größen der Festsetzung einer Maßeinheit. Das Ergebnis der Messung besteht dann in derjenigen Zahl, welche angibt, wie oft die Maßeinheit in der zu messenden Größe enthalten ist. Diese Zahl kann eine ganze, gebrochene oder irrationale Zahl sein. Sie wird sich aber bei praktischen Messungen fast stets in Dezimalform ausdrücken. Die Zahl der angebbaren Stellen hängt von der erreichten Meßgenauigkeit ab. Jede physikalische Messung ist mit einer gewissen Unsicherheit behaftet, deren Grad sich nach der Vollkommenheit der benutzten Hilfsmittel richtet. Es gibt physikalische Größen, die bis auf Bruchteile eines Milliontel ihres wahren Wertes genau gemessen werden können, z. B. Längen und Massen. (Vgl. § 514).

7. **Längenmessung.** Die wissenschaftliche Einheit der Länge ist das Zentimeter (cm). Dieses ist der hundertste Teil eines Meters (m), also 1 m = 100 cm. Die Länge des Meters ist 1791 durch internationales Übereinkommen als der zehnmillionte Teil eines Erdquadranten (Abstand vom Pol bis zum Äquator, gemessen auf einem Längengrad) festgesetzt. Auf Grund der damaligen Kenntnis von der Länge dieser Strecke ist das „Urmeter" hergestellt worden, ein Maßstab aus Platin, der in Paris, im Bureau International des Poids et des Mesures, aufbewahrt wird. Von diesem Urmeter befinden sich möglichst genaue Kopien in allen Kulturländern (in Deutschland in der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt) und dienen dort zum Vergleich mit den für genaue Meßzwecke hergestellten Maßstäben[1]).

Da das Urmeter eine ganz willkürliche Einheit ist, die z. B. im Falle einer etwaigen Zerstörung sämtlicher Normalien nie genau wieder herstellbar wäre, so hat man seine Länge in einer anderen Einheit festgestellt, die zu jeder Zeit, ja selbst auf einem anderen Himmelskörper, reproduzierbar wäre, nämlich in Wellenlängen des Lichtes. Man hat dazu die rote Spektrallinie des Kadmiums ausgewählt und festgestellt, daß deren Wellenlänge in trockner Luft bei einem Druck von 760 mm gleich $643{,}84696 \cdot 10^{-9}$ m (sog. Wellenlängennormal) ist.

Wenn es sich um die Maßangabe von Größen handelt, die entweder sehr groß oder sehr klein gegenüber der Maßeinheit sind, erhält man unbequem große oder kleine Zahlen. Man hat daher für viele physikalische Größen abgeleitete Einheiten eingeführt, welche diesen Übelstand zu vermeiden gestatten (vgl. die Einteilung der Mark in Pfennige). Dabei gelten folgende Festsetzungen. Die Vorsilbe Deka- vor der Einheitsbezeichnung bedeutet, daß die Maßeinheit zehnmal größer ist als die ursprüngliche Einheit. So bedeutet 1 Dekagramm 10 g.

[1]) Bei den physikalischen Maßeinheiten ist stets wohl zu unterscheiden zwischen den ursprünglichen wissenschaftlichen Definitionen und ihren für die Zwecke der Praxis gesetzlich festgesetzten Definitionen. Letztere entsprachen natürlich den ersteren nach Maßgabe der Genauigkeit, mit der es zur Zeit der Gesetzgebung möglich war, ein der wissenschaftlichen Definition gleiches Prototyp auch tatsächlich technisch herzustellen, also z. B. einen Maßstab, dessen Länge genau der ursprünglichen Definition des Meters entspricht. Im allgemeinen wird sich mit dem Fortschreiten der Meßtechnik herausstellen, daß die gesetzliche Einheit von der wissenschaftlichen ein wenig verschieden ist. Aus praktischen Gründen wird natürlich die in allen wichtigen Fällen international festgelegte gesetzliche Einheit nicht abgeändert. (Vgl. § 314).

Das Tausendfache der Einheit wird durch Kilo-, abgekürzt k (vgl. km, kg), das Millionenfache durch Mega- oder Meg- (z. B. Megohm) ausgedrückt. Die auf $^1/_{10}$, $^1/_{100}$, $^1/_{1000}$ und $^1/_{1000000}$ verkleinerten Einheiten erhalten entsprechend die Vorsilben Dezi- (d), Centi- oder Zenti- (c), Milli- (m) oder Mikro- (μ), schließlich wird der 10^{-9}te und der 10^{-12}te Teil der Einheit, für die es keine besonderen Vorsilben gibt, durch Vorsetzen der Buchstaben mμ, bzw. $\mu\mu$ gekennzeichnet. Es sind nicht bei allen Maßeinheiten sämtliche möglichen abgeleiteten Einheiten in Gebrauch, sondern nur die jeweils praktisch erforderlichen.

So sind die folgenden vom Meter abgeleiteten Einheiten gebräuchlich

1 Kilometer $= 1$ km $= 10^3$ m,
1 Dezimeter $= 1$ dm $= 10^{-1}$ m,
1 Zentimeter $= 1$ cm $= 10^{-2}$ m,
1 Millimeter $= 1$ mm $= 10^{-3}$ m,
1 Mikron $= 1\,\mu = 10^{-6}$ m $= 10^{-3}$ mm,
1 Millimikron $= 1$ mμ[1] $= 10^{-9}$ m $= 10^{-6}$ mm,
1 $\mu\mu = 10^{-12}$ m $= 10^{-9}$ mm.

(Das Mikron sollte eigentlich Mikrometer heißen, doch ist dieser Name bereits für gewisse Instrumente in Gebrauch. In der Regel sagt man nicht 1 Mikron, sondern 1 μ, gesprochen 1 My. Das $\mu\mu$ wird als Mymy ausgesprochen.) In der Optik bedient man sich noch als Längeneinheit für Lichtwellenlängen der Ångström-Einheit (ÅE), 1 ÅE $= 10^{-10}$ m $= {}^1/_{10}$ mμ, und der X-Einheit, 1 X.-E. $= 10^{-11}$ cm $= 10^{-13}$ m.

Für die Angabe der ungeheuren Entfernungen, mit denen die Astronomie zu rechnen hat, ist das Kilometer als Einheit unbequem. Man rechnet daher im Weltraum mit der Längeneinheit 1 Lichtjahr, das ist die Strecke, die das Licht in einem Jahre zurücklegt. Das Licht durchmißt in einer Sekunde eine Strecke von fast genau 300000 km (vgl. § 399). Es beträgt daher die in einem Jahr zurückgelegte Strecke

$$1 \text{ Lichtjahr} = 60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 \cdot 300000 \text{ km} = 9460800000000 \text{ km},$$

oder rund $9^1/_2$ Billionen km. Neuerdings wird als astronomische Längeneinheit auch vielfach die sog. Sternweite (parsec) benutzt. Ein Stern befindet sich eine Sternweite von der Erde entfernt, wenn der Halbmesser der Erdbahn, von diesem Stern aus gesehen, unter einem Winkel von 1 Bogensekunde erscheinen würde. Es ist

$$1 \text{ Sternweite} = 206265 \text{ Erdbahnhalbmessern} = 3^1/_4 \text{ Lichtjahren}$$

oder rund 31 Billionen km.

Statt die abgeleiteten Einheiten zu benutzen, bedient man sich, um das Schreiben unbequemer Zahlen zu vermeiden, auch oft der ursprünglichen Einheiten und schreibt die Maßzahl als eine der Eins nahe Zahl, multipliziert mit einer Potenz von 10. So ist z. B.

$$1 \text{ Lichtjahr} = 0{,}94608 \cdot 10^{13} \text{ km} = 0{,}94608 \cdot 10^{18} \text{ cm}, \quad 1 \text{ m}\mu = 10^{-7} \text{ cm}.$$

In der Physik ist die Regel, daß Längen in Zentimetern angegeben werden. Das Zentimeter gilt also als die eigentliche physikalische Längeneinheit, insbesondere bei der Angabe des Zahlenwertes von physikalischen Konstanten, in welche die Längeneinheit eingeht.

[1]) Diese Bezeichnung entspricht den Beschlüssen des Ausschusses für Einheiten und Formelgrößen (AEF) und sollte jetzt durchgeführt werden. Bis vor kurzem war es allgemein üblich, das Millimikron als $\mu\mu$ zu bezeichnen. Für die Einheit 10^{-12} m gab es bislang keine Bezeichnung. Hierauf ist bei Zahlenangaben in physikalischen Publikationen zu achten.

Von den Längeneinheiten sind in bekannter Weise die Flächeneinheiten (cm^2 oder qcm, m^2 oder qm usw.) und die Raum- oder Volumeinheiten (cm^3 oder ccm, m^3 oder cbm usw.) abgeleitet.

Die praktische Messung von Längen erfolgt im einfachsten Falle so, daß man die zu messende Länge neben einen, meist in Millimeter eingeteilten Maßstab legt. Ihre Größe ergibt sich aus der Zahl der Millimeter oder Zentimeter des Maßstabes, welche zwischen den beiden Enden der zu messenden Länge liegen, gegebenenfalls unter möglichster Berücksichtigung etwaiger Bruchteile. Bei einiger Übung kann man eine Länge mit Hilfe eines in Millimeter geteilten Maßstabes mit bloßem Auge noch auf 0,1 mm genau messen.

Für genaue Längenmessungen verwendet man z. B. die Schublehre, die Schraubenlehre, das Sphärometer, den ZEISSschen Dickenmesser, den Komparator usw.

Wird die Einstellung einer Strichmarke auf einer Millimeterteilung zur Ablesung einer Einstellung benutzt, so bedient man sich zur Erhöhung der Ablesegenauigkeit oft eines sog. Nonius (Abb. 1). In diesem Falle bildet die Ablesemarke den Nullstrich (C) einer der Hauptskala AB parallelen und an ihr entlang verschiebbaren Nebenskala CD, deren Teilstriche meist so bemessen sind, daß 9 Teilstriche der Hauptskala gleich 10 Teilstrichen der Nebenskala sind. Am Nullstrich der Skala des Nonius wird abgelesen, zwischen welchen zwei mm-Zahlen die Ablesung liegt, in der Abbildung liegt sie zwischen 31,0 und 31,1. Die Zehntelmillimeter ermittelt man durch die Feststellung, welcher Teilstrich der Noniusskala mit einem Teilstrich der Hauptskala zusammenfällt. Ist dies z. B., wie in Abb. 1, der 6. Teilstrich, der in diesem Falle mit dem Teilstrich 31,6 der Hauptskala zusammenfällt (in der Abb. gestrichelt), so ist dieser sechste Teilstrich 54/10 Teilstriche vom wahren Einstellungspunkt entfernt. Die richtige Ablesung lautet also 31,6 cm — $^{54}/_{10}$ mm oder 31,06 cm. In dieser Weise gibt die Nummer des Teilstrichs der Noniusskala — in diesem Falle 6 —, der mit irgendeinem Teilstrich der Hauptskala zusammenfällt, direkt die Zehntelmillimeter an. Das Zusammenfallen wird meist nicht ganz genau erfolgen. Bei einer gut gearbeiteten Teilung kann man noch die nächste Dezimale aus dem Grade der Abweichung schätzen. Es gibt auch Nonien, bei denen der Unterschied der Teilungen der beiden Skalen noch kleiner ist als $^1/_{10}$ mm. Diese erlauben dann eine genauere Ablesung. Doch sind dieser Methode gewisse Grenzen gesetzt.

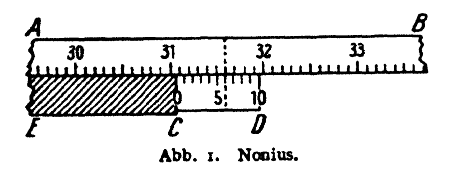


Abb. 1. Nonius.

8. Winkelmessung. Als Einheit des Winkels dient im praktischen Leben meist 1 Grad (1^0), das ist der 90. Teil eines rechten Winkels. Davon sind abgeleitet die Minute, $1' = {}^1/_{60}{}^0$, und die Sekunde, $1'' = {}^1/_{60}{}'$. Für die mathematische Behandlung und daher auch in der Physik meist bequemer ist die Messung der Winkel im sog. Bogenmaß. Ein Winkel hat, im Bogenmaß gemessen, die Größe 1, wenn zu ihm, als Zentriwinkel eines Kreises vom Radius r, ein Kreisbogen von der Länge r gehört (Abb. 2). Die Einheit des Winkels im Bogenmaß beträgt $360/2\pi$ gewöhnliche Grade, also $57{,}2958^0 = 57^0\,17'\,45''$.

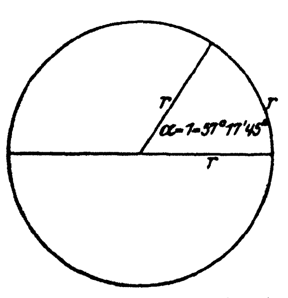


Abb. 2. Einheit des Winkels im Bogenmaß.

Die Messung von Winkeln geschieht in der Physik häufig so, daß man zwei Längen mißt, deren Quotient den sin, cos oder tang des zu messenden Winkels

bildet. Kennt man den Wert der betreffenden Winkelfunktion, so kann man den Wert in Graden aus Tabellen entnehmen und, falls erforderlich, in Bogengrade umrechnen.

Handelt es sich um kleine Winkel — in der Regel ist dies bis etwa 6^0 zulässig — so macht man oft von der Tatsache Gebrauch, daß der Zahlenwert eines solchen Winkels im Bogenmaß sehr angenähert dem sin oder tg des Winkels gleich ist, so daß man diese Größen ohne wesentlichen Fehler einander gleichsetzen kann ($\psi = \sin\psi = \operatorname{tg}\psi$). In Bogensekunden beträgt 6^0 0,1047, und es ist $\sin 6^0 = 0{,}1045$, $\operatorname{tg} 6^0 = 0{,}1051$. Der Fehler beträgt also bei 6^0 weniger als 1%.

Zahlreiche physikalische, insbesondere optische Instrumente müssen mit einer sehr genauen Winkelteilung versehen sein, an der man Drehungen von Teilen des Instrumentes genau ablesen kann (z. B. die zur Messung von Winkeln, vor allem im Gelände, benutzten Theodoliten, die Spektrometer, die Richtkreise von Geschützen usw.). In diesen Fällen bewegt sich eine mit dem drehbaren Teil verbundene Strichmarke neben einer festen kreisförmigen Skala (oder umgekehrt), die in Grade oder Bruchteile von Graden eingeteilt ist. Die Differenz zweier Einstellungen der Strichmarke gibt den Winkelunterschied der beiden zu ihr gehörigen Einstellungen des Apparates an. Da die Winkelmessung durch Verwendung einer Strichteilung auf einem Kreisbogen, auf eine Längenmessung, nämlich auf die Messung des zu dem betreffenden Winkel gehörigen Kreisbogens, zurückgeführt wird, so kann man auch hier, wie bei der eigentlichen Längenmessung, das Noniusprinzip anwenden. Der Nonius wird dabei den besonderen Zwecken der Winkelmessung angepaßt. Sehr häufig sind z. B. Nonien, bei denen 30 Teile der Nebenskala mit 29 Teilstrichen einer in Viertelgrade geteilten Hauptskala zusammenfallen. In diesem Falle ergibt die Einstellung des Nonius unmittelbar den zu messenden Winkel auf $^1/_2$ Minuten genau. Denn er erlaubt — wie der in § 7 beschriebene Nonius Zehntelteilstriche — Dreißigstelteilstriche abzulesen, also $^1/_{30}$ von $^1/_4$ Grad, oder $^1/_2$ Minute.

Die Gesamtheit aller Strahlen, die einen Punkt im Raum mit allen Punkten der Berandung einer Fläche verbinden, schließen einen räumlichen Winkel ein. Sei f ein Stück einer Kugelfläche vom Radius r cm, so schließen alle Strahlen, die den Mittelpunkt der Kugel mit der Berandung von f verbinden, einen räumlichen Winkel ω ein, dessen Größe durch die Gleichung

$$f = r^2 \omega \text{ cm}^2 \quad \text{bzw.} \quad \omega = \frac{f}{r^2}$$

gegeben ist. Da die Größe der gesamten Kugelfläche $f = 4\pi r^2 \text{ cm}^2$ beträgt, so ist ein „ganzer" räumlicher Winkel (analog zum ganzen ebenen Winkel, 360^0 oder 2π) gleich 4π. Nach obiger Gleichung ist ein räumlicher Winkel gleich der Einheit des räumlichen Winkels, $\omega = 1$, wenn er aus einer um seinen Scheitel beschriebenen Kugelfläche vom Radius $r = 1$ cm eine Fläche von der Größe 1 cm² ausschneidet. Dabei ist die Gestalt dieser Fläche ganz beliebig.

9. **Zeitmessung.** Die wissenschaftliche Zeiteinheit ist die Sekunde (sec). Sie ist so definiert, daß $60 \cdot 60 \cdot 24$ sec $= 86400$ sec gleich einem mittleren Sonnentage (dem über ein Jahr genommenen Mittelwert zwischen den Zeiten je zweier aufeinanderfolgender Kulminationen der Sonne) sind. Vom Sonnentag ist der Sterntag, der sich aus zwei aufeinanderfolgenden Kulminationen eines Fixsternes ergibt, zu unterscheiden, weil die Erde bei einem vollen Umlauf um die Sonne bezüglich der Sonne scheinbar eine Umdrehung weniger um sich selbst macht als bezüglich des Fixsternhimmels. (Würde die Erde der Sonne immer die gleiche Seite zukehren, so würde sie sich bei einem vollen Umlauf um die Sonne gegenüber dem Fixsternhimmel einmal in einem Jahre ganz

herumdrehen.) Die Dauer eines Sterntages beträgt 23 Stunden 56 Minuten 4,1 Sekunden mittlerer Sonnenzeit. Für genaue Zeitmessungen benutzt man Pendeluhren mit Gewichtsantrieb.

Der mittlere Sonnentag ist kein absolut konstantes Zeitmaß. Aus astronomischen Beobachtungen geht hervor, daß seine Dauer sehr langsamen periodischen Schwankungen in der Größenordnung einiger Sekunden unterworfen ist. Ferner muß angenommen werden, daß die Erdrotation infolge der ständigen Reibung der Flutwelle ganz allmählich abnimmt (§ 67).

10. **Skalare und Vektoren.** Die physikalischen Größen teilen sich in Skalare und Vektoren. Skalare sind solche Größen, bei denen die Angabe der Maßzahl und der Maßeinheit genügt, um sie vollständig zu charakterisieren, wie z. B. Längen, Flächen, Volumina. Bei den Vektoren genügt die Angabe von Maßzahl und Maßeinheit nicht, sondern es muß auch noch die Angabe ihrer Richtung hinzukommen. Ein Beispiel hierfür ist die Geschwindigkeit. Die Bewegung z. B. eines Eisenbahnzuges ist noch nicht vollständig durch die Angabe der Größe seiner Geschwindigkeit charakterisiert, es muß auch noch die Bewegungsrichtung angegeben werden, etwa durch Angabe des Winkels der Bewegung gegen die Nord-Süd-Richtung. Vektoren werden durch Pfeile dargestellt. Die Länge des Pfeils bildet ein Maß für die Größe des Vektors (Länge gleich oder proportional der Maßzahl), die Richtung, in der der Pfeil zeigt, gibt die Richtung des Vektors an.

Vektoren werden, zum Unterschied von Skalaren, mit gotischen Buchstaben bezeichnet (z. B. $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{u}, \mathfrak{v}$). Jedem Vektor kann man eine skalare Größe zuordnen, die die gleiche Maßzahl hat wie der Vektor. Man nennt diesen Skalar den absoluten Betrag des betreffenden Vektors.

Eine Gleichung zwischen zwei Vektoren (Vektorgleichung) hat eine doppelte Bedeutung. Setzen wir z. B. $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, so sagt dies nicht nur aus, daß die absoluten Beträge A und B der Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ einander gleich sind, sondern daß sie auch die gleiche Richtung im Raume haben. Diese Tatsache ist bei Gleichungen zwischen Vektoren stets genau zu beachten. Es kann sehr wohl $A = B$ sein, ohne daß gleichzeitig $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ ist.

Handelt es sich nur um einen einzigen Vektor oder um mehrere gleich oder entgegengesetzt gerichtete Vektoren, so kann man sich oft mit der Angabe der skalaren Maßzahl der Vektoren begnügen. Dabei erhalten Vektoren von entgegengesetzter Richtung entgegengesetztes Vorzeichen. In diesen Fällen kann man mit algebraischen Gleichungen zwischen den Vektoren operieren. Wir werden von dieser Möglichkeit häufig Gebrauch machen.

11. **Addition und Zerlegung von Vektoren.** Bei der Addition von Vektoren ist nicht nur ihre Größe (ihr absoluter Betrag), sondern auch ihre Richtung zu beachten. Die Verfahren der gewöhnlichen algebraischen Addition gelten nur für Skalare, dürfen aber auf Vektoren nicht angewendet werden. Am besten wird dies durch eine graphische Darstellung veranschaulicht. Die Addition zweier Skalare A und B kann man graphisch so vornehmen, daß man zwei Strecken, deren Längen A cm und B cm betragen, aneinanderfügt und die Länge der so entstandenen Strecke, $A + B = R$, mißt (Abb. 3a). Die Strecken A und B brauchen dabei gar nicht einmal in der gleichen Geraden zu liegen. Sie können prinzipiell auch beliebig gekrümmt sein. Das Ergebnis, nämlich die Länge der resultierenden Strecke, ist stets das gleiche.

Die Summe zweier Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ finden wir, indem wir die ihnen entsprechenden Vektorpfeile (§ 10) unter Beachtung ihrer Richtungen aneinanderfügen und Anfangs- und Endpunkt des so entstandenen Linienzuges durch einen Vektorpfeil $\mathfrak{R}$ verbinden (Abb. 3b). $\mathfrak{R}$ ist dann die Vektorsumme oder Resul-

tierende (Resultante) der beiden Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Das Verfahren kann ohne weiteres auf beliebig viele Vektoren ausgedehnt werden (Abb. 4). Dabei können die einzelnen Vektoren ganz beliebig im Raume orientiert sein und brauchen nicht, wie in Abb. 4, alle in der gleichen Ebene zu liegen. Auch auf ihre Reihenfolge kommt es nicht an.

Abb. 3a. Addition von Skalaren
$A + B = R$

Abb. 3b. Abb. 3c.
Addition von Vektoren
$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{R}$ $R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\gamma}$.

Man stellt eine solche Vektoraddition, analog zu einer algebraischen Addition durch die Gleichung

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} + \cdots = \mathfrak{R} \tag{1}$$

dar. Eine solche Gleichung ist aber nicht algebraisch, d. h. als auf die Maßzahlen (absoluten Beträge) der Vektoren bezüglich, zu deuten. Seien A, B und R die absoluten Beträge von $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{R}$ im Falle der Abb. 3b, so gilt, wenn $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{R}$, keineswegs auch $A + B = R$, sondern es ist, wie man unter Benutzung des cos-Satzes aus Abb. 3c abliest,

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\gamma}, \tag{2}$$

wenn γ den Winkel bedeutet, den die Richtungen der beiden Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ miteinander bilden.

Abb. 4.
$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \cdots = \mathfrak{R}$.

Statt der in Abb. 3b dargestellten Konstruktion verwendet man oft die sog. Parallelogrammkonstruktion (Abb. 5). Man legt die Anfänge der beiden Vektorpfeile aneinander, ergänzt die Figur zu einem Parallelogramm und zieht die von der Anfangsecke ausgehende Diagonale. Diese ist nach Größe und Richtung gleich der Resultierenden $\mathfrak{R}$ der Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.

Die Größen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ usw., aus denen sich die Resultierende durch Vektoraddition zusammensetzt, nennt man die vektoriellen Komponenten des resultierenden Vektors $\mathfrak{R}$.

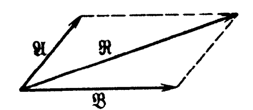


Abb. 5. Parallelogrammkonstruktion.

Sehr häufig ist es erforderlich, einen gegebenen Vektor in Komponenten zerlegt zu denken, aus denen er in Wirklichkeit nicht durch Addition entstanden ist, aus denen er aber durch Vektoraddition als deren Resultierende entstanden sein könnte. Die Zerlegung von Vektoren erfolgt durch einfache Umkehrung des vorstehend geschilderten Verfahrens. Es sei $\mathfrak{A}$ jetzt der gegebene und zu zerlegende Vektor. Man zeichne durch den Anfangspunkt von $\mathfrak{A}$ zwei Gerade in denjenigen beiden Richtungen, in denen die Komponenten liegen sollen. Dann ziehe man durch die Spitze des Vektorpfeils die Parallelen zu diesen beiden Richtungen (Abb. 6a und b). Man erhält so ein Parallelogramm, dessen Diagonale der ursprüngliche Vektor ist, und dessen durch den Anfangspunkt von $\mathfrak{A}$ gehende zwei Seiten die beiden Komponenten $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ des Vektors a in den gewählten Richtungen sind. Je nach der Wahl dieser Richtungen fällt die Größe der Komponenten ganz verschieden aus, wie man durch Vergleich der Abb. 6a und b sieht.

Man kann in dieser Weise einen Vektor auch in mehr als zwei Komponenten zerlegen. Besonders häufig ist der Fall einer Zerlegung in den drei zueinander senkrechten Richtungen eines rechtwinkligen Koordinatensystems.

Es sei $\mathfrak{A}$ ein beliebig gerichteter Vektor, $\mathfrak{A}_x$, $\mathfrak{A}_y$ und $\mathfrak{A}_z$ seien seine drei Komponenten in drei zueinander senkrechten Richtungen (Abb. 7). Dann ist

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_x + \mathfrak{A}_y + \mathfrak{A}_z. \tag{3}$$

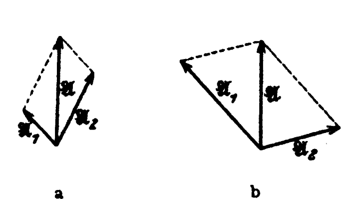


Abb. 6. Zerlegung eines Vektors.

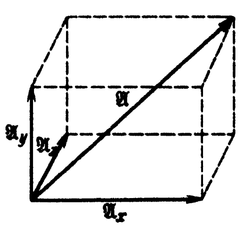


Abb. 7. Zerlegung eines Vektors in drei zueinander senkrechten Richtungen.

Sei A der absolute Betrag des Vektors $\mathfrak{A}$, A_x, A_y und A_z die absoluten Beträge seiner drei Komponenten, so gilt

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}. \tag{4}$$

3. Kapitel.

Die Materie.

12. **Der Satz von der Erhaltung der Materie.** Jede in der Natur beobachtbare Erscheinung ist in irgendeiner Weise an das Vorhandensein von Materie geknüpft, geht an und durch Materie, also irgendwelche Stoffe, vor sich. Dabei sehen wir oft, daß diese Materie sich verändert, insbesondere bei chemischen Vorgängen, oder gar zu verschwinden scheint, wie gelöstes Kochsalz, verdampftes Wasser u. dgl. In allen diesen Fällen kann man nachweisen, daß die Materie nicht verschwunden ist, sondern nur ihre Form geändert hat, wodurch sie oft der unmittelbaren Beobachtung entrückt ist. Ganz allgemein gilt nach den bis jetzt vorliegenden irdischen Erfahrungen der Satz, daß Materie nicht vernichtet, sondern nur in ihrer Beschaffenheit bis zu einem gewissen Grade verändert werden kann. Ebenso gilt aber auch, daß Materie nie aus Nichts entstehen kann. (Die heute viel diskutierte Möglichkeit einer Umwandlung von Materie in Strahlung [§ 539] muß hier zunächst außer Betracht bleiben.)

Hier begegnet uns zum erstenmal einer der sog. Erhaltungssätze der Physik. Wir werden deren noch weitere kennenlernen. Sie bilden eine der wichtigsten Grundlagen des ganzen Gebäudes der Physik.

13. **Aggregatzustände.** Man teilt die Körper ein in feste, flüssige und gasförmige Körper. Man bezeichnet diese drei Zustände als die drei Aggregatzustände. Sie unterscheiden sich äußerlich nach dem Widerstand, welchen ein Körper einer Änderung seiner Form und seines Volumens entgegensetzt.

a) Feste Körper setzen einer Änderung sowohl ihrer Form als auch ihres Volumens einen sehr großen Widerstand entgegen. Sie sind sehr schwer deformierbar und sehr wenig zusammendrückbar.

b) Flüssigkeiten setzen einer Änderung ihrer Form keinen oder höchstens einen sehr geringen, einer Änderung ihres Volumens einen großen Widerstand entgegen. Sie sind beliebig deformierbar (z. B. durch Eingießen in beliebig geformte Gefäße), aber sehr wenig zusammendrückbar, wenn auch meist mehr als feste Körper.

c) Gase setzen einer Änderung ihrer Form keinen, einer Vergrößerung ihres Volumens keinen, einer Verkleinerung desselben einen geringen Wider-

stand entgegen. Sie sind also, wie die Flüssigkeiten, beliebig deformierbar. Ferner sind sie einerseits leicht zusammendrückbar, und andererseits dehnen sie sich stets von selbst durch den ganzen ihnen zur Verfügung stehenden Raum aus.

Feste Körper in strengem Sinne sind nur die kristallinischen Körper. Die anderen, scheinbar festen Körper — z. B. Siegellack, Pech in kaltem Zustande, Glas — haben, wenn man die deformierenden Ursachen lange genug wirken läßt, weitgehend die Eigenschaften von Flüssigkeiten. Sie sind, wenn auch mehr oder weniger schwer, beliebig deformierbar (plastisch). Sie unterscheiden sich ferner von den eigentlichen festen Körpern u. a. dadurch, daß sie keinen wohldefinierten Schmelzpunkt haben. Streng ist jedoch die Unterscheidung der kristallinischen und der amorphen Körper durch ihre Plastizität nicht. Auch die ersteren zeigen unter der Wirkung sehr starker, lange andauernder Kräfte ein plastisches Verhalten, aber meist in erheblich geringerem Grade, als die amorphen Körper. Der eigentliche und wesentliche Unterschied liegt in ihrem molekularen Aufbau.

14. **Vorläufiges über den Aufbau der Materie.** Zerlegt man einen einheitlichen (homogenen) festen, flüssigen oder gasförmigen Körper in einzelne Teile, so erhält man zunächst immer wieder Gebilde, die sich von dem ursprünglichen Ganzen lediglich durch Größe und Form unterscheiden, aber nicht durch ihr physikalisches Verhalten. Zum Vergleich denke man sich eine sehr große Menschenmenge in Gruppen und diese immer wieder in kleinere Gruppen eingeteilt. Diese Gruppen und Untergruppen werden sich in ihrem allgemeinen Verhalten von der ursprünglichen Gesamtmenge nicht unterscheiden. Aber ebenso, wie man mit einer solchen Einteilung einer Menschenmenge in Gruppen schließlich an eine Grenze kommt, wenn man sie nämlich so weit aufgeteilt hat, daß jede Gruppe nur noch aus einem einzigen Menschen besteht, so gibt es auch eine Grenze der Unterteilung der Körper, die ohne ein tieferes Eingreifen in die Natur des betreffenden Stoffes nicht unterschritten werden kann. Was bei der Menschenmenge die einzelnen Menschen sind, sind bei den physikalischen Körpern die Moleküle und Atome, die man als die Bausteine der Körper bezeichnen kann. Die einzelnen Stoffarten unterscheiden sich dadurch, daß sie aus verschiedenartigen Molekülen aufgebaut sind. Jeder unserer Beobachtung zugängliche Körper besteht aus einer ungeheuer großen Zahl von Molekülen. In einem Kubikzentimeter der uns umgebenden Luft befinden sich rund 27 Trillionen ($27 \cdot 10^{18}$) Moleküle, in 1 g Wasser $3{,}37 \cdot 10^{22}$ Moleküle. Ein Molekül des Gases Wasserstoff wiegt nur rund $3{,}3 \cdot 10^{-24}$ g, also eine Quatrillion (Billion Billionen) Wasserstoffmoleküle nur etwa 3,3 g (§ 95).

In einem festen Körper liegen die molekularen Bestandteile ziemlich dicht beieinander und sind mehr oder weniger fest an ihren Ort gebunden infolge von Kräften, mit denen sich benachbarte Teilchen gegenseitig beeinflussen. Auch in den Flüssigkeiten liegen die Moleküle einander ziemlich nah, aber die Kräfte, die sie aufeinander ausüben, sind nicht so groß wie bei den festen Körpern. Die Moleküle sind daher in den Flüssigkeiten nicht fest an ihren Ort gebunden, sondern vermögen sich aneinander vorbei zu bewegen. In noch erhöhtem Maße ist dies bei den Gasen der Fall, bei denen im allgemeinen die zwischen den Molekülen wirkenden Kräfte sehr klein sind, weil die Abstände der einzelnen Moleküle in den Gasen erheblich größer sind als in den festen oder flüssigen Körpern.

Es sei hier nur allgemein bemerkt, daß die Moleküle und Atome stets elektrische Ladungen enthalten, und daß die zwischen den Molekülen und Atomen eines Körpers wirkenden Kräfte, denen diese Körper ihren Zusammenhalt verdanken, in sehr vielen Fällen elektrische Kräfte zwischen diesen Ladungen sind (Näheres s. Kapitel 33).

II. Mechanik starrer Körper. Schwerkraft.

In diesem Abschnitt wird vorausgesetzt, daß wir es mit „starren“ Körpern zu tun haben, d. h. idealen festen Körpern, deren Form und Volumen durch Kräfte, die auf sie wirken, nicht merklich verändert werden.

4. Kapitel.

Lehre von den Bewegungen.

15. **Definition des Massenpunktes.** Um die folgenden Überlegungen möglichst einfach zu gestalten, betrachten wir häufig nicht das Verhalten wirklicher physikalischer Körper, sondern dasjenige eines so kleinen, gedachten Körpers, daß wir ihn mit genügender Annäherung als punktförmig ansehen können. Einen solchen idealisierten Körper bezeichnen wir als einen Massenpunkt. Man stellt ihn sich am besten als eine ganz winzig kleine Kugel vor. Wir gewinnen mit dieser Idealisierung eines Körpers den Vorteil, daß wir seine Lage im Raum durch Angabe seines Ortes in einem Koordinatensystem eindeutig angeben können, während das für einen ausgedehnten Körper, dessen einzelne Teile sich an verschiedenen Stellen des Raumes befinden, nicht ohne weiteres möglich ist. (Man beachte, daß man im täglichen Leben sogar recht ausgedehnte Körper wie Massenpunkte behandelt, z. B. bei der Angabe des augenblicklichen Ortes eines Schiffes in geographischer Länge und Breite. Es kommt hauptsächlich darauf an, daß die Dimensionen des betreffenden Körpers, in diesem Falle des Schiffes, so klein sind gegenüber den Dimensionen des ganzen in Frage kommenden Raumes, daß man sie ihnen gegenüber vernachlässigen kann, ohne einen irgend ins Gewicht fallenden Fehler zu machen.) Zur Angabe des jeweiligen Ortes eines Punktes bedienen wir uns in der Regel eines rechtwinkligen Koordinatensystems, dessen Nullpunkt (Schnittpunkt der Achsen) und Achsenrichtungen wir so wählen, wie es für den vorliegenden Fall gerade bequem ist. Gelegentlich erweist es sich auch als zweckmäßig, ein Polarkoordinatensystem zugrunde zu legen.

16. **Bewegung.** Unter Bewegung versteht man jede Ortsänderung eines Körpers. Die Beurteilung einer Bewegung hängt ab von dem Bewegungszustand des Beobachters der Bewegung. Ein in einem Zuge sitzender Mensch befindet sich, vom Zuge aus gesehen, in Ruhe; vom Erdboden aus beurteilt, wird er mit dem Zuge bewegt. Bewegt er sich innerhalb des Zuges, so ist seine Bewegung, vom Zuge aus beurteilt, eine andere als vom Erdboden aus gesehen. Ein Haus bewegt sich, von der Erde aus beurteilt, nicht; von der Sonne aus beurteilt, nimmt es an der Bewegung der Erde teil. Es muß also bei Angaben über die Bewegung eines Massenpunktes, überhaupt jedes Körpers, stets Klarheit darüber herrschen, von wo aus die Bewegung beurteilt wird, d. h. welches Bezugssystem man als ruhend ansehen will. Bei physikalischen Überlegungen ist es meistens zweckmäßig, die Erdoberfläche, den Laboratoriums-

tisch, als ruhend zu betrachten und die Bewegungen auf diese zu beziehen. Das bedeutet, daß man zur Festlegung des jeweiligen Ortes eines Körpers ein Koordinatensystem benutzt, welches mit der Erde fest verbunden gedacht wird.

Eine Bewegung wird charakterisiert durch ihre Geschwindigkeit. Da sich verschiedene Geschwindigkeiten nicht nur durch ihren Betrag, sondern auch durch ihre Richtung unterscheiden, so ist die Geschwindigkeit ein Vektor (§ 10).

17. **Bewegung auf einer Geraden.** Wir betrachten zunächst den einfachen Fall, daß sich ein Körper (Massenpunkt) auf einer Geraden bewegt. Wir können in diesem Falle, da es sich nur um eine Richtung oder die ihr gerade entgegengesetzte Richtung handeln kann, von der Vektornatur der Geschwindigkeit vorläufig absehen. Es genügt, wenn wir die auf die absoluten Beträge bezüglichen Beziehungen betrachten (§ 10).

Die einzelnen Punkte der Bahn des Körpers seien durch die Koordinate s gekennzeichnet. Die Bewegung des Körpers besteht in einer Änderung des Ortes s mit der Zeit t, d. h. s ist eine Funktion von t, $s = s(t)$. Die Geschwindigkeit v eines Körpers in seiner Bahn wird definiert als der Differentialquotient

$$v = \frac{ds}{dt}. \tag{1}$$

Eine positive Geschwindigkeit ist eine solche, bei der ds/dt positiv ist, bei der also die Maßzahl der Koordinate s mit der Zeit zunimmt. Eine entgegengesetzt gerichtete Geschwindigkeit hat negatives Vorzeichen. Das Vorzeichen einer Geschwindigkeit hängt also von der ganz willkürlichen Festsetzung der Richtung ab, in der die Maßzahlen der Ortskoordinaten anwachsen sollen. (Die Geschwindigkeit eines auf einer Landstraße von A nach B wandernden Fußgängers hat, wenn wir die Kilometerbezeichnung der Straße zugrunde legen, positives Vorzeichen, wenn die Kilometerrechnung in A beginnt, negatives, wenn sie in B beginnt.)

Im allgemeinen wird die Geschwindigkeit des Körpers zeitlich nicht konstant, sondern eine Funktion der Zeit sein, $v = v(t)$. Eine solche Bewegung mit zeitlich veränderlicher Geschwindigkeit heißt beschleunigt, und zwar im physikalischen Sprachgebrauch auch dann, wenn die absolute Größe der Geschwindigkeit nicht zu-, sondern abnimmt. Die Beschleunigung γ ist definiert als der Differentialquotient

$$\gamma = \frac{dv}{dt} \quad \text{oder nach Gl. 1} \quad \gamma = \frac{d^2 s}{dt^2}. \tag{2}$$

Die Beschleunigung hat positives Vorzeichen, wenn die Maßzahl der Geschwindigkeit zunimmt, andernfalls negatives Vorzeichen. (Man beachte, daß eine negative Beschleunigung keineswegs einer Verlangsamung zu entsprechen braucht. Bewegt sich ein Körper in Richtung abnehmender Werte der Bahnkoordinate s, so ist seine Geschwindigkeit v negativ. Nimmt dabei die absolute Größe von v zu, so ist die Beschleunigung trotzdem negativ.)

Aus Gl. 1 folgt durch Integration

$$\int_{t_1}^{t_2} v\,dt = \int_{s_1}^{s_2} ds = s_2 - s_1, \tag{3}$$

wenn s_1 und s_2 die Ortskoordinaten des Körpers zu den Zeiten t_1 und t_2 bedeuten. Das Integral $\int_{t_1}^{t_2} v\,dt$ ergibt also die Länge $s_2 - s_1$ des in der Zeit $t_2 - t_1$ zurückgelegten Weges. Zur Berechnung des Integrals muß v als Funktion der Zeit t

bekannt sein. Der einfachste Fall einer Bewegung ist die geradlinige Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit, die sog. **geradlinige, gleichförmige Bewegung**. In diesem Fall erhalten wir aus Gl. 3

$$s_2 - s_1 = v(t_2 - t_1), \quad \text{bzw.} \quad v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}. \tag{4}$$

Die Geschwindigkeit ergibt sich also in diesem Falle als Quotient von Weg und Zeit, und sie kann durch Messung des in der Zeit $t_2 - t_1$ zurückgelegten Weges $s_2 - s_1$ ermittelt werden (Abstoppen bei Rennen usw.).

Wählen wir den Anfangspunkt unserer Zeitrechnung so, daß sich der Körper zur Zeit $t = 0$ am Orte s_0 befindet, und befindet er sich zur Zeit t am Orte s, so kann man statt Gl. 4 schreiben

$$s = s_0 + vt, \quad \text{bzw.} \quad v = \frac{s - s_0}{t}. \tag{5}$$

Entsprechend folgt durch Integration von Gl. 2

$$\int_{t_1}^{t_2} \gamma\, dt = \int_{v_1}^{v_2} dv = v_2 - v_1. \tag{6}$$

Zur Auswertung dieses Integrals ist es nötig, die Beschleunigung γ als Funktion der Zeit t zu kennen. Wir wollen an dieser Stelle nur den einfachen Fall konstanter Beschleunigung betrachten (**gleichförmig beschleunigte Bewegung**). Dann ergibt Gl. 6

$$v_2 - v_1 = \gamma(t_2 - t_1) \quad \text{bzw.} \quad \gamma = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}. \tag{7}$$

Bei konstanter Beschleunigung können wir diese also messen durch den in der Zeit $t_2 - t_1$ erfolgten Geschwindigkeitszuwachs $v_2 - v_1$. Wählen wir den Anfangspunkt unserer Zeitrechnung so, daß zur Zeit $t = 0$ die Geschwindigkeit v_0 ist, und ist sie zur Zeit t gleich v, so ist nach Gl. 7

$$v = v_0 + \gamma t. \tag{8}$$

Wir können diesen Wert von v in Gl. 3 einsetzen und noch einmal von $t = 0$ bis t integrieren. Wir erhalten dann den bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung zur Zeit t erreichten Ort s,

$$s = s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}\gamma t^2. \tag{9}$$

Hierbei ist wieder s_0 der Ort des Körpers zur Zeit $t = 0$, $s - s_0 = v_0 t + \gamma t^2/2$ also der in der Zeit t zurückgelegte Weg.

18. Bewegung im Raume. Da die Geschwindigkeit ein Vektor ist, so können wir jede beliebige Bewegung in jedem Augenblick in ihre drei Komponenten in den Achsenrichtungen eines rechtwinkligen Koordinatensystems xyz zerlegen. Der absolute Betrag der Geschwindigkeit sei v, die absoluten Beträge der drei Komponenten v_x, v_y und v_z. Dann gilt, entsprechend Gl. 1,

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \qquad v_y = \frac{dy}{dt}, \qquad v_z = \frac{dz}{dt} \tag{10}$$

und es ist

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\frac{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}{(dt)^2}} = \frac{ds}{dt} \tag{11}$$

(vgl. § 17). Wie bei der geradlinigen Bewegung bedeutet hier

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

wieder ein unendlich kleines Stück der Bahn des Körpers.

Ebenso erhalten wir die Komponenten der Beschleunigung γ,

$$\gamma_x = \frac{d v_x}{d t} = \frac{d^2 x}{d t^2}, \qquad \gamma_y = \frac{d v_y}{d t} = \frac{d^2 y}{d t^2}, \qquad \gamma_z = \frac{d v_z}{d t} = \frac{d^2 z}{d t^2}, \tag{12}$$

und es ist

$$\gamma = \sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2} \tag{13}$$

Die Gl. 10 und 12 lassen sich genau wie die Gl. 1 und 2 integrieren, wenn die Komponenten von v, bzw. von γ, als Funktionen der Zeit bekannt sind. Wir erhalten dann die Geschwindigkeitskomponenten v_x, v_y und v_z sowie die Ortskoordinaten x, y und z als Funktionen der Zeit,

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t).$$

Eliminiert man aus diesen drei Gleichungen die Zeit, so erhält man zwei Gleichungen zwischen x, y und z, und diese beiden Gleichungen ergeben die Bahnkurve des Körpers. (Jede einzelne dieser beiden Gleichungen stellt eine Fläche im Raum dar, und die Schnittlinie dieser beiden Flächen ist die Bahnkurve.)

Man bezeichnet jede Bewegung als beschleunigt, bei der mindestens eine der drei Beschleunigungskomponenten γ_x, γ_y, γ_z von Null verschieden ist. Infolgedessen ist jede krummlinige Bewegung eine beschleunigte Bewegung, auch wenn die Bahngeschwindigkeit konstant ist. Wir betrachten z. B. den einfachen Fall eines mit konstanter Umlaufsgeschwindigkeit in der xy-Ebene auf einem Kreise rotierenden Körpers. Hier ist $\gamma_z = 0$, aber in Richtung der x- und y-Achse erfährt der Körper Beschleunigungen, deren Größe und Richtung sich periodisch ändert (§ 20).

Man beachte genau, daß bei einer beliebigen Bewegung im Raume eine der Gl. 2 entsprechende Beziehung $\gamma = \frac{d^2 s}{d t^2}$ nicht gilt. Es ist

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{d^2 x}{d t^2}\right) + \left(\frac{d^2 y}{d t^2}\right) + \left(\frac{d^2 z}{d t^2}\right)},$$

und dies ist keineswegs identisch mit $\frac{d^2 s}{d t^2}$. Die Beschleunigung eines Körpers längs seiner Bahn, $\frac{d^2 s}{d t^2}$, hat in der Regel einen anderen, und zwar kleineren absoluten Betrag als die Beschleunigung γ.

Ein Beispiel dafür bildet eine Kreisbewegung, die bei konstanter Bahngeschwindigkeit $\left(\frac{d^2 s}{d t^2} = 0\right)$ eine endliche Beschleunigung γ hat.

19. **Geschwindigkeit und Beschleunigung in vektorieller Darstellung.** Wir wollen jetzt die Bewegung eines Körpers auch in vektorieller Darstellung betrachten. Dabei müssen wir beachten, daß wir jetzt auch die Bahnelemente des Körpers als Vektoren anzusehen haben, denn sie sind nicht nur durch ihre Größe, sondern auch durch ihre Richtung charakterisiert. Wir bezeichnen den Geschwindigkeitsvektor mit $\mathfrak{v}$. Dann ist die Geschwindigkeit definiert als der Differentialquotient

$$\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{s}}{d t} \tag{14}$$

Dabei ist $d\mathfrak{s}$ das unendlich kleine Wegstück, das der Körper in der Zeit dt zurücklegt, und zwar ist $d\mathfrak{s}$ nach dem oben Gesagten ein Vektor.

Der Körper bewege sich in einem rechtwinkligen Koordinatensystem xyz. Wir können den Vektor $\mathfrak{v}$ in seine Komponenten nach den drei Koordinatenrichtungen zerlegen (§ 11),

$$\mathfrak{v}_x = \frac{d\mathfrak{x}}{d t}, \qquad \mathfrak{v}_y = \frac{d\mathfrak{y}}{d t}, \qquad \mathfrak{v}_z = \frac{d\mathfrak{z}}{d t}, \tag{15}$$

wobei $d\mathfrak{x}$, $d\mathfrak{y}$ und $d\mathfrak{z}$ die Komponenten des Vektors $d\mathfrak{s}$ sind. Nach § 11, Gl. 3, gilt die Vektorgleichung

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_x + \mathfrak{v}_y + \mathfrak{v}_z. \tag{16}$$

Wir wollen jetzt, analog zu Gl. 3, § 17, das zeitliche Integral der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ von $t = 0$ bis t bilden. Aus Gl. 14 folgt

$$\int_0^t \mathfrak{v}\, dt = \int_{t=0}^t d\mathfrak{s}. \tag{17}$$

Um die Bedeutung der rechten Seite dieser Gleichung zu verstehen, müssen wir uns vor Augen halten, daß ein Integral eine Summe ist, in unserem Falle also die Summe der unendlich kleinen Vektoren $d\mathfrak{s}$, die der Körper in der Zeit t durchläuft, und diese Summe ist nach den Gesetzen der Vektoraddition zu bilden (§ 11). Wir müssen also die einzelnen Wegelemente $d\mathfrak{s}$ aneinanderfügen wie die Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ usw. in Abb. 4, § 11. Das aber ergibt als Linienzug die Bahn s, die der Körper in der Zeit t zurücklegt. Den Wert des Integrals, der Summe des $d\mathfrak{s}$, finden wir aber nach den in § 11 gegebenen Vorschriften, indem wir den Vektorpfeil zeichnen, der Anfang A und Ende B dieser Bahn verbindet.

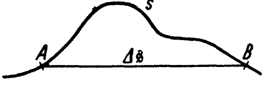


Abb. 8. Verschiebung und Bahn eines Körpers.

Das Integral $\int d\mathfrak{s} = \Delta\mathfrak{s}$ ist also von dem zurückgelegten Wege ganz verschieden. Es ergibt die in der Zeit t eingetretene Verschiebung des Körpers nach Größe und Richtung. Diese ist, außer im Falle einer geradlinigen Bewegung, stets kleiner als die Bahnlänge s.

Als vektorielle Beschleunigung $\mathfrak{g}$ wird, analog zu Gl. 2, der Differentialquotient von $\mathfrak{v}$ nach der Zeit

$$\mathfrak{g} = \frac{d\mathfrak{v}}{dt} \tag{18}$$

definiert. $\mathfrak{g}$ hat die gleiche Richtung wie die jeweilige Geschwindigkeitsänderung $d\mathfrak{v}$, denn Gl. 18 ist ja eine Vektorgleichung. Hingegen ist die Richtung von $\mathfrak{g}$ im allgemeinen von der Richtung von $\mathfrak{v}$ verschieden.

Wir können den Vektor $\mathfrak{g}$ in seine drei Komponenten in den drei Koordinatenrichtungen zerlegen, und es gilt analog zu Gl. 15 und 16

$$\mathfrak{g}_x = \frac{d\mathfrak{v}_x}{dt}, \quad \mathfrak{g}_y = \frac{d\mathfrak{v}_y}{dt}, \quad \mathfrak{g}_z = \frac{d\mathfrak{v}_z}{dt}, \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_x + \mathfrak{g}_y + \mathfrak{g}_z. \tag{19}$$

Bilden wir aus Gl. 18 das Integral

$$\int_0^t \mathfrak{g}\, dt = \int_{t=0}^t d\mathfrak{v}, \tag{20}$$

so bedeutet $\int d\mathfrak{v}$ nach den bei Gl. 17 angestellten Überlegungen die Summe aller vektoriellen Geschwindigkeitsänderungen $d\mathfrak{v}$ während der Integrationszeit t. Setzen wir $\int_{t=0}^t d\mathfrak{v} = \Delta\mathfrak{v}$, so ist die Geschwindigkeit nach Ablauf der Zeit t

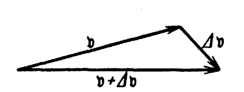


Abb. 9. Vektorielle Geschwindigkeitsänderung.

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + \Delta\mathfrak{v}, \tag{21}$$

wobei $\mathfrak{v}_0$ den Geschwindigkeitsvektor zur Zeit $t = 0$ bedeutet. $\mathfrak{v}_0$ und $\Delta\mathfrak{v}$ sind vektoriell zu addieren (Abb. 9). Im allgemeinen liegen sie nicht in der gleichen Richtung.

Man beachte, daß es vorkommen kann, daß die absoluten Beträge von $\mathfrak{v}_0$ und $\mathfrak{v}_0 + \Delta\mathfrak{v}$ gleich groß sind und nur ihre Richtungen verschieden. Das ist z. B. der Fall bei der Kreisbewegung mit konstanter Umlaufsgeschwindigkeit (§ 20).

20. Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung. Von den krummlinigen Bewegungen betrachten wir hier die mit gleichbleibender Geschwindigkeit erfolgende Bewegung eines Massenpunktes auf einer kreisförmigen Bahn vom Radius r. In diesem Falle bedient man sich zur Bezeichnung des jeweiligen Ortes eines Massenpunktes P am besten eines Polarkoordinatensystems, in dem dieser Ort einmal durch den Radius r der Kreisbahn gegeben ist, zweitens durch Angabe des Winkels φ, den die jeweilige Verbindung des Massenpunktes mit dem Mittelpunkt des Kreises (Radiusvektor oder Fahrstrahl) mit einer festen, durch den Mittelpunkt gehenden Graden OA bildet (Abb. 10a). Da r konstant ist, ändert sich bei der Kreisbewegung nur der Winkel φ. Man kann also die Ortsänderung durch die Änderung des Winkels φ allein beschreiben. Je schneller sich φ ändert, um so schneller geht die Ortsänderung des Massenpunktes auf dem Kreise vor sich. Messen wir φ in Bogenmaß (§ 8), so ist der von dem Winkel φ eingeschlossene Kreisbogen gleich $s = r\varphi$. Hat der Massenpunkt in der Zeit t dieses Stück des Kreises zurückgelegt, so beträgt seine Bahngeschwindigkeit

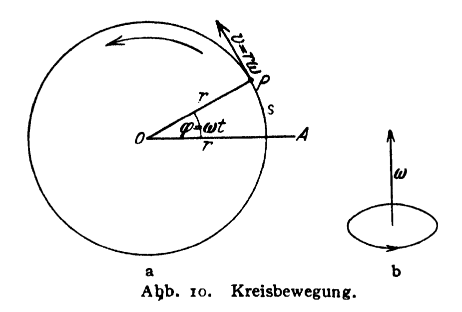


Abb. 10. Kreisbewegung.

$$v = r \cdot \frac{d\varphi}{dt} = r\omega\,. \tag{22}$$

Man bezeichnet $\omega = d\varphi/dt$ als die Winkelgeschwindigkeit der Kreisbewegung, denn ω ist die Geschwindigkeit, mit der sich der Winkel φ verändert, d. h. der Zuwachs des Winkels φ in einer Sekunde. Selbstverständlich wächst φ bei mehreren Umläufen über den Wert 2π hinaus. Er beträgt nach zwei vollen Umläufen 4π, nach n vollen Umläufen $n \cdot 2\pi$.

Ist die Winkelgeschwindigkeit nicht konstant, so kann man in Analogie zu den Überlegungen des § 17 eine Winkelbeschleunigung η definieren, welche den Zuwachs der Winkelgeschwindigkeit in einer Sekunde angibt: $\eta = d\omega/dt = d^2\varphi/dt^2$.

Auch Winkelgeschwindigkeiten und Winkelbeschleunigungen sind Vektoren, denn die Richtung der Drehungsachse und der Umlaufssinn sind wesentliche Merkmale einer Rotation. Man stellt Winkelgeschwindigkeiten durch einen Pfeil dar, dessen Länge der Maßzahl der Winkelgeschwindigkeit proportional ist, dessen Richtung auf der Bahnebene des sich bewegenden Körpers senkrecht steht, und der nach derjenigen Richtung zeigt, in der sich eine rechtsgängige Schraube (die meisten Schrauben, Bohrer u. dgl. sind rechtsgängig) vorwärtsbewegt, wenn man sie im Sinne der vorliegenden Rotation herumdreht (Abb. 10b). Die Addition zweier solcher Vektoren folgt den gleichen Gesetzen wie die anderer Vektoren. Das gleiche gilt für Winkelbeschleunigungen.

Wir betrachten eine gleichförmige Kreisbewegung von konstanter Winkelgeschwindigkeit ω und legen ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit seinem Nullpunkt in den Mittelpunkt der Kreisbahn (Abb. 11a). Die Koordinaten eines Punktes auf dieser Kreisbahn sind dann

$$x = r\cos\varphi\,, \qquad y = r\sin\varphi\,, \tag{23}$$

wenn r den Radius des Kreises bedeutet und φ den Winkel zwischen der Richtung von r und der positiven x-Achse. Bewegt sich ein Massenpunkt mit konstanter Geschwindigkeit auf dem Kreise, so ist der zu seinem jeweiligen

Ort gehörige Winkel φ, wenn t die Zeit bedeutet, seitdem der Massenpunkt die positive x-Achse gekreuzt hat,

$$\varphi = \omega t, \tag{24}$$

und die Koordinaten des Massenpunktes sind zur Zeit t

$$x = r \cos \omega t, \quad y = r \sin \omega t. \tag{25}$$

Wir erhalten jetzt die Komponenten v_x und v_y der Geschwindigkeit in der Richtung von x oder y nach Gl. 10 durch Differentiation der Gl. 25 nach t

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -r\omega \sin \omega t, \qquad v_y = \frac{dy}{dt} = r\omega \cos \omega t, \tag{26}$$

und durch nochmalige Differentiation von Gl. 26 nach t die Beschleunigungen in diesen Richtungen

$$\gamma_x = -r\omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 x, \qquad \gamma_y = -r\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 y, \tag{27}$$

also den Koordinaten x und y proportional.

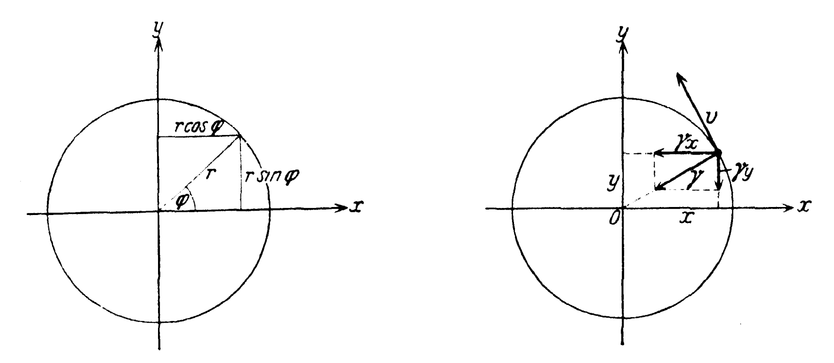


Abb. 11 a. **Zur harmonischen Bewegung.** Abb. 11 b. Beschleunigung bei der Kreisbewegung.

Da γ_x und γ_y endliche Werte haben, so ist die betrachtete Kreisbewegung trotz konstanter Bahngeschwindigkeit eine beschleunigte Bewegung (§ 19). Der absolute Betrag der Beschleunigung ergibt sich zu

$$\gamma = \sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2} = -r\omega^2 \tag{28}$$

(Abb. 11 b). Die Beschleunigung γ steht senkrecht zur Geschwindigkeit v.

Betrachtet man die Komponente der Bewegung in der Richtung der x-Achse allein — was man auch anschaulich unmittelbar tun kann, wenn man die Kreisbewegung von einem außerhalb des Kreises gelegenen Punkte der y-Achse aus betrachtet —, so erhält man eine regelmäßig hin- und hergehende, sog. periodische Bewegung oder Schwingung, welche man, wenn sie der durch Gl. 25 ausgedrückten Gesetzmäßigkeit entspricht, eine **harmonische Bewegung** nennt. (Ob dabei die betrachtete Koordinate proportional dem sin oder cos ist, ist ganz gleichgültig, da sich diese beiden Funktionen mit fortschreitender Größe von ωt ganz gleichartig ändern. Ob der sin oder cos auftritt, hängt nur von der Wahl des Nullpunktes von t ab.) r ist der größte Wert, den x (oder y) annehmen kann. Man bezeichnet r als die **Amplitude** der Schwingung.

5. Kapitel.

Das Verhalten starrer Körper unter der Wirkung von Kräften.

21. Kräfte als Ursache von Bewegungsänderungen. Bisher haben wir Änderungen von Geschwindigkeiten betrachtet, ohne nach ihrer Ursache zu fragen. Vielfach beobachten wir in der Natur Änderungen von Geschwindigkeiten, sowohl bezüglich ihrer Größe als auch ihrer Richtung, ohne daß die Ursache ohne weiteres sichtbar ist (z. B. freier Fall, schräger Wurf). In anderen Fällen können wir die Ursache unmittelbar erkennen. Insbesondere ist das dann der Fall, wenn diese Ursache in unserem eigenen Körper gelegen ist, wenn wir also die Bewegung eines Körpers durch Betätigung unserer Muskeln in irgendeiner Weise beeinflussen, sei es, daß wir ihn aus der Ruhe in Bewegung setzen oder umgekehrt einen bewegten Körper zur Ruhe bringen oder die Größe und Richtung einer Bewegung in irgendeiner Weise ändern. In allen diesen Fällen ist hierbei dasjenige Etwas wirksam, das wir die Kraft unserer Muskeln nennen. Wir können also durch unsere Kraft Körper beschleunigen. Es ist nun aber eine Grundlage jeden wissenschaftlichen Erkennens, daß die unmittelbaren Ursachen gleicher Vorgänge die gleichen sein müssen. Wir nehmen daher in allen Fällen, in denen wir in der Natur Beschleunigungen auftreten sehen, das Wirken eines Etwas an, das unserer Muskelkraft äquivalent ist und das wir daher auch als Kraft bezeichnen. Zu dem gleichen Ergebnis kommen wir, wenn wir bedenken, daß wir imstande sind, die Wirkung von bewegungsändernden Ursachen (z. B. der Schwere) durch die Kraft unserer Muskeln aufzuheben (eine mit der Hand getragene Last, die wegen des Getragenwerdens nicht, wie sie es sonst tun würde, herabfällt). Es kann aber nur Gleiches und Gleiches sich gegenseitig unwirksam machen, so daß wir berechtigt sind, die wirkende Ursache, die in diesem Falle in der Schwere liegt, auch als eine Kraft zu bezeichnen.

22. Der Trägheitssatz (1. Newtonsches Axiom). Schon Galilei hat ausgesprochen, daß ein Körper, auf den keinerlei Kräfte wirken, seine Bewegung, sowohl bezüglich der Größe der Geschwindigkeit als auch bezüglich ihrer Richtung, unverändert beibehält. In der Praxis des täglichen Lebens ist es durchweg so, daß ein Körper, der sich mit unveränderter Geschwindigkeit z. B. über die Erdoberfläche bewegen soll (Eisenbahnzug, Wagen, Schiff), der dauernden Wirkung einer Kraft bedarf, damit er nicht zum Stillstande kommt. Das liegt aber nur daran, daß auf einen jeden solchen Körper hemmende Kräfte wirken, nämlich solche, die von der Reibung herrühren (am Erdboden, an den Schienen, den Achsen der Räder, dem Wasser, der Luft). Diese Reibungskräfte nur werden bei konstanter Geschwindigkeit durch die vorwärtstreibende Kraft überwunden. Wären sie nicht vorhanden, so würde ein einmal in Fahrt befindlicher Eisenbahnzug auf ebener horizontaler Bahn ohne Maschine beliebig lange mit unverminderter Geschwindigkeit weiterlaufen. Eine polierte Stahlkugel oder ein Eisstückchen legt auf blankem Eise, da hier die Reibung sehr gering ist, sehr weite Strecken mit nur ganz allmählich abnehmender Geschwindigkeit zurück. Die Ursache, welche bewirkt, daß ein Körper, auf den keinerlei Kräfte wirken, seinen Bewegungszustand nicht ändert, bzw. daß es der Einwirkung einer Kraft bedarf, um seinen Bewegungszustand zu ändern, bezeichnet man als die Trägheit der Körper. Sie ist eine allgemeine Körpereigenschaft, und zwar diejenige, welche uns, neben der Schwere und der — nicht immer vorhandenen — Sichtbarkeit, das Vorhandensein eines Körpers am deutlichsten zum Bewußtsein bringt. Newton hat diese Körpereigenschaft in dem ersten der drei sog. Axiome, die er der Mechanik zugrunde gelegt hat, folgendermaßen ausgesprochen:

„Jeder Körper verharrt in geradliniger, gleichförmiger Bewegung, es sei denn, er werde durch eine auf ihn wirkende Kraft gezwungen, seinen Bewegungszustand zu ändern."

Der Fall des Verharrens in Ruhe ist hierin mit enthalten, da die Ruhe als eine Bewegung mit der Geschwindigkeit $v = 0$ angesehen werden kann.

Das erste NEWTONsche Axiom wird oft auch als Trägheitssatz bezeichnet. Man kann es auch so aussprechen: Wo wir sehen, daß ein Körper Größe oder Richtung seiner Geschwindigkeit ändert, behaupten wir, daß eine Kraft auf ihn wirkt. Oder: Die Ursache jeder Änderung einer Bewegung nach Größe und Richtung der Geschwindigkeit ist stets eine Kraft.

Die drei NEWTONschen Axiome lauten in ihrer lateinischen Originalfassung (1687):

1. Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.

2. Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae et fieri secundum lineam rectam, qua vis illa imprimitur (§ 23).

3. Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem, sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi (§ 29).

Es ist sehr zu empfehlen, sich die NEWTONschen Axiome in dieser klaren Fassung einzuprägen.

23. Die träge Masse (2. NEWTONsches Axiom). Die Einheit der Masse und der Kraft. Das zweite der NEWTONschen Axiome (schon 1632 von GALILEI ausgesprochen) lautet:

„Die Änderung der Bewegung (mutatio motus) ist der wirkenden Kraft proportional und erfolgt in derjenigen Richtung, in der die Kraft wirkt."

Was ist hier unter „Änderung der Bewegung" zu verstehen? Handelt es sich jeweils um den gleichen Körper, der nacheinander verschieden großen Kräften unterworfen wird, so kann man diesen Begriff mit der Änderung der Geschwindigkeit, also der Beschleunigung identifizieren und sagen, daß die Beschleunigung der wirkenden Kraft proportional ist. Handelt es sich aber um verschiedene Körper, so gilt dies nicht mehr, denn wir wissen aus der täglichen Erfahrung, daß die Beschleunigungen, die verschiedene Körper durch die gleiche Kraft erfahren, sehr verschieden sein können. Denn sie setzen einer gleich großen Änderung ihres jeweiligen Bewegungszustandes einen verschieden großen Widerstand entgegen, sie haben eine verschiedene Trägheit. Wir schreiben dieses verschiedene Verhalten der Körper einer ihnen innewohnenden Eigenschaft zu, die als träge Masse oder kurz Masse des Körpers bezeichnet wird. Die Masse eines Körpers ist also nicht ein Ausdruck für die Materie selbst, sondern für eine ihrer Eigenschaften. Wohl aber ist sie das handgreiflichste Maß der Menge der in einem Körper enthaltenen Materie.

Nun ist bei gleicher Kraft die Beschleunigung eines Körpers um so kleiner, je größer seine Trägheit ist, also je mehr Masse er enthält. Es ist daher die Beschleunigung $\mathfrak{g}$ der wirkenden Kraft $\mathfrak{k}$ proportional, der Masse m des betreffenden Körpers umgekehrt proportional, $\mathfrak{g} \approx \mathfrak{k}/m$, bzw. $\mathfrak{k} \approx m\mathfrak{g}$. Da wir nun über die Maßeinheiten der Kraft und der Masse noch nicht verfügt haben, so ist nichts im Wege, daß wir diese Proportionalität in eine Gleichung verwandeln und schreiben

$$\mathfrak{k} = m\mathfrak{g} \text{ oder Kraft} = \text{Masse} \cdot \text{Beschleunigung}. \qquad (1)$$

Es ist also unter der Änderung der Bewegung das Produkt aus Masse und Beschleunigung zu verstehen. Da eine Kraft nicht nur durch ihre Größe, sondern auch durch ihre Richtung charakterisiert ist, so ist sie ein Vektor, und Gl. 1 drückt daher nicht nur die Gleichheit der Maßzahlen beider Seiten, sondern auch der Richtungen der beiden Vektoren $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{g}$ aus.

In denjenigen Fällen, wo es sich nur um die absoluten Beträge von Kräften handelt, werden wir diese mit k bezeichnen. Wir schreiben dann statt Gl. 1

$$k = m\gamma. \tag{1a}$$

Das zweite NEWTONsche Axiom ist eine das erste Axiom ergänzende strengere Definition des Kraftbegriffs. Es sagt aus, daß wir eine Kraft erstens durch die Größe der Beschleunigung messen wollen, die sie einem bestimmten Körper erteilt, und zweitens, daß wir ihr diejenige Richtung zuschreiben wollen, in der diese Beschleunigung erfolgt. Und schließlich ist es eine Definition für den Begriff der trägen Masse.

Als Einheit der Masse ist diejenige Masse festgesetzt, die gleich derjenigen eines Kubikzentimeters Wasser von 4° ist. (Über den Grund der Festsetzung dieser Temperatur s. § 161.) Diese Masse wird als 1 Gramm (1 gr oder g) bezeichnet. Vom Gramm sind u. a. folgende Einheiten abgeleitet:

1 cg (Zentigramm) $= {}^1/_{100}$ g
1 mg (Milligramm) $= {}^1/_{1000}$ g
1 kg (Kilogramm) = 1000 g
1 t (Tonne) = 1000 kg = 10^6 g.

Die Masse ist als reines Quantitätsmaß ein Skalar (§ 10). Sie ist durch ihre Maßzahl und Angabe der Maßeinheit völlig beschrieben.

Die Messung (Vergleichung) von Massen erfolgt in der Regel nicht durch Vergleich ihrer Trägheit, sondern ihres Gewichtes, d. h. durch Wägung. Das internationale Prototyp der Masseneinheit ist das in Paris befindliche „Urkilogramm", von dem sich Kopien in allen Kulturländern befinden[1]).

Unter der Dichte eines homogenen Stoffes versteht man die Masse der Volumeinheit, also von 1 cm³, dieses Stoffes (vgl. § 56).

Als Krafteinheit muß nach Gl. 1 diejenige Kraft angesehen werden, welche einer Masse m eine so große Beschleunigung $\mathfrak{g}$ erteilt, daß das Produkt $m\mathfrak{g}$ die Maßzahl 1 hat. Das ist z. B. der Fall, wenn m und $\mathfrak{g}$ beide im CGS-System (§ 24) die Maßzahl 1 haben. Man sagt daher auch:

Einheit der Kraft ist diejenige Kraft, welche der Masse 1 g die Beschleunigung 1 cm/sec² erteilt.

Man nennt die so definierte Krafteinheit 1 dyn. Sie ist ${}^1/_{981}$ derjenigen Kraft, welche die Masse 1 g infolge ihrer Schwere auf der Erdoberfläche in Meereshöhe erfährt (§ 53), also etwa gleich dem Gewicht von 1 mg.

24. Das wissenschaftliche Maßsystem (CGS-System) und das technische Maßsystem. Die Länge, die Zeit und die Masse sind die Grundgrößen des wissenschaftlichen Maßsystems, das Zentimeter, die Sekunde und das Gramm die Grundeinheiten. Man bezeichnet es daher auch als das Zentimeter-Gramm-Sekunden-System oder kurz CGS-System. Außerhalb dieses Systems steht als Größe besonderer Art nur die Temperatur.

Für die Zwecke der Technik sind die Einheiten des CGS-Systems zum Teil nicht geeignet. Die Zeiteinheit des technischen Maßsystems ist zwar auch die

---

[1]) S. hierzu die Fußnote zu § 7. Nach neueren Messungen ist das Urkilogramm um 0,04 g größer, als seiner Definition entspricht.

Sekunde, jedoch dient als Längeneinheit das Meter. Ganz prinzipiell unterscheidet es sich aber vom CGS-System dadurch, daß als dritte Grundgröße nicht die Masse, sondern die Kraft verwendet wird, und zwar gilt als ihre Einheit die Kraft, die die Masse 1 kg infolge ihrer Schwere an der Erdoberfläche erfährt, d. h. das Gewicht von 1 kg. Diese Kraft beträgt, wie wir später (§ 55) sehen werden, 981000 dyn. Sie wird im technischen Maßsystem als 1 Kilogrammgewicht oder kurz als 1 Kilogramm bezeichnet. Zum Unterschied von der Masse 1 kg bezeichnen wir sie mit der Einheitsbezeichnung kg*. Die Masse ist im technischen Maßsystem eine abgeleitete Größe. Die Beziehung Kraft = Masse × Beschleunigung wird auch im technischen Maßsystem aufrechterhalten, die Beschleunigung aber natürlich in Meter/Sekunde² gemessen. Demnach hat ein Körper im technischen Maßsystem die Masse 1, wenn er durch die Kraft 1 kg* die Beschleunigung 1 m/sec² erfährt. Hieraus berechnet man leicht, daß die technische Masseneinheit gleich 9810 g ist. Sie hat keinen besonderen Namen. Sie wird in der Einheit von Kraft/Beschleunigung, also in kg*sec²/m, gemessen.

25. Die Bewegungsgröße. Die Gl. 1, § 23 kann man unter Berücksichtigung der Gl. 18, § 19, auch schreiben:

$$\mathfrak{k} = m\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \frac{d\,(m\mathfrak{v})}{dt}\,. \tag{2}$$

Die wirkende Kraft $\mathfrak{k}$ ist demnach gleich dem Differentialquotienten von $m\mathfrak{v}$ nach der Zeit. Das Produkt $m\mathfrak{v}$ aus Masse und Geschwindigkeit nennt man die Bewegungsgröße oder den Impuls der Masse m, und man kann daher das zweite NEWTONsche Axiom auch folgendermaßen aussprechen: Die Änderung der Bewegungsgröße in der Zeiteinheit ist gleich der wirkenden Kraft. Die Bewegungsgröße ist ein Vektor, und Gleichsetzung zweier Bewegungsgrößen bedeutet daher nicht nur Übereinstimmung in ihrer Maßzahl, sondern auch in ihrer Richtung.

Wir können jetzt die am Anfang des § 23 gestellte Frage, was unter „Änderung der Bewegung" zu verstehen sei, präzise dahin beantworten, daß es sich um die Änderung der Bewegungsgröße handelt.

Aus Gl. 2 folgt unmittelbar

$$m\mathfrak{v} = \int_0^t \mathfrak{k}\cdot dt\,. \tag{3}$$

Die Bewegungsgröße ist das Zeitintegral der wirkenden Kraft.

Sofern es sich künftig nur um die absoluten Beträge von Bewegungsgrößen handelt, werden wir den Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}$ durch seinen absoluten Betrag v ersetzen (§ 10) und für die Bewegungsgröße mv schreiben.

26. Trägheitskräfte. D'ALEMBERTsches Prinzip. Wir können Gl. 1a auch in der Form

$$\mathfrak{k} + (-m\mathfrak{g}) = 0 \tag{4}$$

schreiben. Nach D'ALEMBERT kann man die Größe $-m\mathfrak{g}$ auch als eine Kraft auffassen, nämlich als eine solche, die von der Trägheit der beschleunigten Masse m herrührt und sich ihrer Beschleunigung zu widersetzen sucht. Man nennt diese Kräfte Trägheitskräfte oder Trägheitswiderstände. Die Trägheitskraft ist der beschleunigenden Kraft entgegengerichtet und hat den gleichen absoluten Betrag wie diese. Gl. 4 sagt aus, daß die Summe der beschleunigenden Kraft und des Trägheitswiderstandes bei einem beschleunigten Körper stets gleich Null ist (D'ALEMBERTsches Prinzip, 1793).

27. Addition von Kräften. Der Satz vom Parallelogramm der Kräfte. Zur Beschreibung einer Kraft ist außer ihrer Maßzahl auch die Angabe der Richtung

erforderlich, in der sie wirkt. Kräfte sind daher Vektoren und nach dem für Vektoren geltenden Gesetz zu addieren (§ 11).

Wirken auf einen Körper mehrere Kräfte gleichzeitig, so führt er diejenige Bewegung aus, die er ausführen würde, wenn nur eine einzige Kraft auf ihn wirken würde, die nach Größe und Richtung gleich der nach den Gesetzen der Vektoraddition ermittelten Resultierenden der auf ihn tatsächlich wirkenden Kräfte ist. Man kann diese also durch ihre Resultierende ersetzen.

An sich wäre es denkbar, daß die Wirkung einer Kraft durch das Hinzukommen einer zweiten irgendwie beeinflußt würde. In diesem Falle würde die einfache Vektoraddition von Kräften nicht ohne weiteres anwendbar sein. Daß sie es ist, beruht auf der Tatsache, daß sich die Wirkungen mehrerer Kräfte stets ungestört überlagern. Diese schon von NEWTON erkannte Tatsache nennt man den *Satz von der ungestörten Superposition der Kräfte* oder das *Unabhängigkeitsprinzip*.

Zur graphischen Konstruktion der Resultierenden von Kräften verfährt man nach den in § 11 erörterten allgemeinen Regeln der Vektoraddition. Dabei ist jeder Kraft ihr *Angriffspunkt* zuzuordnen, d. h. der Punkt eines Körpers, an dem man sich die Kraft wirkend denkt. Der Vektorpfeil einer Kraft ist zunächst so zu zeichnen, daß sein hinteres Ende in ihrem Angriffspunkt liegt. Greifen die wirkenden Kräfte alle im gleichen Punkte des Körpers an, so läßt sich die Resultierende immer ohne weiteres konstruieren. Greifen aber mehrere Kräfte in verschiedenen Punkten eines Körpers an, so ist die Konstruktion nicht ohne weiteres möglich. Von diesen Fällen wollen wir nur diejenigen betrachten, in denen die Kräfte, also auch die sie darstellenden Vektorpfeile, in derselben Ebene liegen. Es gilt der Satz, daß man den Angriffspunkt einer Kraft in der Richtung der Kraft, auf ihrer sog. *Wirkungslinie*, sowohl vorwärts als auch rückwärts beliebig verschoben denken kann, ohne daß an der *augenblicklichen* Wirkung dieser Kraft etwas geändert wird. (Es ist z. B. für die augenblickliche Wirkung der einen Wagen ziehenden Kraft ganz gleichgültig, ob ich einen Strick unmittelbar vorn am Wagen befestige oder in der Mitte der Deichsel oder an deren vorderem Ende). Man kann daher zwei nicht im gleichen Punkte angreifende, aber in einer Ebene liegende Kräfte $\mathfrak{k}_1$ und $\mathfrak{k}_2$ an dem Punkte angreifend denken, in dem sich ihre Richtungen schneiden (Abb. 12), also die Angriffspunkte in der Konstruktion bis zu diesem Schnittpunkt verschieben, und nunmehr die Resultierende $\mathfrak{R}$ dieser beiden Kräfte in bekannter Weise konstruieren. Wirken noch weitere Kräfte in der gleichen Ebene, so kann man diese nacheinander in der gleichen Weise zu der ersten Resultierenden addieren, und man findet auf diese Weise die Resultierende sämtlicher Kräfte.

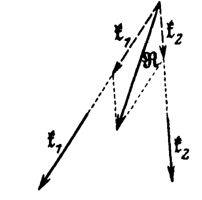


Abb. 12. Resultierende von Kräften, die nicht im gleichen Punkte angreifen.

Zur Vermeidung von Mißverständnissen sei ausdrücklich betont, daß nur die *augenblickliche* Wirkung einer Kraft durch eine Verschiebung des Angriffspunktes in ihrer Wirkungslinie nicht geändert wird. Der weitere Verlauf der Bewegung, für die außer der Größe und Richtung der äußeren Kraft u. a. auch noch die Wirkung des Trägheitswiderstandes maßgebend ist, hängt von der Lage des Angriffspunktes durchaus ab. Wirkt z. B. auf einen Körper eine an einem Punkt seiner Oberfläche angreifende Kraft in einer im Raume festen Richtung, so wird er im allgemeinen unter der Wirkung dieser Kraft und des ihr entgegengesetzt gerichteten Trägheitswiderstandes Drehungen im Raume ausführen, deren Art entscheidend davon abhängt, ob die äußere Kraft etwa an der Vorder- oder der Rückseite des Körpers angreift.

Als an sich selbstverständlichen wichtigen Spezialfall findet man, daß zwei gleich große, entgegengesetzt gerichtete und auf der gleichen Geraden liegende Kräfte sich gegenseitig aufheben (Tauziehen zweier gleich starker Gruppen). Ferner findet man, daß die Resultierende zweier gleichgerichteter, in derselben Geraden liegender Kräfte gleich ihrer algebraischen Summe ist.

Die Parallelogrammkonstruktion gelingt in der angegebenen Weise zunächst nicht, wenn es sich um zwei parallele, gleich oder entgegengesetzt gerichtete Kräfte handelt, da sie durch Verschieben in ihrer Richtung nie zum Schnitt zu bringen sind. In diesem Falle kann man sich durch einen Kunstgriff helfen. Man verbinde (Abb. 13 a) die Angriffspunkte der beiden Kräfte durch eine Gerade und füge in der Konstruktion in den Angriffspunkten zwei beliebige in dieser Geraden liegende, gleich große, entgegengesetzt gerichtete Kräfte $\mathfrak{k}_3$ und $\mathfrak{k}_4$ hinzu. Diese Kräfte bleiben unwirksam, da sie sich gegenseitig aufheben. Die Wirkung der vier Kräfte ist also die gleiche, wie die der ursprünglichen beiden Kräfte $\mathfrak{k}_1$ und $\mathfrak{k}_2$. Nunmehr konstruieren wir die Resultierenden $\mathfrak{R}_1$ von $\mathfrak{k}_1$ und $\mathfrak{k}_3$ und $\mathfrak{R}_2$ von $\mathfrak{k}_2$ und $\mathfrak{k}_4$. Diese sind (außer in dem später zu behandelnden Falle, daß $\mathfrak{k}_1$ und $\mathfrak{k}_2$ gleich groß und entgegengesetzt gerichtet sind, § 31) nicht mehr parallel, man kann daher ihre Resultierende $\mathfrak{R}$ in der bereits bekannten Weise finden und hat damit auch die Resultierende der ursprünglichen Kräfte $\mathfrak{k}_1$ und $\mathfrak{k}_2$ gefunden.

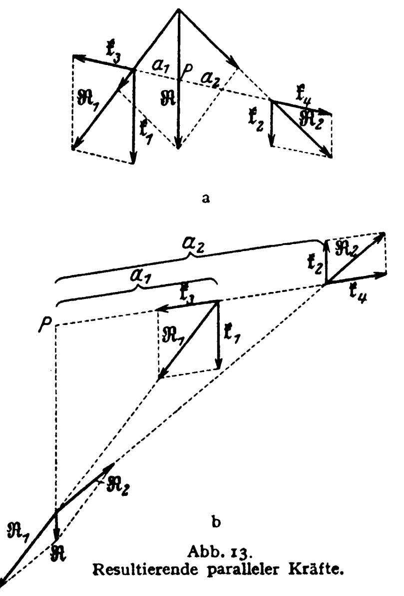


Abb. 13.
Resultierende paralleler Kräfte.

Eine einfache Berechnung ergibt, daß der absolute Betrag R der Resultierenden $\mathfrak{R}$ — die natürlich in der gleichen Ebene liegt, wie die ursprünglich gegebenen Kräfte — bei parallelen, gleichgerichteten Kräften gleich der algebraischen Summe dieser Kräfte und ihnen parallel und gleichgerichtet ist, und daß ihre Richtung die Verbindungslinie der Angriffspunkte in einem zwischen diesen gelegenen Punkte P, dem sog. Mittelpunkt der beiden genannten Kräfte, schneidet, dessen Entfernungen a_1 und a_2 von den Angriffspunkten sich umgekehrt verhalten, wie die absoluten Beträge k_1 und k_2 der betreffenden Kräfte.

$$a_1 : a_2 = k_2 : k_1 \quad \text{oder} \quad a_1 k_1 = a_2 k_2 . \tag{5}$$

Sind die beiden ursprünglichen Kräfte parallel und entgegengesetzt gerichtet (Abb. 13b), so ist der absolute Betrag R der Resultierenden gleich der algebraischen Differenz der absoluten Beträge der beiden Kräfte, sie ist ihnen parallel und der größeren von ihnen geichgerichtet. Ihre Richtung schneidet die Verlängerung der Angriffspunkte in einem jenseits des Angriffspunktes der größeren Kraft gelegenen Punkte P, dessen Entfernungen a_1 und a_2 von den Angriffspunkten sich wieder umgekehrt verhalten wie die betreffenden Kräfte (Gl. 5).

Liegen zwei auf einen Körper wirkende Kräfte nicht in einer Ebene, so kann man keinen gemeinsamen Angriffspunkt für sie finden. Es läßt sich nachweisen, daß man die beiden Kräfte in diesem Falle stets auf eine Einzelkraft

und ein Paar von zwei gleich großen, entgegengesetzt gerichteten, parallelen Kräften (Kräftepaar, § 31) zurückführen kann.

28. Einige Versuche über die Zusammensetzung von Kräften. Zur Nachprüfung der vorstehend ausgesprochenen Gesetzmäßigkeiten benutzen wir zweckmäßig diejenigen Kräfte, die uns die Schwerkraft durch das Gewicht der Körper zur Verfügung stellt. Wir könnten uns dazu auch beliebiger anderer Kräfte (gespannte Federn, elektrische oder magnetische Kräfte) bedienen. Die Schwerkraft ist nur am bequemsten zu handhaben und am leichtesten verfügbar und meßbar.

Wir bringen an einem Gestell zwei feste Rollen (§ 72) an, über die ein Faden läuft (Abb. 14). Zwischen den Rollen ist an diesem ein zweiter Faden befestigt. An die drei freien Enden der Fäden hängen wir Massen, die infolge ihres Gewichtes die Kräfte $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{k}_2$ und $\mathfrak{k}_3$ ausüben. Es zeigt sich dann, daß die Fäden und Gewichte in einer ganz bestimmten Stellung zur Ruhe kommen. Den Knoten, in dem die drei Fäden zusammentreffen, können wir als einen Massenpunkt von sehr geringer Masse (so daß die Wirkung seiner eigenen Schwere vernachlässigt werden kann) ansehen. Auf diesen Körper wirkt nach links oben die Kraft $\mathfrak{k}_1$, nach rechts oben die Kraft $\mathfrak{k}_2$, senkrecht nach unten die Kraft $\mathfrak{k}_3$. Befindet sich der Massenpunkt m in Ruhe, so beweist dies, daß die Resultierende aller auf ihn wirkenden Kräfte gleich Null ist. Das ist dann der Fall, wenn die Resultierende je zweier der drei Kräfte gleich groß und entgegengesetzt gerichtet ist wie die dritte Kraft, und mit ihr in einer Geraden liegt.

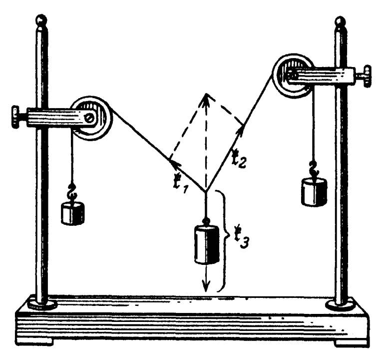


Abb. 14. Parallelogramm der Kräfte.

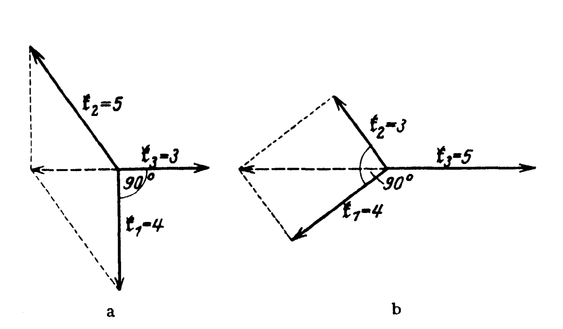


Abb. 15. Parallelogramm der Kräfte.

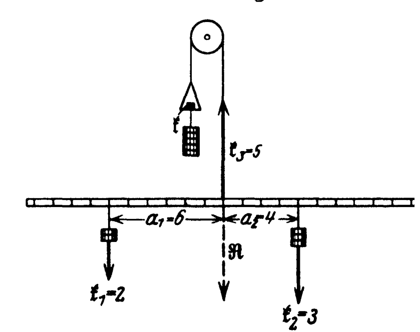


Abb. 16. Resultierende paralleler Kräfte.

Abb. 15a und b zeigen dies für den Fall, daß die Kräfte im Verhältnis 3:4:5 stehen, und zwar in zwei verschiedenen Anordnungen. In diesem besonderen Falle bilden die beiden kleineren Kräfte stets einen Winkel von 90^0.

Man befestige einen über eine feste Rolle laufenden Faden in der Mitte einer leichten, aber möglichst wenig biegsamen Stange von etwa 50 cm Länge und gleiche deren Gewicht $\mathfrak{k}$ durch ein an das andere Fadenende gehängtes Gegengewicht genau aus (Abb. 16). Nunmehr befestige man sowohl am freien Fadenende als auch rechts und links des Fadens an der Stange drei Massen, deren Gewichte sich wie $k_1 : k_2 : k_3$ verhalten. Man findet, daß die Einrichtung nur dann in Ruhe bleibt, wenn

1. $k_3 = k_1 + k_2$, 2. $a_1 : a_2 = k_2 : k_1$ ist.

Hierdurch ist die Richtigkeit der in § 27 beschriebenen Konstruktion bewiesen, denn der Ruhezustand zeigt, daß die Resultierende aller drei Kräfte gleich Null ist. Das ist dann der Fall, wenn die Resultierende $\mathfrak{R}$ der Kräfte $\mathfrak{k}_1$ und $\mathfrak{k}_2$ der Kraft $\mathfrak{k}_3$, welche senkrecht nach oben wirkt, entgegen gerichtet ist, mit ihr in einer Geraden liegt und und vom gleichen Betrage wie $\mathfrak{k}_3$ ist. Wie man aus Abb. 16 erkennt, trifft dies zu. Man kann aber ebensogut etwa $\mathfrak{k}_2$ als diejenige Kraft betrachten, welche die Wirkung der Resultierenden von $\mathfrak{k}_1$ und $\mathfrak{k}_3$ aufhebt. Diese Resultierende wäre in Abb. 16 so zu zeichnen, daß sie im gleichen Punkte wie $\mathfrak{k}_2$, aber senkrecht nach oben gerichtet, angreift, und daß ihr absoluter Betrag gleich k_2 $(= k_3 - k_1)$ ist.

In sehr einfacher Weise kann man die Zusammensetzung paralleler Kräfte auch auf folgende Weise zeigen. Man lege ein leichtes Brett auf zwei Briefwagen, so daß sein Gewicht sich auf beide Wagen gleichmäßig verteilt. Sodann belaste man das Brett mit einem Gewicht. Die Briefwagen zeigen dann im allgemeinen einen verschiedenen Ausschlag, und zwar immer diejenige den größeren, der das Gewicht nähergelegen ist. Die Summe der Ausschläge der Briefwagen, natürlich abzüglich der vom Gewicht des Brettes herrührenden Ausschläge, ist aber stets gleich dem aufgelegten Gewicht. Die Ausschläge verhalten sich umgekehrt wie die Abstände des aufgelegten Gewichtes von den beiden Wagen.

29. Wirkung und Gegenwirkung (3. **NEWTONsches Axiom**). **Zwangskräfte.** Das dritte Axiom, das NEWTON der Mechanik zugrunde gelegt hat, lautet: „Die von zwei Körpern aufeinander ausgeübten Kräfte sind stets gleich groß und einander entgegengesetzt gerichtet.“ Oder: Wirkung (actio) und Gegenwirkung (reactio) sind einander ihrem Betrage nach gleich und entgegengesetzt gerichtet. In den uns zunächst interessierenden Fällen fällt außerdem die Richtung der Kräfte in die Verbindungslinie der beiden aufeinander wirkenden Körper. Jedoch ist dies keineswegs allgemein der Fall (§ 305).

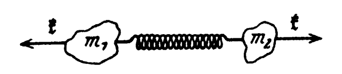


Abb. 17. Wirkung und Gegenwirkung bei zwei durch eine zusammengedrückte Feder verbundenen Massen.

Als ein einfaches Beispiel betrachten wir zwei Massen m_1 und m_2, die durch eine Feder auseinandergedrückt werden (Abb. 17). Die Kraft, mit der die Masse m_1 nach links gedrückt wird, ist ebenso groß wie diejenige, mit der die Masse m_2 nach rechts gedrückt wird. Wegen der entgegengesetzten Richtung der beiden Kräfte haben sie auch entgegengesetztes Vorzeichen. Die Beschleunigungen, die die beiden Massen durch die gleich großen, aber entgegengesetzt gerichteten Kräfte erfahren, hängen natürlich gemäß dem 2. NEWTONschen Axiom von ihren Massen ab.

Es gibt demnach — wenigstens in der reinen Mechanik — keine einseitig von einem Körper auf einen anderen wirkende Kraft, der nicht eine gleich große und entgegengesetzte, von dem zweiten Körper auf den ersten wirkende Kraft entspräche. Ist eine einzige solche Kraft primär gegeben, so ruft sie stets das Auftreten der entsprechenden Gegenkraft hervor. Ruht z. B. eine Masse auf einer ebenen Fläche, so übt sie infolge ihrer Schwere auf diese eine Kraft aus, und diese Kraft führt zu einer elastischen Formänderung der Fläche, die die entsprechende Gegenkraft liefert. Hängt eine Masse an einem Faden, so wird dieser gespannt und liefert wieder eine elastische Gegenkraft. Wir wollen Kräfte dieser Art, die sekundär durch eine primär wirkende Kraft als deren Gegenwirkung erzeugt werden, als Zwangskräfte $\mathfrak{k}_z$ (absoluter Betrag k_z) bezeichnen.

30. Gleichgewicht. Befindet sich ein Körper in Ruhe oder in gleichförmiger geradliniger Bewegung, so kann man nicht durch Umkehrung des Träg-

heitssatzes schließen, daß auf ihn keine Kraft wirkt. Man kann nur den Schluß ziehen, daß sich jedenfalls alle auf ihn wirkenden Kräfte gegenseitig aufheben, ihre Resultierende also den Wert Null hat. Tatsächlich ist z. B. kein auf der Erde befindlicher Körper, auch wenn er sich in Ruhe befindet, frei von Kräften, denn auf alle wirkt die Schwerkraft. Man bezeichnet den Zustand eines Körpers, bei dem die auf ihn wirkenden Kräfte sich gegenseitig aufheben, als Gleichgewicht, insbesondere dann, wenn sich der Körper in Ruhe befindet.

Ein Körper kann unter der Wirkung von zwei Kräften nur dann im Gleichgewicht sein, wenn diese beiden Kräfte gleich groß und entgegengesetzt gerichtet sind und in der gleichen Geraden liegen. Wirken auf einen Körper zwei Kräfte, welche diese Bedingungen nicht erfüllen, so ist zur Herstellung des Gleichgewichtes das Hinzutreten mindestens einer dritten Kraft erforderlich, welche zusammen mit der Resultierenden der beiden ersten Kräfte die vorstehend genannten Bedingungen erfüllt. Es befindet sich ein Körper unter der Wirkung beliebig vieler Kräfte im Gleichgewicht, wenn die Resultierende aller dieser Kräfte den Wert Null hat.

31. **Kräftepaar, Drehmoment.** Wir haben in § 27 noch den Spezialfall beiseite gelassen, daß auf einen Körper zwei Kräfte wirken, welche gleich groß und entgegengesetzt gerichtet sind, aber nicht in der gleichen Geraden liegen. Für solche Kräfte gibt es keine Resultierende. Tatsächlich ist auch die Wirkung eines solchen sog. Kräftepaares von der Wirkung aller anderen Kräftekonfigurationen grundsätzlich verschieden. Es bewirkt nämlich keine Beschleunigung des Körpers in einer bestimmten Richtung, sondern eine Drehung des Körpers, d. h. eine Änderung seiner Winkelgeschwindigkeit, eine Winkelbeschleunigung (§ 20).

Man bezeichnet das Produkt aus der Größe der Kräfte $\mathfrak{k}$ und ihrem senkrechten Abstand a (Abb. 18a) als das Drehmoment oder statische Moment der Kräfte $\mathfrak{k}$. Sein Betrag ist

$$N = k a \text{ dyn} \cdot \text{cm}, \tag{6}$$

wenn k der Betrag der Kräfte $\mathfrak{k}$ ist.

Ist ein Körper an einer festen Achse befestigt und wirkt auf ihn von außen her eine Kraft $\mathfrak{k}$ in einer zur Achse A senkrechten Ebene, so tritt stets von selbst in der Achse eine Zwangskraft $\mathfrak{k}_z$ auf, welche der Kraft $\mathfrak{k}$ dem Betrage nach gleich, aber ihr entgegen gerichtet ist (Abb. 18b). Eine einzelne, von außen auf einen um eine feste Achse oder einen Punkt drehbaren Körper wirkende Kraft hat also infolge der durch sie hervorgerufenen Zwangskraft stets das Auftreten eines Kräftepaares und damit eines Drehmoments $\mathfrak{k} a$ zur Folge, wenn a den senkrechten Abstand der Kraft $\mathfrak{k}$ von der Achse bedeutet.

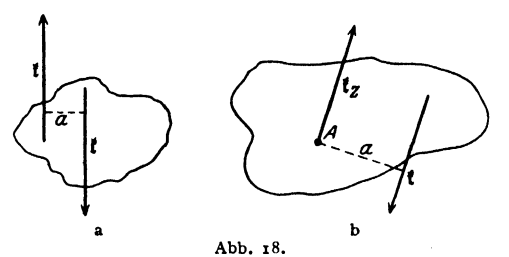


Abb. 18.
a) Kräftepaar, b) Drehmoment, hervorgerufen durch eine in einer festen Achse auftretende Zwangskraft.

Man kann ein Drehmoment durch einen Vektorpfeil darstellen, dessen Länge gleich der Größe des Drehmoments oder ihr proportional ist, der auf der Ebene, welche durch die beiden das Drehmoment hervorrufenden Kräfte gebildet wird, senkrecht steht und dessen Spitze nach derjenigen Richtung zeigt, in der sich eine rechtsgängige Schraube vorwärtsbewegen würde, wenn man sie im Sinne des Drehmoments dreht (vgl. die ganz analoge Festsetzung § 20).

Die Addition von Drehmomenten erfolgt durch Addition ihrer Vektorpfeile gemäß § 11.

Ein Körper befindet sich unter der Wirkung mehrerer Kräftepaare im Gleichgewicht, wenn die Vektorsumme ihrer Drehmomente den Wert Null hat. Wirken z. B. auf einen Körper zwei Drehmomente, so besteht Gleichgewicht nur dann, wenn die beiden Drehmomente gleiche Größe und entgegengesetzten Drehungssinn haben.

32. **Der Hebel.** Unter einem Hebel versteht man jeden um eine Achse oder einen Punkt drehbaren Körper, auf den mehrere — meistens und mindestens drei — Kräfte wirken, von denen die eine eine im Drehpunkt wirkende Zwangskraft ist. Die Achse oder der Punkt, um den sich der Körper dreht, kann eine feste Achse oder ein fester Punkt sein, der bei einer Lagenänderung des Körpers seinen Ort im Körper nicht ändert. Es ist dies aber nicht nötig. Es ist z. B. nicht der Fall beim Brecheisen (Abb. 19), das ein Hebel ist. Auf das Brecheisen wirkt in *A* die von außen angreifende Kraft, z. B. eines menschlichen Armes, bei *B* und *C* greifen die Gegenkräfte an, die durch das Brecheisen überwunden werden sollen.

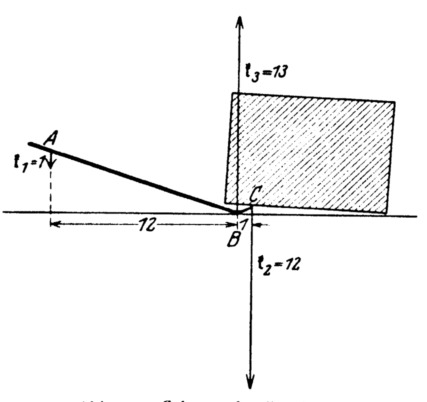


Abb. 19. Schema des Brecheisens.

Als einfachsten idealisierten Fall eines Hebels denken wir uns einen um eine feste Achse drehbaren Körper (Abb. 20a). Wir lassen an diesem Körper von außen, etwa durch Federn, zwei Kräfte $\mathfrak{k}_1$ und $\mathfrak{k}_2$ wirken. Diese bewirken nach § 30 das Auftreten einer Zwangskraft $\mathfrak{k}_z$ in

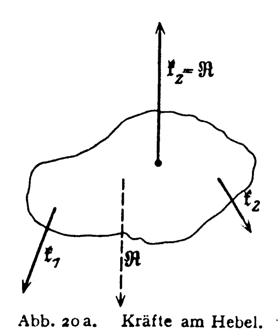


Abb. 20a. Kräfte am Hebel.

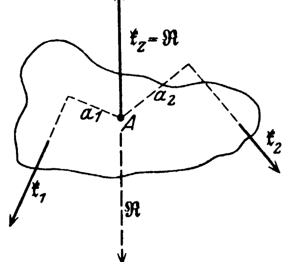


Abb. 20b. Hebel im Gleichgewicht.

der Achse, welche vom gleichen Betrage wie die Resultierenden $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{k}_1$ und $\mathfrak{k}_2$ ist und in der ihr entgegengesetzten Richtung wirkt, im allgemeinen aber nicht auf der gleichen Geraden liegt. Sie bildet daher mit $\mathfrak{R}$ ein Kräftepaar, welches den Körper zu drehen sucht.

Ein solcher Hebel ist nur dann im Gleichgewicht, d. h. er gerät nicht in Drehung, wenn kein solches Kräftepaar auftritt. Das ist dann der Fall, wenn die in der Achse wirkende Zwangskraft mit der Resultierenden der von außen angreifenden Kräfte auch in der gleichen Geraden liegt (Abb. 20b). In diesem Falle wirkt auf den Hebel kein Drehmoment, die Drehmomente der beiden Kräfte $\mathfrak{k}_1$ und $\mathfrak{k}_2$ sind gleich groß und entgegengesetzt gerichtet. Es ist also

$$\mathfrak{k}_1 a_1 = -\mathfrak{k}_2 a_2, \quad \text{oder} \quad \mathfrak{k}_1 a_1 + \mathfrak{k}_2 a_2 = 0, \tag{7}$$

wenn a_1 und a_2 die senkrechten Abstände der Achse von den Kräften $\mathfrak{k}_1$ und $\mathfrak{k}_2$ — die man auch die „Arme" dieser Kräfte nennt — sind. Ein Hebel ist im Gleichgewicht, wenn die Summe der auf ihn wirkenden Drehmomente gleich Null ist. In dieser Form gilt das Hebelgesetz allgemein, auch wenn mehr als zwei äußere, in der gleichen Ebene liegende Kräfte — außer der Zwangskraft in der Drehachse — auf ihn wirken, also $\sum \mathfrak{k}_i a_i = 0$.

Weiteres über Hebel s. § 71ff.

33. **Der Satz von der Erhaltung der Bewegungsgröße (Impulssatz).** Aus dem 3. NEWTONschen Axiom läßt sich ein fundamentaler Satz ableiten. Zwischen zwei Körpern von den Massen m_1 und m_2 wirke eine Kraft $\mathfrak{k}$ (Abb. 17). Dann ist nach dem 3. Axiom

$$\mathfrak{k} = m_1 \mathfrak{g}_1 = -m_2 \mathfrak{g}_2 \tag{8}$$

(die rechte Seite muß negatives Vorzeichen bekommen, weil die beiden Vektoren $m_1\mathfrak{g}_1$ und $m_2\mathfrak{g}_2$ entgegengesetzte Richtung haben). Es ist also

$$m_1 \mathfrak{g}_1 + m_2 \mathfrak{g}_2 = 0. \tag{9}$$

Statt dessen können wir aber nach § 19 auch schreiben

$$m_1 \frac{d\mathfrak{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\mathfrak{v}_2}{dt} = \frac{d}{dt}(m_1 \mathfrak{v}_1 + m_2 \mathfrak{v}_2) = 0. \tag{10}$$

Gl. 9 besagt, daß der zeitliche Differentialquotient des Vektors $m_1\mathfrak{v}_1 + m_2\mathfrak{v}_2$ gleich Null, dieser Vektor also zeitlich konstant ist. Der Vektor stellt aber nach § 25 die Summe der Bewegungsgrößen der beiden Massen m_1 und m_2 dar. Haben wir es mit mehr als zwei Massen zu tun, so gilt für die Summe ihrer Bewegungsgrößen das gleiche,

$$\frac{d}{dt} \sum m_i \mathfrak{v}_i = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \sum m_i \mathfrak{v}_i = \text{const.} \tag{11}$$

m_i und $\mathfrak{v}_i$ sind die Massen und Geschwindigkeitsvektoren der beteiligten Einzelmassen. Voraussetzung für die Gültigkeit der Gl. 9, 10 und 11 ist, daß in dem Massensystem nur innere Kräfte wirksam sind. Als innere Kräfte bezeichnet man solche, die nur zwischen den Massen des Systems wirken, also nicht von Körpern außerhalb des Systems herrühren.

Wir können die Bewegungsgrößen in ihre drei Komponenten in den Koordinatenrichtungen zerlegen. Dann gilt das Vorstehende auch für diese Komponenten einzeln,

$$\sum m_i \mathfrak{v}_{i_x} = \text{const}, \quad \sum m_i \mathfrak{v}_{i_y} = \text{const}, \quad \sum m_i \mathfrak{v}_{i_z} = \text{const.} \tag{12}$$

Man nennt diesen Satz den Satz von der Erhaltung der Bewegungsgröße oder den Impulssatz. Er besagt, daß die Summe der Bewegungsgrößen zweier oder auch mehrerer Körper sich unter der Wirkung von inneren Kräften nicht ändert. Man kann den Satz von der Erhaltung der Bewegungsgröße auch dahin aussprechen, daß die Summe der in der Welt vorhandenen Bewegungsgröße konstant ist, also weder vermehrt noch vermindert werden kann. Dieser Satz bildet also einen der fundamentalen sog. Erhaltungssätze der Physik.

Beispiele für den Satz von der Erhaltung der Bewegungsgröße sind im täglichen Leben außerordentlich zahlreich. Bewegt man sich in einem leichtbeweglichen Wagen oder Boot nach vorwärts, so bewegt sich Wagen oder Boot nach entgegengesetzter Richtung (Abb. 21). Streckt man eine in beiden Händen gehaltene schwere Last (Eisenstange, Hanteln) plötzlich nach vorn, so bewegen sich dafür andere Teile des Körpers ein wenig rückwärts.

Ein Beispiel ist der sog. Rückstoß beim Abschuß von Gewehren und Kanonen. Zwischen Geschoß und Geschütz wirkt, solange sich jenes noch im Rohr befindet, als innere Kraft der Druck der Pulvergase. Durch diese wird nicht nur das Geschoß nach vorn, sondern auch das Geschütz nach hinten getrieben. Ist die Masse des Geschosses z. B. tausendmal kleiner als die des Geschützes, so ist die Geschwindigkeit, mit der das Geschütz zurückläuft, tausendmal kleiner als die Geschoßgeschwindigkeit. Die Raketen werden durch den Rückstoß der mit sehr hoher Geschwindigkeit ausgetriebenen Verbrennungsgase angetrieben.

Man versehe ein an einem Ende verschlossenes, 2—3 cm weites und etwa 20 cm langes Metallrohr mit zwei seitlich eingeführten, isolierten Drähten, zwischen denen man den Funken eines Induktors überspringen lassen kann Es ist zweckmäßig, das Rohr entweder wie eine Kanone auf Rädern zu montieren oder an zwei langen Schnüren aufzuhängen. Man fülle das Rohr mit einem Gemisch aus Leuchtgas und Luft, indem man es über die Öffnung eines Bunsenbrenners mit guter Luftzufuhr hält, und schließe es dann einmal mit einem gut schließenden gewöhnlichen Korken, dann mit einem solchen, der mit Blei oder dergleichen belastet ist. Bringt man das Gasgemisch durch einen elektrischen Funken zur Explosion, so fliegt der Kork hinaus. Gleichzeitig bewegt sich das Rohr zurück. Der Rückstoß ist um so heftiger, je größer die Masse des Geschosses ist. Das Geschoß fliegt um so schneller und daher um so weiter fort, je kleiner seine Masse ist.

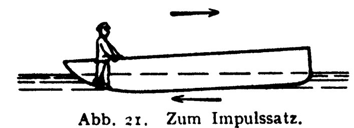


Abb. 21. Zum Impulssatz.

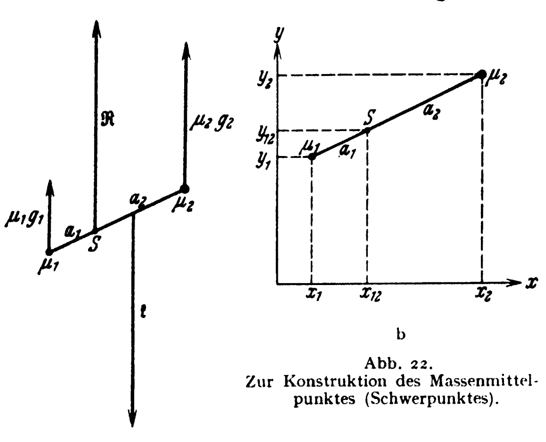


Abb. 22. Zur Konstruktion des Massenmittelpunktes (Schwerpunktes).

34. **Der Massenmittelpunkt oder Schwerpunkt.** Erfährt ein frei beweglicher Körper durch die Kraft $\mathfrak{f}$ eine Beschleunigung $\mathfrak{g}$, so treten an seinen einzelnen Massenpunkten μ nach § 26 Trägheitskräfte von der Größe $\mu\mathfrak{g}$ auf. Diese sind unter sich parallel, nämlich der eintretenden Beschleunigung entgegengerichtet, und die Summe der einzelnen Trägheitskräfte ist der beschleunigenden Kraft gleich, $\mu_1\mathfrak{g} + \mu_2\mathfrak{g} + \ldots = \mathfrak{f}$. Genau wie jede andere Art von Kräften kann man auch die Trägheitskräfte zu einer Resultierenden vereinigen. Wir betrachten zunächst einen Körper, der nur aus zwei starr miteinander verbundenen Massenpunkten μ_1 und μ_2 besteht (Abb. 22a). An diesem Körper greife eine Kraft $\mathfrak{f}$ an, durch die der Körper, also die beiden Massenpunkte, im ersten Augenblick eine Beschleunigung $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_2$ erhält. Nach § 27 teilt die Resultierende $\mathfrak{R}$ der Trägheitskräfte die Verbindungslinie der beiden Massen im umgekehrten Verhältnis der beiden Kräfte, es ist also $a_1 : a_2 = \mu_2\mathfrak{g} : \mu_1\mathfrak{g} = \mu_2 : \mu_1$. Da die Resultierende gleich der angreifenden Kraft $\mathfrak{f}$ und ihr entgegengerichtet ist, so bildet sie im allgemeinen mit ihr ein Kräftepaar (Abb. 22a), und die Folge ist, daß der Körper keine reine Beschleunigung in der Richtung von $\mathfrak{f}$ erfährt, sondern dazu noch eine Winkelbeschleunigung. Er wird in Drehung versetzt. Eine reine Beschleunigung ohne Drehung erfolgt nur dann, wenn die angreifende Kraft $\mathfrak{f}$ mit der Resultierenden der Trägheitskräfte in der gleichen Geraden liegt, also die Verbindungslinie der beiden Massenpunkte ebenfalls im Verhältnis

$a_1 : a_2 = \mu_2 : \mu_1$ teilt. Das gilt für jede beliebige Richtung und Größe der angreifenden Kraft $\mathfrak{k}$, und daher ist der Punkt S (Abb. 22b) im Körper dadurch ausgezeichnet, daß eine Einzelkraft nur dann eine reine, drehungsfreie Beschleunigung des Körpers hervorruft, wenn ihre Richtung durch S hindurchgeht. (In welchem Punkt der so definierten Geraden sie angreift, ist nach § 27 ohne Belang und hat nur Einfluß auf die Stabilität der Bewegung.)

Der Punkt S ist der Schnittpunkt aller Resultierenden der an dem Körper auftretenden Trägheitskräfte, wenn wir ihm reine Beschleunigungen in allen möglichen Richtungen erteilt denken. Man nennt ihn daher den Massenmittelpunkt des Körpers. Noch gebräuchlicher ist der Name Schwerpunkt (vgl. § 59). Man kann sich bezüglich aller Trägheitswirkungen die Masse des Körpers in ihm vereinigt denken.

Der betrachtete Körper liege in der xy-Ebene eines rechtwinkligen Koordinatensystems. Die Koordinaten der beiden Massenpunkte seien x_1, y_1, x_2, y_2, die des Schwerpunktes x_{12} und y_{12}. Dann liest man aus Abb. 22b leicht ab, daß

$$(x_{12} - x_1) : (x_2 - x_{12}) = a_1 : a_2 = \mu_1 : \mu_2, \quad (y_{12} - y_1) : (y_2 - y_{12}) = a_1 : a_2 = \mu_1 : \mu_2.$$

Bei beliebiger Orientierung in einem dreidimensionalen Koordinatensystem kommt noch eine entsprechende Gleichung für die z-Richtung hinzu: $(z_{12} - z_1) : (z_2 - z_{12}) = \mu_2 : \mu_1$. Hieraus folgt durch einfache Rechnung

$$x_{12} = \frac{\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2}{\mu_1 + \mu_2}, \qquad y_{12} = \frac{\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2}{\mu_1 + \mu_2}, \qquad z_{12} = \frac{\mu_1 z_1 + \mu_2 z_2}{\mu_1 + \mu_2}.$$

Ist nun mit diesen beiden Massen noch eine dritte μ_3 starr verbunden, so können wir den entsprechenden Punkt durch Fortsetzung dieses Verfahrens finden. Es ergibt sich dann die Lage des Schwerpunktes der drei Massen zu

$$x_s = \frac{(\mu_1 + \mu_2)\, x_{12} + \mu_3 x_3}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3} = \frac{\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3},$$
$$y_s = \frac{\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \mu_3 y_3}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}, \qquad z_s = \frac{\mu_1 z_1 + \mu_2 z_2 + \mu_3 z_3}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}.$$

In entsprechender Weise ergibt sich für eine beliebige Zahl von miteinander verbundenen Massen μ_i die Lage des Schwerpunktes allgemein durch die nachfolgenden Gleichungen

$$x_s = \frac{\Sigma \mu_i x_i}{m}, \qquad y_s = \frac{\Sigma \mu_i y_i}{m}, \qquad z_s = \frac{\Sigma \mu_i z_i}{m}. \tag{13a}$$

Hierin bedeutet $m = \Sigma \mu_i$ die Gesamtmasse der miteinander verbundenen Einzelmassen. Legen wir den Nullpunkt unseres Koordinatensystems in den Schwerpunkt selbst ($x_s = y_s = z_s = 0$), so gilt demnach

$$\Sigma \mu_i x_i = \Sigma \mu_i y_i = \Sigma \mu_i z_i = 0. \tag{14a}$$

Handelt es sich um einen ausgedehnten Körper von der Masse m, dessen einzelne Massenelemente μ_i wir mit dm bezeichnen wollen, so können wir die Gl. 13a und 14a auch in Integralform schreiben,

$$x_s = \frac{1}{m} \int x\, dm, \qquad y_s = \frac{1}{m} \int y\, dm, \qquad z_s = \frac{1}{m} \int z\, dm \tag{13b}$$

bzw.

$$\int x\, dm = \int y\, dm = \int z\, dm = 0. \tag{14b}$$

Auch wenn Körper nicht fest miteinander verbunden sind, nennt man den durch Gl. 13a oder b definierten Punkt im Raume ihren gemeinsamen Schwerpunkt (z. B. der gemeinsame Schwerpunkt des Sonnensystems, von Erde und Mond usw.).

Bei homogenen, d. h. gleichmäßig mit Masse erfüllten Körpern von einfachen geometrischen Formen läßt sich die Lage des Schwerpunktes leicht berechnen. Bei einer homogenen Voll- oder Hohlkugel ist es der Mittelpunkt, bei einer homogenen Kiste (Parallelepiped) der Schnittpunkt der Raumdiagonalen.

35. **Der Satz von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes.** Mehrere nicht starr miteinander verbundene Massen m_i, zwischen denen keine oder nur innere Kräfte (§ 33) wirken, d. h. anziehende oder abstoßende Kräfte zwischen diesen Massen selbst, sollen sich frei im Raum bewegen. Der gemeinsame Schwerpunkt dieser Massen ändert dabei in der Regel auch seinen Ort im Raume, seine Lage ist aber, wenn die Orte der einzelnen Massen durch Angabe ihrer Koordinaten $x_i\ y_i\ z_i$ gegeben sind, für jeden Augenblick aus Gl. 13a oder b zu berechnen. Man erhält die Geschwindigkeit, mit der sich die Lage des Schwerpunktes in den drei Koordinatenrichtungen ändert, indem man Gl. 13a nach der Zeit t differenziert

$$v_x = \frac{d x_s}{d t} = \frac{\Sigma m_i \frac{d x_i}{d t}}{m}, \quad v_y = \frac{d y_s}{d t} = \frac{\Sigma m_i \frac{d y_i}{d t}}{m}, \quad v_z = \frac{d z_s}{d t} = \frac{\Sigma m_i \frac{d z_i}{d t}}{m}, \tag{15}$$

($m = \Sigma m_i$). Nun stellen aber die Zähler dieser drei Ausdrücke die Summen der Bewegungsgrößen der Einzelmassen in den drei Koordinatenrichtungen dar, und diese sind nach § 33 konstant, da nur innere Kräfte wirken. Demnach sind die drei Geschwindigkeitskomponenten des Schwerpunktes und seine Geschwindigkeit überhaupt konstant, ganz unabhängig davon, ob sich die Geschwindigkeiten der Einzelmassen infolge der zwischen ihnen wirkenden Kräfte noch so sehr ändern. Wirkt auf alle Einzelmassen außerdem noch eine äußere beschleunigende Kraft, z. B. die Schwere, so führt der Schwerpunkt eine Bewegung aus, die derjenigen gleich ist, die eintreten würde, wenn die gesamten Einzelmassen im Schwerpunkt vereinigt wären.

Wie man aus der Art der Ableitung erkennt, ist dieser sog. Satz von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes nur eine andere Form des Satzes von der Erhaltung der Bewegungsgröße (§ 35), also letzten Endes des dritten NEWTONschen Axioms.

Ein einfaches Beispiel für den Schwerpunktssatz zeigte bereits Abb. 21. Ein weiteres Beispiel ist das im Fluge platzende Schrapnell. Solange das Schrapnell noch nicht geplatzt ist, liegt sein Schwerpunkt in seinem Innern und beschreibt eine parabolische Bahn (bzw. ballistische Kurve, § 57). Beim Zerplatzen werden die einzelnen Bruchstücke des Schrapnells durch innere Kräfte auseinander getrieben, der gemeinsame Schwerpunkt der Teile aber bewegt sich so fort, als sei das Geschoß unversehrt geblieben (allerdings mit der Einschränkung, daß die Luftreibung — eine äußere Kraft — auf die Bruchstücke anders, und zwar stärker, einwirkt als auf das Geschoß, so daß die ballistische Kurve, die der Schwerpunkt nach dem Zerplatzen beschreibt, stärker nach unten gekrümmt ist, als es bei dem ganzen Geschoß der Fall gewesen wäre).

36. **Trägheitsmoment.** Ein Massenpunkt m sei um eine feste Achse drehbar. Sein senkrechter Abstand von der Achse sei r. Auf m wirke in einer zur Achse und zu r senkrechten Ebene eine Kraft vom Betrage k, die ihm eine Beschleunigung dv/dt erteilt. Der Massenpunkt bewegt sich dann beschleunigt auf einem Kreise. Seine jeweilige Winkelgeschwindigkeit sei ω, also seine Bahngeschwindigkeit $v = r\omega$, so daß $k = mr\, d\omega/dt$. Der Kraft k entspricht ein Drehmoment vom Betrage $N = kr$. Demnach ist

$$N = mr^2 \frac{d\omega}{dt} = J \frac{d\omega}{dt} = J \frac{d^2\omega}{dt^2} \text{ dyn} \cdot \text{cm} \quad \text{oder} \quad \text{g} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{sec}^{-2}. \tag{16}$$

Die durch die vorstehende Gleichung definierte Größe

$$J = mr^2 \text{ g}\cdot\text{cm}^2 \tag{17}$$

heißt das **Trägheitsmoment** des Massenpunktes m bezüglich der im senkrechten Abstand r befindlichen Achse (EULER 1758).

Handelt es sich um einen ausgedehnten, also aus vielen Massenpunkten bestehenden Körper, so ist sein Trägheitsmoment gleich der Summe der Trägheitsmomente seiner Teile, also

$$J = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \cdots = \Sigma m_i r_i^2 \text{ g}\cdot\text{cm}^2$$

oder in Integralform

$$J = \int r^2 dm \text{ g}\cdot\text{cm}^2, \tag{18}$$

wobei das Integral über den ganzen Körper zu erstrecken ist. Zur Auswertung des Integrals ist es erforderlich, die Verteilung der Massenelemente dm über den Körper, also dessen Dichte als Funktion des Abstandes r von der Achse zu kennen. Die Achse kann sowohl innerhalb wie außerhalb des Körpers liegen.

Auch für ausgedehnte Körper gilt die Gl. 16, welche besagt, daß das Produkt aus Trägheitsmoment und Winkelbeschleunigung gleich dem wirkenden Drehmoment ist. Es besteht also bezüglich einer drehenden Bewegung eine Analogie mit dem 2. NEWTONschen Axiom, Kraft = Masse × Beschleunigung. In der Tat handelt es sich auch nur um eine Anwendung dieses Axioms auf die drehende Bewegung.

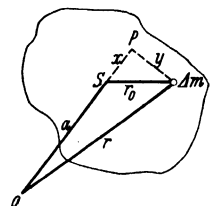


Abb. 23. Zur Ableitung des STEINERschen Satzes.

Ein Körper (Abb. 23) sei um eine zur Zeichnungsebene senkrechte, durch den Punkt O gehende feste Achse drehbar. Die zur Achse parallele, durch den Schwerpunkt des Körpers gehende Gerade (Schwerpunktsachse) durchstoße die Zeichnungsebene in S, und es sei $OS = a$. Wir betrachten ein beliebiges in der Zeichnungsebene liegendes Massenelement Δm des Körpers. Sein Abstand von O sei r, sein Abstand von S sei r_0. Wir verlängern a über S hinaus und fällen von Δm aus das Lot auf diese Verlängerung. Dann ist das Trägheitsmoment des Körpers bezüglich der durch O gehenden Achse

$$J = \Sigma \Delta m r^2 = \Sigma \Delta m\,[(a + x)^2 + y^2] = a^2 \Sigma \Delta m + \Sigma \Delta m r_0^2 + 2a \Sigma \Delta m x.$$

Nun ist $\Sigma \Delta m$ die Gesamtmasse m des Körpers und $\Sigma \Delta m r_0^2$ das Trägheitsmoment J_0 des Körpers, bezogen auf die Schwerpunktsachse. Ferner ist $\Sigma \Delta m x = 0$ gemäß der Definition des Schwerpunktes (Gl. 14a, § 34). Demnach ergibt sich

$$J = ma^2 + J_0. \tag{19}$$

Es ist aber ma^2 das Trägheitsmoment eines Massenpunktes m, der sich auf der Schwerpunktsachse befindet, bezüglich der parallelen, durch O gehenden Achse. Demnach besagt Gl. 19: Das Trägheitsmoment eines Körpers um eine beliebige Achse ist gleich der Summe aus dem Trägheitsmoment J_0 des Körpers bezüglich einer zur vorgegebenen Achse parallelen, durch den Schwerpunkt des Körpers gehenden Achse und dem Trägheitsmoment eines im Körperschwerpunkt liegenden, dem Körper an Masse gleichen Massenpunktes bezüglich der vorgegebenen Achse (**STEINERscher Satz**). Aus Gl. 19 folgt, daß ein Körper bei vorgegebener Achsenrichtung das kleinste Trägheitsmoment, nämlich J_0, hat, wenn die Achse durch den Schwerpunkt des Körpers geht ($a = 0$).

Es sei P ein innerhalb oder außerhalb eines Körpers liegender Punkt. Bezüglich jeder beliebigen durch P hindurchgehenden Geraden als Drehachse

hat der Körper ein bestimmtes Trägheitsmoment J. Trägt man von P aus die Größen $1/\sqrt{J}$ in Richtung der betreffenden Geraden ab, so bilden ihre Endpunkte die Fläche eines Ellipsoids, des sog. Trägheitsellipsoids. Es hat die größten Dimensionen, wenn P der Schwerpunkt des Körpers ist, und wird um so mehr abgeplattet, je weiter die Achse vom Schwerpunkt entfernt ist. Seine große Achse liegt in Richtung des kleinsten, seine kleine Achse in Richtung des größten Trägheitsmoments. Ist P der Schwerpunkt des Körpers, so nennt man diese beiden Richtungen sowie die dritte, zu beiden senkrechte, die Hauptträgheitsachsen des Körpers, die dazugehörigen Trägheitsmomente seine Hauptträgheitsmomente.

Das Trägheitsmoment eines Körpers um eine beliebige Achse ist nach Gl. 19 ohne weiteres bekannt, wenn man dasjenige des Körpers um die parallele, durch den Schwerpunkt gehende Achse kennt. Die Berechnung des letzteren nach Gl. 18 ist nur bei einfach geformten Körpern mit einfacher Dichteverteilung, insbesondere bei homogenen Körpern, in geschlossener Form möglich. So ist das Trägheitsmoment eines homogenen Vollzylinders vom Radius R bezüglich seiner Körperachse gleich $mR^2/2$, dasjenige einer homogenen Vollkugel vom Radius R für jede durch ihren Mittelpunkt gehende Achse gleich $2/5\, mR^2$.

37. **Kreisbewegung. Zentripetalkraft und Zentrifugalkraft.** Ein Körper von der Masse m bewege sich mit konstanter Geschwindigkeit v auf einem Kreise vom Radius r um einen festen Punkt. Das kann z. B. so geschehen, daß er in dieser Entfernung durch einen im Drehungszentrum befestigten Faden oder eine Stange festgehalten wird. Seine Winkelgeschwindigkeit sei $d\varphi/dt = \omega$. Die Geschwindigkeit in seiner Bahn ist dann gemäß Gl. 22, § 20, $v = r\omega$.

Da der Körper nach Gl. 28 (§ 20) bei der Rotation eine radiale Beschleunigung $\gamma = -r\omega^2$ in Richtung auf das Drehungszentrum erfährt (Abb. 24a), so folgt, daß auf ihn jeweils in dieser Richtung eine Kraft vom Betrage

$$k = -m\gamma = -mr\omega^2 = -\frac{mv^2}{r}\ \text{dyn} \tag{20}$$

wirken muß. Es ist das diejenige Kraft, die den Körper zwingt, auf einer Kreisbahn zu laufen, also z. B. die Spannung in einem ihn haltenden Faden. Man bezeichnet diese Kraft als Zentripetalkraft. Es ist aber wohl zu beachten, daß es sich hier nicht um eine einer Kreisbewegung eigentümliche besondere Art von Kraft handelt, sondern daß damit lediglich diejenige Kraft bezeichnet wird, die jeweils den umlaufenden Körper in Richtung auf das Drehungszentrum hinzieht. Das können die elastischen Kräfte in einer Stange, einer Feder oder einem gespannten Faden sein, oder auch die Schwerkraft oder elektrische oder magnetische Kräfte.

Nach § 26 hat die radiale Beschleunigung das Auftreten einer Trägheitskraft zur Folge, die gleich der beschleunigenden Kraft, und ihr entgegen, also radial nach außen gerichtet, ist . Die rotierende Masse m sucht also das Drehungszentrum mit einer Kraft $mr\omega^2$ radial nach außen zu ziehen. Es ist dies die Kraft, die wir z. B. fühlen, wenn wir einen Stein an einem Faden im Kreise herumschleudern. Sie erweckt in uns den Eindruck, als wirke von der rotierenden Masse her eine Kraft auf unsere Hand, in dem Sinne, als habe der Körper das Bestreben, sich in radialer Richtung fortzubewegen. Tatsächlich handelt es sich nur um die Gegenwirkung der Trägheit des rotierenden Körpers gegen die Wirkung der von der Hand auf ihn ausgeübten, radial nach innen gerichteten Kraft, nicht, wie es den Anschein haben könnte, um eine von der Rotation herrührende, auf den rotierenden Körper in radialer Richtung nach außen

wirkende Kraft, welche durch ihn auf das Zentrum übertragen wird. Diese sog. Zentrifugalkraft $+mr\omega^2$ greift also nicht etwa an dem rotierenden Körper an, sondern geht infolge seiner Trägheit von ihm aus und greift am Drehungszentrum an (Abb. 24a). Sie ist nichts anderes als die gemäß dem dritten NEWTONschen Axiom auftretende Gegenwirkung gegen die den Körper nach der Drehungsachse hin ziehende Zentripetalkraft. Sobald die Zentripetalkraft zu wirken aufhört, bewegt sich der Körper (bei Abwesenheit anderer Kräfte, z. B. der Schwerkraft) infolge seiner Trägheit mit konstanter Geschwindigkeit $v = r\omega$ geradlinig und tangential zu seiner bisherigen Bahn weiter.

Der tatsächliche Vorgang bei der Rotation ist in Abb. 24b grob schematisch dargestellt. Zur Zeit t befinde sich der rotierende Körper im Punkte A. Ohne die Wirkung der Zentripetalkraft würde er sich vermöge seiner Geschwindigkeit $v = r\omega$ in der Zeit dt geradlinig bis zum Punkte B bewegt haben. Durch die Zentripetalkraft erfährt er jedoch eine zu v senkrechte Beschleunigung, die ihm während der Zeit dt eine durchschnittliche Geschwindigkeit v_r erteilt. Unter der vereinigten Wirkung dieser beiden Geschwindigkeiten gelangt er in der Zeit dt zum Punkte C auf der Kreisbahn. Die Abbildung kann von dem Vorgang nur ein rohes Bild geben, da ja tatsächlich die Richtung von v_r längs des Kreisbogens AC ständig wechselt. Man muß sich daher den Vorgang auf ein unendlich kleines Stück des Kreisbogens übertragen denken. Dann werden auch die beiden Vektorpfeile $AB = AC = v$ einander tatsächlich gleich, d. h. der absolute Betrag v der Geschwindigkeit bleibt konstant trotz der fortgesetzt erfolgenden (aber senkrecht zur Bahnrichtung gerichteten) Beschleunigungen.

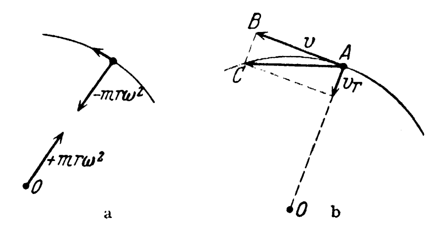


Abb. 24. Zur Ableitung der Zentrifugalkraft.

Die bei der Rotation auftretende Zentrifugalkraft beträgt demnach

$$k = +mr\omega^2 = +\frac{mv^2}{r}\,\text{dyn}. \tag{21}$$

Es wird häufig davon gesprochen, daß sich bei der Rotation Zentrifugalkraft und Zentripetalkraft das Gleichgewicht halten. Das ist insofern richtig, als ja die Zentrifugalkraft und die Zentripetalkraft gleich groß und entgegengesetzt gerichtet sind und in der gleichen Geraden liegen. Man beachte aber, daß das rotierende System selbst sich nicht im Gleichgewicht befindet, da es ja einer dauernden Beschleunigung unterliegt.

Das hier Gesagte gilt für jede krummlinige Bewegung. Die Größe der Zentrifugalkraft in irgendeinem Punkte einer gekrümmten Bahn berechnet man aus Gl. 21, indem man für r den Krümmungsradius der Bahn in jenem Punkte einsetzt.

38. **Die Zentrifugalkraft, vom rotierenden System aus beurteilt.** In § 37 haben wir die Kräfteverhältnisse an einem rotierenden Körper so dargestellt, wie sie einem Beobachter erscheinen, der sich außerhalb des rotierenden Systems in Ruhe befindet. Jetzt wollen wir uns in die Lage eines Beobachters versetzen, der zugleich mit dem betrachteten Körper mit gleicher Winkelgeschwindigkeit um die gleiche Achse rotiert. In dieser Lage befinden wir uns ja z. B. selbst, wenn wir die Wirkungen der Erdrotation beobachten. Als einfaches Beispiel denken wir uns eine um eine zentrale Achse rotierende Kreisscheibe, in deren Mittelpunkt sich der mitrotierende Beobachter befinde. Während ein außerhalb der Scheibe befindlicher Beobachter die Vorgänge auf der rotierenden Scheibe auf

ein außerhalb der Scheibe ruhendes Koordinatensystem beziehen wird, wird der mitrotierende Beobachter sie auf ein Koordinatensystem beziehen, das mit dem rotierenden System fest verbunden ist, auf der Erde also z. B. auf das übliche Gradnetz. Hieraus ergibt sich eine grundsätzlich verschiedene Betrachtungsweise der beiden Beobachter. Die des ruhenden Beobachters haben wir in § 37 auseinandergesetzt. Für diesen erfahren sämtliche dem rotierenden System angehörenden Körper, eben weil sie rotieren, dauernde Beschleunigungen unter der Wirkung der Zentripetalkräfte, befinden sich also nicht im Gleichgewicht. Für den mitrotierenden Beobachter aber befinden sich alle Körper, die sich gegenüber der rotierenden Scheibe nicht bewegen, in Ruhe, sie ändern ihre Orte in dem mitrotierenden Koordinatensystem nicht. Und da sie ruhen, so befinden sie sich für diesen Beobachter im Gleichgewicht. Nun bemerkt aber der mitrotierende Beobachter sehr wohl, daß es für jeden solchen Körper einer in Richtung auf die Drehungsachse wirkenden Kraft bedarf, also einer Zentripetalkraft, damit der Körper wirklich in Ruhe verharrt, andernfalls bewegt er sich sofort auf den Außenrand der Scheibe hin. Und zwar ist die beschleunigte Bewegung, in die der Körper ohne die Wirkung der Zentripetalkraft geraten würden, für den mitrotierenden Beobachter gar nicht anders zu deuten, als daß es sich dabei um die Wirkung einer Kraft handelt, die an den rotierenden Körpern selbst angreift und diese radial nach außen zu treiben sucht. Und diese Kraft wird er mit weit mehr Recht, als ein außerhalb des Systems ruhender Beobachter als Zentrifugalkraft bezeichnen; denn von seinem Standpunkt aus treibt sie die rotierenden Körper radial von der Drehungsachse fort. (Letztere ist für ihn übrigens nur als die Schnittlinie sämtlicher Zentrifugalkräfte gekennzeichnet.)

Wenn wir daher die Standpunkte der beiden Beobachter noch einmal kurz zusammenfassen, so ergibt sich:

Für den ruhenden Beobachter ist das rotierende System nebst den zu ihm gehörigen und relativ zu ihm ruhenden Körper nicht im Gleichgewicht. Die Rotation seiner Bestandteile wird durch die an jedem einzelnen dieser Bestandteile angreifende Zentripetalkraft aufrechterhalten, die ihnen fortgesetzte Beschleunigungen in radialer Richtung erteilt. Die Zentrifugalkraft ist die Gegenwirkung der rotierenden Massen gegen die beschleunigende Wirkung der Zentripetalkraft, also eine Trägheitskraft.

Für den mitrotierenden Beobachter befinden sich alle relativ zum rotierenden System in Ruhe befindlichen, also mitrotierenden Körper im Gleichgewicht. Er beobachtet aber, daß innerhalb seines Systems überall eine Kraft auftritt, die alle mitrotierenden Körper radial nach außen zu treiben sucht, und die den Massen der Körper und ihrem Abstande von einer bestimmten Geraden (der Drehungsachse) proportional ist ($k = m r \omega^2$). Für ihn greift also die Zentrifugalkraft an den mitrotierenden Körpern selbst an. Die Zentripetalkraft ist dazu notwendig, um der Zentrifugalkraft das Gleichgewicht zu halten, also zu verhindern, daß sie die zum System gehörigen Körper in beschleunigte radiale Bewegung versetzt.

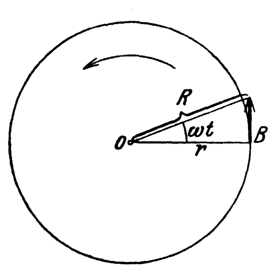


Abb. 25. Zur Zentrifugalkraft.

Daß für den mitrotierenden Beobachter die Zentrifugalkraft tatsächlich den Charakter einer Kraft im eigentlichen Sinne hat, wird noch durch folgende Überlegung besonders deutlich. Abb. 25 stelle eine um den Punkt O mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierende Scheibe dar, an deren Rande in B sich eine Masse befinde, die dort zunächst durch eine Zentripetalkraft festgehalten werde. Sie bewegt sich daher

anfänglich mit der Geschwindigkeit $v = r\omega$ auf einem Kreise vom Radius r. Zur Zeit $t = 0$ höre die Zentripetalkraft auf zu wirken, so daß die Masse sich nunmehr, von außerhalb des Systems her beurteilt, infolge ihrer Trägheit mit der Geschwindigkeit v in tangentialer Richtung von der Scheibe fortbewegt. Sie hat dann nach der Zeit t die Strecke vt in dieser Richtung zurückgelegt, und ihr Abstand vom Drehungszentrum hat sich von r auf

$$R = \sqrt{r^2 + v^2 t^2}$$

vergrößert. Durch zweimaliges Differenzieren erhalten wir die Beschleunigung, mit der R wächst,

$$\frac{dR}{dt} = \frac{v^2 t}{\sqrt{r^2 + v^2 t^2}}, \qquad \frac{d^2R}{dt^2} = \frac{v^2 r^2}{(r^2 + v^2 t^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Für den Zeitpunkt $t = 0$, in dem sich die Masse von dem Rande der Scheibe fortzubewegen begann, erhalten wir aus dieser Gleichung ihre Anfangsbeschleunigung γ, d. h. die Beschleunigung, die sie erfuhr, als sie sich im Abstande r vom Drehungszentrum befand. Es ergibt sich, indem wir $t = 0$ setzen,

$$\gamma = \left(\frac{d^2R}{dt^2}\right)_{t=0} = \frac{v^2}{r} = r\omega^2.$$

Hieraus folgt für die auf die Masse m wirkende Kraft $k = m\gamma$

$$k = mr\omega^2,$$

also der richtige Ausdruck für die Zentrifugalkraft.

Man wird geneigt sein, rein gedanklich den Standpunkt des ruhenden Beobachters, wie er in § 37 dargestellt wurde, vorzuziehen. Tatsächlich aber kommt man, wenn man sich auf den hier geschilderten Standpunkt eines mitrotierenden Beobachters stellt, genau zum gleichen Ergebnis bezüglich der in der Natur eintretenden Vorgänge. Insofern sind beide Standpunkte gleichberechtigt. Und man wird jeweils denjenigen von ihnen anwenden, der für den gerade vorliegenden Fall der bequemere ist. Wir werden noch an mehreren Beispielen sehen, daß das sehr häufig der Standpunkt des mitrotierenden Beobachters ist.

39. **Beispiele für die Trägheitskräfte rotierender Massen.** Die beim Herumschleudern eines Körpers an einer Schnur auftretende Zentrifugalkraft kann man in der Hand unmittelbar fühlen. Einige technische Anwendungen der Zentrifugalkraft werden in § 79 besprochen werden.

Zur Anstellung von Versuchen über die Zentrifugalkraft bedient man sich zweckmäßig einer sog. Zentrifugalmaschine, bei der eine vertikale Achse, auf der die zu untersuchenden Körper befestigt werden, in schnelle Rotation versetzt werden kann. Es seien als Beispiele folgende Versuche erwähnt.

1. Auf zwei glatten, horizontalen Stangen (Abb. 26) sind leicht verschiebbar zwei durch eine Schnur verbundene Massen m_1 und m_2 angebracht. Auf jede der beiden Massen wirkt radial nach innen die gleiche Zentripetalkraft (der Zug in der Schnur). Wir stellen uns auf den Standpunkt eines mitrotierenden Beobachters (§ 38). Dann wird das aus den Massen m_1 und m_2 bestehende System nur dann bezüglich des mitrotierenden Systems im Gleichgewicht sein, wenn die auf m_1 und m_2 wirkenden Zentrifugalkräfte gleich groß sind, sonst setzen sich die Massen in Richtung der größeren Zentrifugalkraft in Bewegung. Seien r_1 und r_2 die Abstände der beiden Massen vom Drehungszentrum, und sei z. B. $m_1 r_1 \omega^2 < m_2 r_2 \omega^2$, so zieht die Masse m_2 die Masse m_1 zu sich hinüber. Je mehr dies geschieht, um so mehr überwiegt $m_2 r_2 \omega^2$ über $m_1 r_1 \omega^2$, und die Massen schlagen heftig an die die Stangen auf der Seite von m_2 begrenzende Backe.

2. Bei dem in Abb. 27 dargestellten Apparat vermag die kleinere Masse m_1 die größere Masse m_2 zu heben, wenn der Apparat so schnell rotiert, daß die von m_1 aus durch Vermittlung der Schnur auf m_2 übertragene Zentrifugalkraft größer wird als die auf m_2 wirkende Schwerkraft. Ist die Masse m_2 einmal gehoben, so beachte man, daß sie erst bei einer kleineren Rotationsgeschwindigkeit, als zu ihrer Hebung erforderlich war, wieder herabfällt. Der Abstand r_1 der Masse m_1 von der Achse ist bei der Hebung von m_2 größer geworden und damit auch die von ihr ausgehende Zentrifugalkraft.

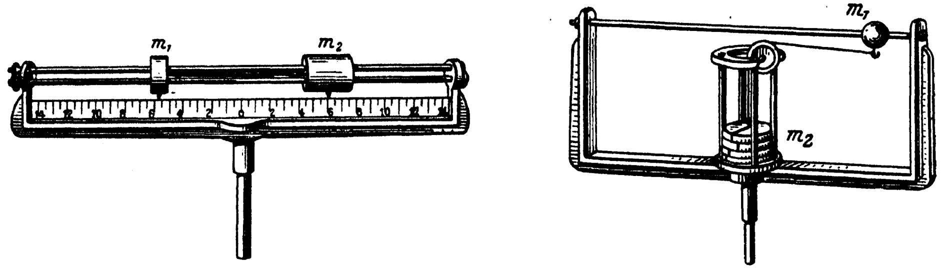


Abb. 26. Zur Zentrifugalkraft. Abb. 27. Zur Zentrifugalkraft.

3. Der aus federnden Metallbändern hergestellte Apparat (Abb. 28) wird oft als Erdmodell bezeichnet, weil er sich, wie die Erde, bei Rotation abplattet. Der Vergleich ist insofern ein äußerlicher, als die Zentripetalkräfte in beiden Fällen ganz verschiedener Art sind. Die Wirkung der Rotation besteht darin, daß die von

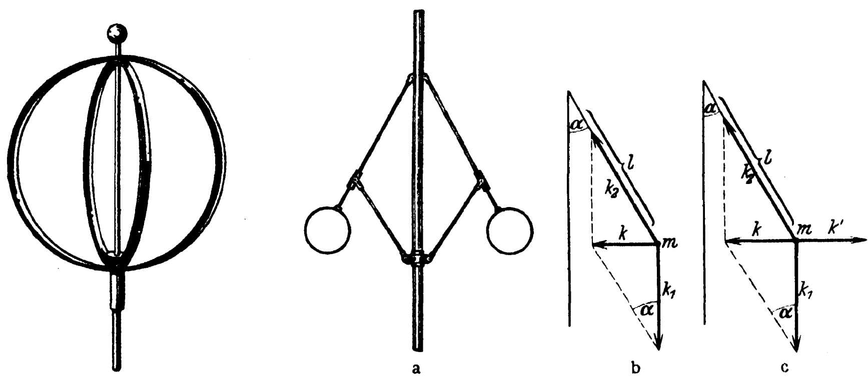


Abb. 28. Sog. Erdmodell. Abb. 29. Zentrifugalregulator.

den äußeren Teilen der Bänder ausgehende Zentrifugalkraft die der Achse nahen Teile nach der Mitte zu zieht, bis durch die dabei eintretende Durchbiegung elastische Kräfte von solcher Größe auftreten, daß zwischen ihnen und der Zentrifugalkraft Gleichgewicht besteht.

4. Ein sehr lehrreicher Fall ist der Zentrifugalregulator, der aus zwei gleichen Massen besteht, die an einer vertikalen Achse befestigt und außerdem in einer vertikalen Ebene drehbar sind (Abb. 29). Je schneller der Apparat rotiert, um so höher heben sich die Massen.

Wir betrachten die Verhältnisse zunächst vom Standpunkt eines außerhalb des rotierenden Systems ruhenden Beobachters (§ 37). Auf die Masse m (Abb. 29b) wirken zwei Kräfte, die Schwerkraft k_1 und der in der Stange l auftretende Zug (Zwangskraft, § 30) k_2. Eine gleichförmige Rotation findet dann statt, wenn die Resultierende k dieser beiden Kräfte gerade die zur Rotation

auf einem Kreise $r = l \sin\alpha$ nötige Zentripetalkraft $m l \omega^2 \sin\alpha$ liefert. Man liest aus der Abb. 29b ab, daß das der Fall ist, wenn $k = k_1 \operatorname{tg}\alpha$. Es folgt $k_1 \operatorname{tg}\alpha = m l \omega^2 \sin\alpha$ oder

$$\cos\alpha = \frac{k_1}{m l \omega^2}. \tag{22}$$

Wenn wir den gleichen Fall vom Standpunkt eines mitrotierenden Beobachters (§ 38) betrachten, so kommt zu den Kräften k_1 und k_2 noch die der Zentripetalkraft gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Zentrifugalkraft k' als an der Masse m wirkende Kraft hinzu (Abb. 29c). Die beiden Betrachtungsweisen unterscheiden sich dadurch, daß vom ersten Standpunkt aus die an der Masse m angreifenden Kräfte k_1 und k_2 nicht miteinander im Gleichgewicht sind, sondern eine Resultierende, k, haben, während vom zweiten Standpunkt aus die drei angreifenden Kräfte k_1, k_2 und k' miteinander im Gleichgewicht sind.

Die Gl. 22 ist nur erfüllbar, wenn $k_1 \leqq m l \omega^2$ ist. (Nach § 55 ist $k_1 = m g$, es muß also $\omega^2 \gtreqqless l/g$ sein.) Andernfalls, also bei zu kleiner Winkelgeschwindigkeit ω, kommt eine Hebung der Massen überhaupt nicht zustande.

Der Zentrifugalregulator dient in der Technik zum Regulieren des Ganges von Dampfmaschinen. Die beweglichen Massen stehen in Verbindung mit einem Hebelwerk, welches den Dampfzustrom zur Maschine je nach dem Grad der Hebung der Massen regelt.

40. Arbeit. Arbeit leisten bedeutet für den Menschen jede Tätigkeit, die mit der Anwendung von Muskelkraft verbunden ist, z. B. das Heben eines Körpers vom Erdboden auf einen Tisch. Mit dieser Tätigkeit wäre eine Arbeit nicht verbunden, wenn der Körper nicht durch die Schwere nach unten gezogen würde (außer derjenigen Arbeit, die man braucht, um den Körper gegen seine Trägheit in Bewegung zu setzen, die man aber wieder gewinnen kann, wenn man den Körper wieder zur Ruhe bringt. Man kann sich auch die Bewegung des Körpers unendlich langsam vorgenommen denken, so daß eine Beschleunigungsarbeit [§ 41] von endlicher Größe nicht zu leisten ist). Um den Körper um eine bestimmte Strecke senkrecht emporzuheben, ist es notwendig, erstens eine Kraft aufzuwenden, um den Körper gegen die ihn nach der anderen Seite ziehende Schwerkraft festzuhalten, diese also aufzuheben, und zweitens den Körper längs der genannten Strecke gegen die Schwerkraft zu bewegen. Wir sagen, daß wir eine um so größere Arbeit geleistet haben, je größer die dazu nötige Kraft ist und je länger der Weg ist, längs dessen diese Kraft wirkte. Ganz das gleiche gilt, wenn es sich nicht um die Schwerkraft, sondern um irgendeine andere Kraft handelt, z. B. um das Spannen einer Feder gegen die Wirkung der Federkraft. Man mißt daher jede mechanische Arbeit unmittelbar durch das Produkt aus Kraft und Weg.

Arbeit = Kraft × Weg.

Dabei darf aber nur diejenige Komponente der Kraft in Rechnung gesetzt werden, die tatsächlich bei der Ausführung der betreffenden Arbeit wirksam geworden ist. Das ist diejenige, welche in der Richtung des Weges liegt, während eine Kraftkomponente senkrecht zur Wegrichtung unwirksam bleibt, als sei sie nicht vorhanden (vgl. z. B. § 58). Es ist daher die geleistete Arbeit gleich dem Produkt aus der in der Richtung des Weges liegenden Kraftkomponente k_s und dem Weg s.

$$A = k_s s, \tag{23}$$

also wenn Kraft und Weg den Winkel φ miteinander bilden,

$$A = k \cdot s \cdot \cos\varphi. \tag{24}$$

Man kann, indem man in Gl. 24 $s \cos\varphi$ zusammenfaßt, auch sagen: Arbeit = Kraft × Wegkomponente in der Kraftrichtung.

Ändert sich die Kraft k längs des Weges s, so ist die geleistete Arbeit durch Integration über die einzelnen Wegelemente ds zu berechnen,

$$A = \int k\, ds \cos\varphi. \tag{25}$$

Die Arbeit ist das Wegintegral der Kraft.

Beispiele für das oben Gesagte umgeben uns ringsum. Ein ganz besonders häufiger Fall ist die bereits behandelte Arbeitsleistung gegen die Schwerkraft. Ein anderer sehr großer Teil der im täglichen Leben geleisteten Arbeit dient zur Überwindung von Reibung, z. B. besteht hierin der größte Teil des Arbeitsaufwandes bei den meisten Transportmitteln.

Der Mensch empfindet es auch als eine Arbeit, wenn er z. B. einen schweren Körper längere Zeit ruhig halten muß, obgleich nach der obigen Definition an einem ruhenden Körper keine Arbeit geleistet wird. Dies hängt mit den sehr komplizierten physiologischen Vorgängen im menschlichen Körper zusammen und bedeutet, wie hier nicht näher erörtert werden kann, keinen Widerspruch gegen die Definition.

Die Einheit der Arbeit oder Energie im CGS-System ist 1 erg. Das ist diejenige Arbeit, die geleistet wird, wenn das Produkt $k_s s = 1$ ist, also z. B. bei einer Verschiebung eines Körpers um 1 cm unter der Wirkung einer Kraft von 1 dyn. Vom erg ist abgeleitet das Joule (Wattsekunde) = 10^7 erg. In der Technik dient als mechanische Arbeits- oder Energieeinheit — dem technischen Maßsystem (§ 24) entsprechend — das Meterkilogramm (mkg*), d. i. die Arbeit, die bei der senkrechten Hebung einer Masse von 1 kg um 1 m geleistet wird. Es ist 1 mkg* = $9{,}81 \cdot 10^7$ erg (vgl. § 55).

41. Beschleunigungsarbeit. Arbeit ist auch zu leisten, wenn die Größe der Geschwindigkeit eines Körpers geändert wird, die sog. Beschleunigungsarbeit. Denn es bedarf dazu einer Kraft, und diese Kraft muß längs einer gewissen Strecke wirken, damit eine endliche Geschwindigkeitsänderung erzielt wird. Es ist also zur Leistung einer bestimmten Beschleunigungsarbeit die Wirkung einer Kraft längs eines bestimmten Weges nötig. Die Arbeit ist gegen den Trägheitswiderstand des Körpers zu leisten, und dieser hat nach § 26 die Größe $m\gamma$. Er ist um so größer, je größer die Masse m und je größer die Beschleunigung γ ist. Die an dem Körper geleistete Beschleunigungsarbeit ist nach § 40 gleich dem Produkt aus der wirksamen Komponente k_s der angreifenden Kraft und dem Wege, längs dessen der Körper während der Wirkung der Kraft verschoben wurde. Ist dA die während des Durchlaufens der Strecke ds von der Kraftkomponente k_s an der Masse m geleistete Arbeit, so ist

$$dA = k_s\, ds = m\gamma\, ds = m\frac{dv}{dt}\, ds = m\frac{ds}{dt}\, dv = mv\, dv \text{ erg}, \tag{26}$$

da $\gamma = dv/dt$ und $v = ds/dt$ ist. Dabei ist k_s die Komponente der Kraft und γ die Beschleunigung in Richtung der Bahn s des Körpers.

Wird nur die Richtung, aber nicht die Größe der Geschwindigkeit eines Körpers geändert, so ist dazu nach dem ersten NEWTONschen Axiom (§ 22) zwar die Wirkung einer Kraft erforderlich, aber diese Kraft leistet keine Arbeit, da die Geschwindigkeit konstant bleibt. Ein solcher Fall liegt z. B. bei einer gleichförmigen Kreisbewegung vor. Die richtungsändernde Kraft wirkt in diesem Falle stets senkrecht zur jeweiligen Bewegungsrichtung, so daß $k_s = 0$ ist. Eine Zentripetalkraft (§ 37) leistet daher bei der gleichförmigen Kreisbewegung keine Arbeit.

Jeder Körper, dessen Geschwindigkeit sich unter der Wirkung einer Kraft verringert, leistet Arbeit gegen diese Kraft. Man kann z. B. einen Körper dadurch verlangsamen (negativ beschleunigen), daß man ihn gegen eine Feder laufen läßt, die dabei zusammengedrückt wird (Puffer der Eisenbahnen). Der bewegte Körper leistet dann die Arbeit der Zusammendrückung der Feder und verliert seine Geschwindigkeit. Ein Hammer treibt einen Nagel in Holz, eine Axt zertrümmert einen Gegenstand — alles Vorgänge, die mit Arbeitsaufwand verbunden sind — und kommt dabei von der Bewegung zur Ruhe. Es wird in diesen Fällen also Arbeit aus der Bewegung gewonnen, während bei der positiven Beschleunigung zur Erzeugung von Bewegung Arbeit aufgewendet werden muß.

42. Der Satz von der Erhaltung der Arbeit oder Energie. Ist an einem Körper eine rein mechanische Arbeit geleistet worden, z. B. indem er gegen die Wirkung der Schwerkraft oder einer Federkraft bewegt worden ist, so zeigt die Erfahrung, daß dieser Körper dadurch in die Lage versetzt worden ist, seinerseits wieder Arbeit zu leisten. Und zwar kann, solange es sich um rein mechanische Arbeit handelt (also insbesondere bei Ausschluß jeglicher Reibung), stets genau der gleiche Betrag an Arbeit aus dem Körper wiedergewonnen werden, der ursprünglich an ihm aufgewendet wurde. So kann eine gespannte Feder einen Körper gegen die Wirkung der Schwerkraft senkrecht emporschleudern, und der herabfallende Körper kann die Feder wieder auf genau den ursprünglichen Betrag spannen. Die an einem Körper geleistete Arbeit ist also in ihm sozusagen aufgespeichert, er hat durch diese Arbeit die Fähigkeit gewonnen, selbst einen gleichen Betrag von Arbeit zu leisten. Die auf diese Weise in einem Körper vorhandene Arbeitsfähigkeit bezeichnet man als die Energie des Körpers (D'ALEMBERT 1785, YOUNG 1807). Man setzt sie gleich der Arbeit, die der Körper zu leisten imstande ist. Sie wird also, wie die Arbeit, im CGS-System in erg, im technischen Maßsystem in mkg* gemessen. Demnach gilt zunächst für rein mechanische Vorgänge, daß bei ihnen Energie oder Arbeit nicht verlorengehen, aber auch nicht aus nichts erzeugt werden kann.

Hingegen kann im allgemeinen mechanische Arbeit oder Energie wohl verschwinden, z. B. durch Reibung in Wärme verwandelt werden. Es war ein fundamentaler Fortschritt in der physikalischen Erkenntnis, als gegen die Mitte des 19. Jahrhunderts ROBERT MAYER, JOULE, HELMHOLTZ und andere erkannten, daß der Begriff der Energie nicht auf die rein mechanischen Vorgänge beschränkt zu werden brauche, sondern daß man in allen Bereichen der Physik gewisse Größen als Energie (Wärmeenergie, elektrische Energie usw.) definieren könne, derart daß der obige, ursprünglich nur für rein mechanische Vorgänge als gültig erkannte Satz ganz allgemeine Gültigkeit erlangt. Wo mechanische Arbeit oder Energie verschwindet, erscheint sie stets in gleichem Betrage als Energie anderer Form, und das gleiche gilt für jede andere Art der Energie.

Ganz allgemein gilt also der als Satz von der Erhaltung der Energie oder Arbeit oder als das Energieprinzip bezeichnete Satz: Energie oder Arbeit kann nie verlorengehen, aber auch nicht aus nichts entstehen. Sie kann nur in Energie anderer Art, aber vom gleichen Betrage, umgewandelt werden.

(Auf Grund der damals, 1847, noch nicht klaren Terminologie nannte HELMHOLTZ diesen Satz den Satz von der Erhaltung der Kraft. Selbstverständlich gilt für Kräfte kein Erhaltungsgesetz.)

Die in dem Satz von der Erhaltung der Energie niedergelegte und immer wieder bestätigte Erkenntnis hat ein Jahrhunderte altes Streben der Menschheit seines Sinnes beraubt, nämlich den Versuch, ein sog. „perpetu-

um mobile" zu konstruieren. Ein solches sollte nicht etwa, wie sein Name eigentlich besagt, eine Vorrichtung sein, die ohne äußeren Antrieb ewig läuft (das wäre bei völliger Ausschaltung der Reibung durchaus möglich; vgl. die völlig reibungslose Bewegung der Planeten), sondern eine Maschine, welche ohne äußere Energiezufuhr dauernd Arbeit leistet, also Energie aus nichts schafft, Arbeit „umsonst" liefert. Das ist nach dem Satz von der Erhaltung der Energie unmöglich. (Das Reichspatentamt nimmt Patentanmeldungen, welche ein angebliches Perpetuum mobile betreffen, nicht mehr an.)

Da wir, wie in § 4 erwähnt, berechtigt sind, anzunehmen, daß die physikalischen Gesetzmäßigkeiten im ganzen Weltall die gleichen sind, so folgt aus der Tatsache, daß Energie nirgends in der Welt je aus nichts entstehen oder verlorengehen kann, daß der Gesamtvorrat des Weltalls an Energie unveränderlich ist. Es ändert sich nur die Form, in der die Energie in Erscheinung tritt (Bewegungsenergie, elektrische, magnetische Energie, Schwereenergie, Wärmeenergie usw.). Das Energieprinzip ist wieder einer der fundamentalen Erhaltungssätze der Physik.

43. **Energie der Bewegung oder kinetische Energie.** Bei der Beschleunigung eines Körpers wird die hierzu aufgewendete Arbeit als Energie auf den bewegten Körper übertragen. Sie ist gemäß dem Energieprinzip nicht verschwunden, sondern nur in eine andere Form übergegangen, in dem bewegten Körper sozusagen aufgespeichert, und kann sich, bei Aufhören der Bewegung, wieder in ihre alte (oder eine andere) Form verwandeln. Wir müssen daher sagen, daß die Energie während der Dauer der Bewegung in dem bewegten Körper enthalten ist. Ein bewegter Körper besitzt kinetische Energie oder Energie der Bewegung. Die Größe dieser Energie muß sich durch seine Masse und durch seine Geschwindigkeit ausdrücken lassen. Durch Integration von Gl. 26 finden wir

$$A = \int_0^v m\,v\,d\,v = \tfrac{1}{2}\,m v^2 \text{ erg}. \qquad (27)$$

Die kinetische Energie einer mit der Geschwindigkeit v bewegten Masse m beträgt also $\frac{1}{2} m v^2$ erg.

Differenziert man die kinetische Energie nach der Geschwindigkeit v, so ergibt sich

$$\frac{d\,A}{d\,v} = m v \text{ g cm sec}^{-1}. \qquad (28)$$

Das aber ist nichts anderes, als die uns bereits als Bewegungsgröße oder Impuls bekannte Größe (§ 25). Die Bewegungsgröße ist demnach der Differentialquotient der kinetischen Energie nach der Geschwindigkeit.

44. **Energie der Lage oder potentielle Energie.** Wenden wir das Energieprinzip auf solche Arbeitsleistungen an, welche im Endergebnis nicht zu einer Beschleunigung, sondern zu einer Lageänderung gegen die Wirkung einer Kraft, führen (z. B. Hebung eines Körpers gegen die Wirkung der Schwere), so müssen wir nach dem Energieprinzip annehmen, daß die aufgewendete Arbeit nunmehr in Energie des verschobenen Körpers übergegangen ist, und daß diese Energie auf der Änderung seiner Lage beruht. Gemäß Gl. 23 ist die für eine solche Lagenänderung aufgewandte Arbeit $A = k_s \cdot s$, wobei s die Strecke bedeutet, um welche der Körper in Richtung der wirkenden Kraft k_s verschoben worden ist. Der gleiche Betrag an Energie muß also nunmehr auf den Körper übergegangen sein. Wir bezeichnen diese Energie als Energie der Lage oder potentielle Energie.

Der Zahlenwert der potentiellen Energie eines Körpers in einer bestimmten Lage ist nach dieser Festsetzung davon abhängig, wie groß der Weg gegen die Kraftrichtung ist, über den er bis an den Punkt verschoben

wurde, an dem er sich befindet. D. h. die potentielle Energie hängt ihrem Betrage nach nicht nur von dem Endpunkt, sondern auch von dem Ausgangspunkt dieser Bewegung ab. Richtiger gesagt, wir haben dem Körper in diesem Ausgangspunkte soeben willkürlich die potentielle Energie Null zugeschrieben. Tatsächlich ist dies auch zulässig. Die Wahl des Nullpunktes der potentiellen Energie wird uns von der Natur in keiner Weise vorgeschrieben. Wir können ihn daher vollkommen willkürlich wählen, so wie es im vorliegenden Falle gerade am bequemsten ist. Auf die Ergebnisse von Rechnungen, in denen die potentielle Energie auftritt, hat das keinerlei Einfluß, denn in diesen kommen stets nur Differenzen von potentiellen Energien vor. In vielen Fällen legen wir den Nullpunkt am bequemsten in die Erdoberfläche oder in das Meeresniveau oder in die Ebene des Laboratoriumstisches.

45. **Leistung.** Unter Leistung L versteht man den Differentialkoeffizienten

$$L = \frac{dA}{dt} \text{ erg/sec} \tag{29a}$$

der geleisteten Arbeit A nach der Zeit t. Es ist also die in der Zeit t geleistete Arbeit

$$A = \int_0^t L\,dt \text{ erg}. \tag{29b}$$

Ist die Leistung L zeitlich konstant, also von t unabhängig, so wird $A = Lt$ erg und $L = A/t$ erg/sec. In diesem Falle kann man die Leistung also auch als die in der Zeiteinheit geleistete Arbeit definieren. Die Einheit der Leistung im CGS-System, 1 erg/sec, liegt vor, wenn in 1 sec 1 erg geleistet wird. Benutzt man als Arbeitseinheit das Joule (§ 40), so ergibt sich als Einheit der Leistung 1 Joule/sec = 1 Watt = 10^7 erg/sec. Es sind 1000 Watt = 1 Kilowatt (kW). Im technischen Maßsystem ist die Einheit der Leistung 1 mkg*/sec = $9{,}81 \cdot 10^7$ erg/sec = 9,81 Watt. Eine ältere, aber auch heute noch viel verwendete technische Leistungseinheit ist 1 Pferdestärke (PS) = 75 mkg*/sec = 0,736 kW.

Da die Arbeit dA einer Kraft k an einem Körper nach § 40 gleich $k_s\,ds$ ist, wenn die Arbeit längs des Weges ds geleistet wird, so können wir statt Gl. 29 auch schreiben

$$L = k_s \frac{ds}{dt} = k_s v \text{ erg/sec}. \tag{30}$$

Wirken auf einen Körper mehrere Kräfte, so kann es vorkommen, daß sich die Wirkung dieser Kräfte gegenseitig aufhebt, indem ihre Resultierende in der Richtung der Bewegung gleich Null wird. In diesem Fall ist nach dem 1. NEWTONschen Axiom die Geschwindigkeit v des Körpers konstant. Trotzdem leisten alle an dem Körper angreifenden Einzelkräfte Arbeit gemäß Gl. 30. Diese Arbeit ist jedoch nur für diejenigen Kräfte positiv, deren Komponente k_s mit der Geschwindigkeit v des Körpers gleichgerichtet sind. Ist sie v entgegengerichtet, so ist die Leistung der betreffenden Kraft negativ, d. h. der Körper leistet Arbeit gegen diese Kräfte. Er gewinnt also Energie aus der Arbeit der ersteren Kräfte und verliert Energie unter der Wirkung der letzteren Kräfte. So kann z. B. ein in der Luft fallender Körper unter der vereinigten Wirkung der nach unten gerichteten Schwerkraft und der der Geschwindigkeit entgegengerichteten Luftreibung eine konstante Fallgeschwindigkeit v annehmen (§ 116). Er besitzt dann eine konstante kinetische Energie. Trotzdem leistet die Schwerkraft an ihm eine dauernde Arbeit. Diese führt jedoch zu keiner Vermehrung der kinetischen Energie, weil die von dem Körper gegen die Reibung geleistete Arbeit ihm stets den gleichen Energiebetrag entzieht, den er durch die Arbeit

der Schwerkraft gewonnen hat. Es ist also in diesem Falle die Leistung der Schwerkraft positiv, die Leistung der Reibung negativ, ihre Summe Null. Bei einem senkrecht nach oben geworfenen Körper leistet der Körper während des Aufstiegs auf Kosten seiner kinetischen Energie Arbeit gegen die Schwerkraft, Kraft und Geschwindigkeit sind einander entgegengerichtet, die Leistung der Schwerkraft ist negativ. Beim Herabfallen ist es umgekehrt.

Die Messung der mechanischen Leistung von Maschinen ist ein wichtiges technisches Problem. Das Verhältnis der von einer Maschine abgegebenen nutzbaren Leistung zu der für ihren Betrieb aufgewendeten Leistung bezeichnet man als ihren Wirkungsgrad. Bei einer idealen Maschine wäre er gleich 1 oder gleich 100%. In Wirklichkeit ist er, schon wegen der unvermeidlichen Energieverluste durch Reibung, stets kleiner. Zur Messung der nutzbaren Leistung von Motoren dient z. B. der PRONYsche Zaum (Abb. 30). Auf die Achse A eines Motors werden zwei gut passende Holzbacken B unter einem durch Schrauben S regulierbaren Druck gepreßt. Mit den Backen ist ein Hebelarm von der Länge l verbunden, der an seinem einen Ende eine Schale zur Aufnahme von Gewichten trägt.

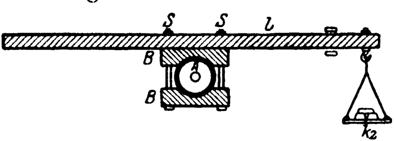


Abb. 30. PRONYscher Zaum.

Der laufende Motor leistet Arbeit gegen die Reibung an den Backen. Der Hebel wird durch die Reibung mitgenommen und legt sich gegen einen Anschlag. Alsdann wird die Schale mit Gewichten (k_2) belastet, bis das Drehmoment der Gewichte das von der Achsenreibung herrührende Drehmoment gerade aufhebt. Es sei k_1 die an der Achse auftretende Reibungskraft, ω die mit einem Tourenzähler zu messende Winkelgeschwindigkeit des Motors, r der Radius der Achse. Dann ist der von jedem Punkt der Achsenfläche in 1 sec zurückgelegte Weg gleich $r\omega$, und die in 1 sec geleistete Arbeit, also die mechanische Leistung des Motors, $L = k_1 r \omega$, oder da $\omega = 2\pi n$, wenn n die Tourenzahl/sec bedeutet, $L = k_1 r\, 2\pi n$. Nach dem Hebelgesetz ist aber bei Gleichgewicht $k_1 r = k_2 l$, wenn k_2 die von den Gewichten herrührende Kraft ist. Es folgt

$$L = 2\pi n k_2 l.$$

Dies ist die mechanische Arbeitsleistung des Motors.

46. Rotationsenergie. Drehimpuls. Bewegt sich ein Massenpunkt m mit der Winkelgeschwindigkeit ω auf einem Kreise vom Radius r, ist also seine Geschwindigkeit $v = r\omega$, so ist seine kinetische Energie

$$A = \tfrac{1}{2} mv^2 = \tfrac{1}{2} m r^2 \omega^2 \text{ erg}. \tag{31a}$$

Handelt es sich um einen ausgedehnten Körper, der aus zahlreichen Einzelmassen m_1, m_2, m_3 usw. besteht, die die Abstände r_1, r_2, r_3 usw. von der Achse haben, so ist seine Rotationsenergie

$$A = \tfrac{1}{2}(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots)\,\omega^2 \text{ erg}$$

oder in Integralform

$$A = \frac{\omega^2}{2}\int r^2\,dm = \frac{1}{2} J\omega^2 \text{ erg}. \tag{31b}$$

Denn nach § 36 ist $\int r^2\,dm$ das Trägheitsmoment J des Körpers.

Die kinetische Energie eines rotierenden Körpers ergibt sich also aus Trägheitsmoment J und Winkelgeschwindigkeit ω in ganz gleicher Weise, wie die kinetische Energie eines geradlinig fortbewegten Körpers aus Masse und Bahngeschwindigkeit.

Infolge der in der Rotation steckenden Energie ist ein größerer Arbeitsaufwand nötig, um einen rollenden Körper auf eine bestimmte Geschwindig-

keit v zu bringen, als den gleichen Körper, wenn er reibungslos gleitet, denn seine gesamte Energie beträgt jetzt $\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} J\omega^2$. Da aber bei einem mit der Geschwindigkeit v auf einer Ebene rollenden Körper $v = r\omega$ ist, so beträgt seine Energie insgesamt $\frac{1}{2}(m + J/r^2)\, v^2$. Der Einfluß des Rollens geht also dahin, daß die träge Masse eines Körpers von m auf $m + J/r^2$ vergrößert erscheint. Bei einer rollenden homogenen Vollkugel erscheint z. B. die träge Masse nach § 36 auf das 1,4 fache vergrößert.

Man stelle zwei zylindrische Körper von genau gleicher Größe, gleichem Aussehen und genau gleichem Gewicht her, von denen der eine etwa ein massiver Holzkörper sei, der andere ein Hohlzylinder, dessen Wand innen mit Blei ganz gleichmäßig bekleidet ist. Die Körper sind also weder durch den Augenschein noch durch ihr Gewicht zu unterscheiden. Läßt man jedoch die beiden Körper auf einer schiefen Ebene, etwa einem schräg gestellten Brett, nebeneinander gleichzeitig herabrollen, so kommt der massive Körper schneller unten an als der Hohlkörper. Denn auf beide wirkt genau die gleiche Kraft, der Hohlkörper aber ist scheinbar träger. Sein Trägheitsmoment ist das größere, weil in ihm die Massen weiter von der Drehungsachse entfernt sind als beim Vollzylinder. Ebenso findet man, daß der Vollzylinder schnellere Schwingungen ausführt als der gleich schwere Hohlzylinder, wenn man ihn in Richtung seiner Achse an einem Faden aufhängt und den Faden tordiert.

Die Bewegungsgröße oder der Impuls eines bewegten Körpers ist nach Gl. 28 der Differentialquotient seiner kinetischen Energie $^1/_2 mv^2$ nach der Geschwindigkeit v. Analog definiert man als Drehimpuls oder Drall eines rotierenden Körpers den Differentialquotienten seiner Rotationsenergie $^1/_2 J\omega^2$ nach der Winkelgeschwindigkeit ω. Es ist also der Drehimpuls gleich

$$F = J\omega \text{ erg} \cdot \text{sec}. \tag{32}$$

Ebenso wie die Winkelgeschwindigkeit ω kann man einen Drehimpuls durch einen Vektorpfeil darstellen, für dessen Größe und Richtung Festsetzungen gelten, die denen für die Winkelgeschwindigkeit entsprechen (vgl. § 20), und Drehimpulse nach den Gesetzen der Vektoraddition (§ 11) addieren.

In Analogie zum Satz von der Erhaltung der Bewegungsgröße gilt auch für den Drehimpuls ein Erhaltungssatz. Wirken innerhalb eines Körpersystems nur innere Kräfte (§ 33), so bleibt bei allen Wechselwirkungen zwischen diesen Körpern die Summe ihrer Drehimpulse konstant. Betrachten wir daher die Gesamtheit der im Weltall vorhandenen Körper als ein einziges Körpersystem, so folgt aus diesem Satz, daß die Summe der im Weltall vorhandenen Drehimpulse eine konstante Größe hat und weder vermehrt noch vermindert werden kann.

Beim Vergleich zwischen den Gesetzen der fortschreitenden Bewegung und der Rotation zeigen sich folgende formale Parallelen. Die Gesetze der Rotation ergeben sich aus denen der fortschreitenden Bewegung, indem man Strecken s durch Winkel φ, Geschwindigkeiten v und Beschleunigungen dv/dt durch Winkelgeschwindigkeiten ω und Winkelbeschleunigungen $d\omega/dt$, Massen m durch Trägheitsmomente J, Kräfte k durch Drehmomente N und Bewegungsgrößen mv durch Drehimpulse $J\omega$ ersetzt, wie folgende Zusammenstellung zeigt.

Fortschreitende Bewegung.		Rotation.	
Energie:	$A = \frac{1}{2} mv^2$	Energie:	$A = \frac{1}{2} J\omega^2$
	$A = \int k\, ds$		$A = \int N\, d\varphi$
Bewegungsgröße:	$q = mv$	Drehimpuls:	$F = J\omega$
Kraft:	$k = m\frac{dv}{dt}$	Drehmoment:	$N = J\frac{d\omega}{dt}$.

Physikalisch gleichartige Größen sind aber nur die Energie der fortschreitenden Bewegung und der Rotation, nicht aber Bewegungsgröße und Drehimpuls oder Kraft und Drehmoment.

47. **Direktionsmoment.** Wir betrachten ein System, welches so beschaffen ist, daß bei einer Drehung des Systems um einen Winkel φ ein rücktreibendes Drehmoment (§ 31) vom Betrage N auftritt, das dem Winkel φ proportional ist. Dann ist auch zur Bewirkung dieser Drehung ein Drehmoment von der gleichen Größe, aber entgegengesetztem Drehsinn, erforderlich. Wir drücken dieses Verhalten durch die Gleichung

$$N = -D\varphi \tag{33}$$

aus. Die Proportionalitätskonstante D nennt man das Direktionsmoment des Systems. Die rechte Seite der Gl. 33 hat negatives Vorzeichen, weil das bei der Drehung auftretende Drehmoment den Winkel φ zu verkleinern sucht. Aus Gl. 16 (§ 36) folgt dann, wenn J das Trägheitsmoment des Systems ist,

$$N = J\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -D\varphi. \tag{34}$$

Die Lösung dieser Gleichung lautet

$$\varphi = \varphi_0 \sin 2\pi\nu t.$$

Das System führt also eine periodische Bewegung, eine Schwingung, aus. Dabei bedeutet φ_0 den Maximalwert, den φ bei jeder Einzelschwingung erreicht, die Amplitude der Schwingung, und es ist $\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{J}}$ gesetzt. ν ist die Anzahl der Schwingungen in 1 sec. Nun besteht zwischen ν und der Schwingungsdauer τ des Systems, wie in § 118 näher auseinandergesetzt werden wird, die Beziehung $\tau = 1/\nu$. Hieraus folgt

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}}\ \text{sec.} \tag{35}$$

Von dieser wichtigen Beziehung werden wir noch häufig Gebrauch machen.

(Das Direktionsmoment D wird oft auch als Direktionskraft bezeichnet. Dieser Name ist irreführend. D hat, wie man aus Gl. 33 sieht, da φ dimensionslos ist, die Dimension eines Drehmoments und wird in dyn · cm bzw. g · cm^2 sec^{-2} gemessen.)

48. **Rotation um freie Achsen. Der Kreisel.** Eine Rotation um eine freie Achse liegt dann vor, wenn die Richtung der Rotationsachse eines Körpers nicht durch äußere Bedingungen (feste Lagerung) festgelegt ist. Beispiele hierfür bilden u. a. die um ihre Achse rotierenden Himmelskörper und der Kreisel. Unterliegt der rotierende Körper keinen äußeren Kräften bzw. sind solche durch irgendwelche anderen Kräfte aufgehoben, so muß bei einer solchen Rotation um eine freie Achse der Schwerpunkt des Körpers in Ruhe (bzw. gleichförmiger, geradliniger Bewegung) verharren (§ 35). Das ist nur dann möglich, wenn der Schwerpunkt auf der Rotationsachse liegt, also die Rotation um eine durch den Schwerpunkt gehende Achse erfolgt. Stabile Rotationsachsen sind aber nur die Achsen größten und kleinsten Trägheitsmoments (§ 36), und von diesen ist die erstere die stabilere.

Bei der Rotation um freie Achsen treten bei jeder durch äußere Kräfte erzwungenen Änderung der Richtung der Rotationsachse sehr auffällige und komplizierte Trägheitswirkungen auf. Ein allgemein bekanntes Beispiel hierfür bildet das Verhalten eines Kreisels. Die Theorie dieser Erscheinungen ist zu kompliziert, um an dieser Stelle ausführlich erörtert zu werden. Wir müssen uns daher auf die folgenden elementaren Überlegungen beschränken. Zu-

nächst fällt beim rotierenden Kreisel die Stabilität seiner Rotationsachse auf, d. h. die Tatsache, daß der Kreisel bei ausreichend schneller Rotation nicht umfällt. Zweitens bemerkt man, daß eine ausreichend träge rotierende Masse (großes Trägheitsmoment) auf jeden Versuch, die Richtung ihrer Achse im Raum zu ändern, mit einer Drehung senkrecht zu der aufgezwungenen Bewegung reagiert. Sehr schöne Versuche lassen sich mit dem Rade eines Fahrrades anstellen, dessen Achse beiderseits in Handgriffen zum Anfassen gelagert ist, und dessen Bereifung zwecks Erhöhung des Trägheitsmoments durch einen Bleikranz ersetzt ist. Das Rad wird durch Abziehen einer auf die verlängerte Achse gewickelten Schnur wie ein Kreisel in schnelle Rotation versetzt. (Der Bleikranz muß sehr gut befestigt sein, da er andernfalls mit einer die Umstehenden schwer gefährdenden Wucht tangential abgeschleudert werden kann.)

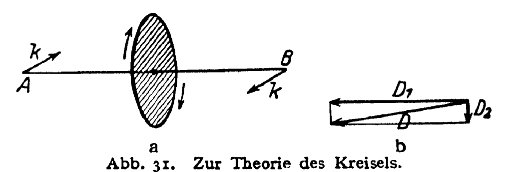
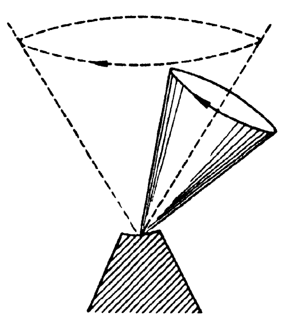


Abb. 31. Zur Theorie des Kreisels.

Wir wollen das Verhalten eines Kreisels an einem einfachen Beispiel wenigstens qualitativ verständlich machen. Abb. 31a stelle eine im Sinne des Pfeils um die Achse AB rotierende Scheibe dar. Auf die Achse wirken für einen Augenblick die zur Zeichnungsebene senkrechten Kräfte k, die ein Kräftepaar bilden. (Man denke sich, daß man den Kreisel bei A und B anfasse und ihm in der erwähnten Weise einen kurzen, drehenden Ruck erteile.) Der Kreisel erhält zu dem Drehimpuls D_1, den er infolge seiner Rotation um die Achse AB besitzt, einen zusätzlichen Drehimpuls D_2 um eine zu AB senkrechte, in der Zeichnungsebene liegende Achse. Nach der in § 46 gegebenen Vorschrift haben die Vektorpfeile D_1 und D_2 die in Abb. 31b dargestellte Lage, und ihre Resultierende, d. h. Größe und Richtung des nach Aufhören der Wirkung des Kräftepaars kk vorhandenen Drehmoments, ist D. Die Richtung von D gibt zugleich die nunmehrige Lage der Achse AB an. Es ist also A nach unten, B nach oben verschoben, d. h. die Achse hat sich senkrecht zu derjenigen Richtung verlagert, die ihr durch das Kräftepaar kk aufgezwungen werden sollte.

Bei einem mit einer Spitze auf der Erde stehenden Kinderkreisel rührt das Drehmoment kk von der Schwerkraft her, die den Kreisel zu kippen sucht. Genau wie vorstehend beschrieben bewegt sich jedoch die Kreiselachse nicht in einer diesem Drehmoment entsprechenden Richtung, sondern senkrecht dazu. Damit das von der Schwerkraft herrührende Drehmoment D_1 überhaupt auftritt, muß der Kreisel natürlich zunächst eine winzig kleine Kippbewegung ausführen. Sobald er aber auch nur ein wenig gekippt ist, tritt das Drehmoment D_2 auf und dieses hat nun zur Folge, daß sich die Kreiselachse auf einem Kegelmantel dreht (Abb. 32). Läuft der Kreisel völlig reibungslos, so dauert seine Bewegung in der geschilderten Weise bei konstantem Öffnungswinkel des Kegels, den die Achse beschreibt, beliebig lange an. Da jedoch die Rotationsgeschwindigkeit im praktischen Falle durch Reibung allmählich verlangsamt wird, so wird der Winkel immer größer und der Kreisel fällt schließlich um. Die Bewegung der Kreiselachse auf einem Kegelmantel bezeichnet man als Präzession des Kreisels.


Abb. 32. Präzession des Kreisels

Eine sehr wichtige technische Anwendung der Stabilität der Achsenrichtung rotierender Körper ist der Kreiselkompaß. Man bedient sich dazu eines elektrisch

in konstanter Rotation gehaltenen Körpers, der in einer sog. kardanischen Aufhängung (wie sie auch bei älteren, nicht elektrischen, Schiffslampen verwendet wird) aufgehängt ist, so daß er sich nach allen Richtungen frei drehen kann. Befindet sich ein solcher Kreisel mit seiner völlig freien Achse irgendwo auf der Erde, so wird durch die Erddrehung die Richtung seiner Rotationsachse fortwährend geändert. Er führt also zunächst eine Präzessionsbewegung aus. Diese wird aber beim Kreiselkompaß durch eine besondere Vorrichtung (Anblasen mit einem Luftstrom) abgebremst. Das hat zur Folge, daß der Kreisel sich mit seiner Achse in die einzige Richtung einstellt, welche bei der Erddrehung unverändert bleibt, nämlich parallel zur Erdachse in die genaue geographische Nord-Südrichtung. Er besitzt also gegenüber dem magnetischen Kompaß den großen Vorzug, erstens durch die Eisenteile des Schiffes nicht gestört zu werden, zweitens von den Anomalien der erdmagnetischen Kraft, der sog. Mißweisung (§ 301), völlig frei zu sein.

49. **Die Erddrehung.** Die Erde ist ein rotierender Körper mit einer völlig freien Achse. Infolge der Anziehung durch die Sonne und den Mond

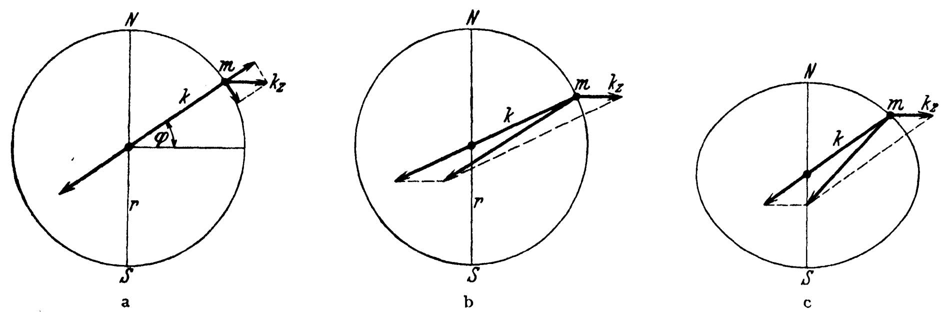


Abb. 33. Die Zentrifugalkraft auf der Erde.

und der Schiefe der Ekliptik und weil die von Sonne und Mond herrührende Schwerkraft nicht an allen Stellen des Erdkörpers genau gleich groß ist, sondern an der abgewandten Seite etwas schwächer als an der zugekehrten Seite, tritt auch bei ihr eine Präzessionsbewegung auf, welche die Richtung ihrer Umdrehungsachse, ebenso wie beim Kreisel, allmählich ändert. Die Erdachse bewegt sich auf einem Kegelmantel. Daß sie zur Zeit auf den Polarstern hinweist, ist demnach ein vorübergehender Zustand. Sie nimmt im Laufe der Zeit eine andere Richtung an und vollendet in 26000 Jahren einen vollen Umlauf. Der Öffnungswinkel des Kegels, auf dessen Mantel die Erdachse sich bewegt, ist gleich der doppelten Schiefe der Ekliptik, d. h. des Winkels, den die Äquatorialebene der Erde mit der Ebene der Erdbahn bildet, nämlich 47^0. Der Anblick des Himmels ändert sich also im Laufe der Jahrtausende sehr erheblich und war im Altertum merklich anders als heute. So ging zur Zeit Homers der zum Großen Bären gehörige Stern η ursae majoris am Horizonte in Griechenland nie unter[1]), während das heute der Fall ist.

Die Erddrehung bringt an den mit ihr bewegten Körpern eine Reihe von sehr lehrreichen Trägheitswirkungen hervor. Wir denken uns die Erde zunächst einmal als eine vollkommene Kugel. In der Breite φ befinde sich auf der Erdoberfläche eine Masse m (Abb. 33a). Auf diese wirkt erstens die nach dem Erdmittelpunkt gerichtete Schwerkraft k, zweitens die radial von der Erdachse weggerichtete Zentrifugalkraft k_z (Standpunkt des mitrotierenden Beobachters, § 38),

[1]) Vgl. Odyssee, 5. Gesang, 274—276, und Ilias, 17. Gesang, 487—489, wo es von diesem Stern heißt: Οἴη δ' ἄμμορος ἐστὶ λοετρῶν Ὠκεανοῖο. Er allein ist des Bades im Ozean nicht teilhaftig.

deren Größe man leicht zu $k_z = m r \omega^2 \cos\varphi$ berechnet (r = Erdradius). Die Schwerkraft liefert die erforderliche Zentripetalkraft. Durch Zerlegung der Zentrifugalkraft in eine radiale und eine tangentiale Komponente erkennt man, daß sie einerseits der Schwerkraft entgegenwirkt, andererseits die Masse m in Richtung auf den Äquator zu treiben sucht. Abb. 33b beleuchtet dies von einer etwas anderen Seite, indem die Schwerkraft und die Zentrifugalkraft zu einer Resultierenden vereinigt sind. Diese steht nicht senkrecht auf der Kugelfläche, hat also eine tangentiale, auf den Äquator hin gerichtete Komponente. Dies muß zur Folge haben, daß jeder auf der Kugelfläche befindliche, frei bewegliche Körper in Richtung auf den Äquator hin getrieben wird. Es kann auf einer genau kugelförmigen rotierenden Erde kein Gleichgewicht bestehen. Ein solches ist erst dann möglich, wenn die Resultierende der Schwerkraft und der Zentrifugalkraft auf der Erdoberfläche senkrecht steht. Die Berechnung ergibt, daß die Erde in diesem Falle die Gestalt eines abgeplatteten Rotationsellipsoids haben muß, wie das auch tatsächlich der Fall ist (Abb. 33c). In der Abb. 33 ist die Zentrifugalkraft der Deutlichkeit halber viel zu groß im Verhältnis zur Schwerkraft gezeichnet. Sie beträgt am Äquator, wo sie am größten ist, nur etwa $^1/_{300}$ der Schwerkraft. Daher ist auch die Abplattung nur sehr gering. Die Erde hat ihre abgeplattete Form bereits angenommen, als sie sich noch im flüssigen Zustand befand. Wäre aber der feste Erdkörper selbst genau kugelförmig, so würde doch die Oberfläche des Weltmeers, vorausgesetzt daß es genügend Wasser enthielte — was nicht der Fall ist —, die abgeplattete Gestalt zeigen.

Bewegt sich ein Körper längs eines Breitengrades von Westen nach Osten, also gleichsinnig mit der Erddrehung, so ist seine Winkelgeschwindigkeit ω größer, als die der Erde, infolgedessen ist bei ihm die Zentrifugalkraft größer als bei einem auf der Erde ruhenden Körper, sein Gewicht erscheint um einen größeren Betrag vermindert, umgekehrt bei einem von Osten nach Westen bewegten Körper. Diese Wirkung hat durch genaue Pendelversuche auf schnell fahrenden Schiffen nachgewiesen werden können.

Bewegt sich ein Körper auf der nördlichen Halbkugel von Süden nach Norden, so besitzt er eine größere Geschwindigkeitskomponente in der West-Ostrichtung als der Teil der Erdoberfläche, in den er gelangt, denn die Geschwindigkeit der einzelnen Punkte der Erdoberfläche nimmt vom Äquator zum Pol ab. Ist wieder r der Erdradius, ω die Winkelgeschwindigkeit der Erde, so ist die Geschwindigkeit eines sich in der geographischen Breite φ mit der Erde drehenden Körpers $v = r\omega\cos\varphi$. Bewegt er sich nun in Richtung eines Längengrades aus der Breite φ bis in die Breite φ', so gerät er in eine Gegend, wo die Teile der Erdoberfläche eine andere West-Ostgeschwindigkeit haben als er, nämlich $v' = r\omega\cos\varphi'$. Der Körper hat also gegenüber der Erdoberfläche eine Geschwindigkeit in west-östlicher Richtung $u = v - v' = r\omega(\cos\varphi - \cos\varphi')$. Bewegt er sich z. B. auf der nördlichen Halbkugel in nördlicher Richtung, so eilt er der Erddrehung voraus und umgekehrt bei Bewegung in südlicher Richtung. Allgemein bewirkt Bewegung vom Äquator in Richtung auf einen der Pole eine Voreilung, die umgekehrte Bewegung eine Nacheilung des Körpers gegenüber der Erddrehung. Das macht sich z. B. daran bemerkbar, daß Geschosse in den bezeichneten Richtungen von ihrer Bahn abweichen und daß bei nordsüdlich verlaufenden Eisenbahnlinien auf der nördlichen Halbkugel die in der Fahrtrichtung rechts liegende, auf der südlichen Halbkugel die links liegende Schiene etwas stärker abgenutzt wird, weil sie diese Abweichung zu verhindern haben. Entsprechende Erscheinungen zeigen sich in der verschieden starken Erosion der beiden Ufer von Flüssen, die etwa in Richtung eines Meridians fließen.

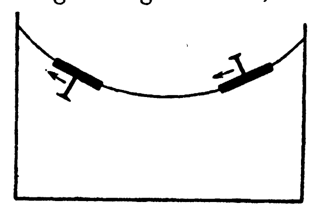
Ein von einem hohen Turm herabfallender Körper fällt nicht genau lotrecht hinab, sondern etwas schräge in der Richtung der Erddrehung. Denn er hat auf der Spitze des Turmes wegen der größeren Entfernung von der Erdachse eine größere West-Ostgeschwindigkeit als der Fuß des Turmes.

Ein wichtiger Beweis für die Drehung der Erde ist auf Grund der Trägheitskräfte, nachdem die Erscheinung bereits 1661 von VIVIANI beobachtet worden war, von FOUCAULT geliefert worden (FOUCAULTscher Pendelversuch 1850). Man befestige an einem langen Faden oder dünnen Draht einen schweren Körper. Läßt man den Körper Pendelschwingungen ausführen, so beobachtet man, daß die Schwingungsebene sich allmählich im Raume dreht, und zwar entgegen der Erddrehung und im Laufe einer Stunde um einen Winkel, der gleich $15^0 \sin \varphi$ ist, wenn φ die geographische Breite des Beobachtungsortes ist. Die Schwingungsebene dreht sich also in 24 Stunden am Äquator um 0^0, in Berlin um $285^0\,36'$, an den Polen um 360^0. Bei einem ausreichend langen Pendel kann man die Drehung der Schwingungsebene schon nach wenigen Schwingungen sichtbar machen, indem man mit einer Bogenlampe ein Schattenbild des Fadens auf eine weiße Wand wirft und das Pendel anfänglich senkrecht zur Wand schwingen läßt. Man bemerkt bald, daß der Schatten anfängt, nach beiden Seiten auszuschlagen, ein Beweis für die Drehung der Schwingungsebene. Die Theorie dieser Erscheinung ist mit dem Versuch im Einklang.

Alle vorstehend besprochenen Erscheinungen lassen sich auch so verstehen, daß bewegliche Körper infolge ihrer Trägheit stets diejenige Bahn beschreiben, die die kleinste, mit den gegebenen Bedingungen verträgliche Krümmung besitzt.

Die besonderen Trägheitswirkungen, die an Massen auftreten, die einem rotierenden System angehören und sich relativ zu diesem bewegen, nennt man Coriolis-Kräfte.

50. **Die Polflucht der Kontinente.** Bei der Betrachtung eines Globus fällt auf, daß die Kontinente sich im wesentlichen um die äquatorialen und mittleren Breiten gruppieren, während in den Polarregionen nur wenig Festland vorhanden ist. WEGENER erklärt dies als Folge der Zentrifugalkraft. Man kann die Kontinente als Schollen betrachten, die auf dem Magma schwimmen, auf dem sie, wenn auch nur schwer und langsam, beweglich sind. Der Schwerpunkt einer solchen Scholle liegt höher als der Schwerpunkt des von ihm verdrängten Magmas. Wäre die Scholle nicht vorhanden, so bestände an jener Stelle infolge der ellipsoidischen Gestalt der Erde Gleichgewicht, und die dort befindlichen Magmamassen hätten gerade diejenige Zentrifugalkraft, die nötig ist, um die Resultierende von Schwerkraft und Zentrifugalkraft senkrecht zur Erdoberfläche zu stellen. Da aber der Schwerpunkt der Scholle höher liegt, als er ohne Vorhandensein der Scholle beim Magma liegen würde, er sich also weiter außen befindet, als dieser, so wirkt auf die Scholle eine größere Zentrifugalkraft, als an jener Stelle zulässig ist, und die Resultierende von Schwerkraft und Zentrifugalkraft steht nicht senkrecht zur Erdoberfläche, sondern geneigt. Sie besitzt eine zur Erdoberfläche tangentiale, auf den Äquator hin gerichtete Komponente, die die Scholle in der gleichen Richtung treibt (Polflucht der Kontinente, WEGENER). Läge der Schwerpunkt der Schollen tiefer als der des verdrängten Magmas, so würden die Kontinentalschollen polwärts getrieben werden.


Abb. 34. Zur Erläuterung der Polflucht. Nach LELY.

Dieses Verhalten wird sehr hübsch durch folgenden Versuch veranschaulicht. Abb. 34 stellt ein Gefäß mit Wasser dar, das in schnelle Rotation versetzt werden kann (vgl. hierzu § 88). In das Wasser wird ein Kork mit einem Nagel gesetzt.

Steht der Nagel aufwärts, so wird der Kork bei Rotation nach innen getrieben steht er abwärts, so wandert der Kork nach außen. Das erklärt sich nach Vorstehendem ohne weiteres daraus, daß im ersten Falle die am Schwerpunkt des Systems Kork-Nagel angreifende Zentrifugalkraft kleiner ist, als sie es für den Schwerpunkt des vom Kork verdrängten Wassers wäre, im zweiten Falle aber größer. Daß die Dinge hier bezüglich dessen, was bei den Kontinentalschollen über die relative Lage der Schwerpunkte gesagt wurde, gerade umgekehrt liegen, beruht darauf, daß die Krümmung der Wasserfläche umgekehrt ist, wie die der Erdoberfläche. Die Verhältnisse bei der Erde werden anschaulich, wenn man den Luftraum oberhalb des Wassers mit der Erde identifiziert.

51. **Elastischer und unelastischer Stoß.** Zur Veranschaulichung des Energieprinzips und des Satzes von der Erhaltung der Bewegungsgröße behandeln wir im folgenden als ein besonders lehrreiches und einfaches Beispiel den Zusammenstoß zweier Körper, und zwar betrachten wir zwei Kugeln, welche sich mit verschiedener Geschwindigkeit auf der gleichen Geraden bewegen und zentral zusammenstoßen (Abb. 35).

Beim Zusammenstoß wird stets ein mehr oder weniger großer Teil der kinetischen Energie der beiden stoßenden Körper in andere Energieformen (Wärme, dauernde Formänderung der stoßenden Körper, Schall) verwandelt. Die Körper haben dann nach dem Stoß zusammen eine kleinere kinetische Energie als vorher. Man hat zwei Grenzfälle zu unterscheiden, den vollkommen elastischen Stoß, bei dem verschwindend wenig kinetische Energie umgewandelt wird, und den vollkommen unelastischen Stoß, bei dem ein Maximum von Energieumwandlung stattfindet und die beiden Körper nach dem Stoß nicht wieder auseinandergehen, sondern ihren Weg gemeinsam fortsetzen. Der erste Fall wird mit großer Annäherung etwa durch zwei gute Kugellagerkugeln aus Stahl, der zweite durch zwei Kugeln aus Glaserkitt verwirklicht.

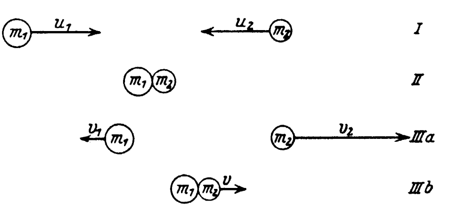


Abb. 35. Zentraler Stoß zweier Massen. I vor dem Stoß, II beim Stoß, IIIa nach dem Stoß (elastisch), IIIb nach dem Stoß (unelastisch). Es ist angenommen $m_2 = m_1/2$, $u_2 = -u_1$, daher elastisch $v_1 = -u_1/3$, $v_2 = +5u_1/3$, unelastisch $v = +u_1/3$

1. Der elastische Stoß. Hierbei ist sowohl die Summe der Bewegungsgrößen (Impulssatz § 33), wie der kinetischen Energien (Energieprinzip § 42) nach dem Stoß die gleiche wie vorher. Es seien m_1 und m_2 die beiden stoßenden Massen, u_1 und u_2 ihre Geschwindigkeiten vor dem Stoß, v_1 und v_2 diejenigen nach dem Stoß. Dann folgt aus dem Energieprinzip

$$\tfrac{1}{2}\, m_1 u_1^2 + \tfrac{1}{2}\, m_2 u_2^2 = \tfrac{1}{2}\, m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2}\, m_2 v_2^2, \tag{36}$$

und aus dem Impulssatz

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2. \tag{37}$$

Hieraus folgt:

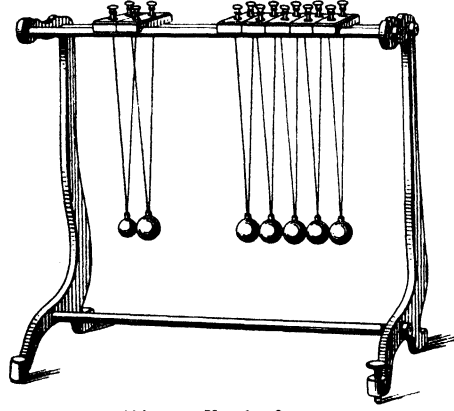
$$v_1 = \frac{u_1 (m_1 - m_2) + 2\, u_2 m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{und} \quad v_2 = \frac{u_2 (m_2 - m_1) + 2\, u_1 m_1}{m_1 + m_2}. \tag{38}$$

Wir wollen jetzt z. B. annehmen, daß die beiden Massen gleich groß sind, und daß die zweite Masse vor dem Stoß ruhte, also $u_2 = 0$ ist. Dann ergibt sich aus den vorstehenden Gleichungen $v_1 = 0$ und $v_2 = u_1$. Die beiden Massen haben also in diesem Spezialfall ihre Geschwindigkeiten vertauscht.

Zur Demonstration derartiger Erscheinungen kann man sich des in Abb. 36 dargestellten Apparates bedienen, an dem eine Anzahl von guten Stahlkugeln an

Doppelschnüren aufgehängt sind. Von besonderem Interesse ist folgender Versuch. Man hebe eine oder mehrere Kugeln auf der einen Seite und lasse sie gegen die übriggebliebenen stoßen. Es werden dann am Ende der Kugelreihe genau so viele Kugeln abgestoßen, wie am Anfang dagegen gestoßen waren, und zwar kommen die stoßenden Kugeln zur Ruhe, während die fortfliegenden die gleiche Geschwindigkeit haben, wie die stoßenden vorher hatten. Die Zahl der stoßenden Kugeln sei a, ihre Geschwindigkeit u, die der fortfliegenden b und v. Dann folgt aus dem Energieprinzip $a \cdot \frac{1}{2} m u^2 = b \cdot \frac{1}{2} m v^2$ und aus dem Impulssatz $a \cdot mu = b \cdot mv$. Hieraus ergibt sich aber $u = v$ und $a = b$, wie es der Versuch zeigt. (Daß nicht etwa eine oder mehrere der stoßenden Kugeln reflektiert werden, liegt daran, daß die Fortpflanzung des Stoßes durch die Kugelreihe eine endliche Zeit erfordert.)

2. Der unelastische Stoß. Auch in diesem Falle bleibt der Impulssatz gültig, da zwischen den stoßenden Körpern nur innere Kräfte wirken. An Stelle des Energieprinzips aber kommt als neue Bedingung hinzu, daß die beiden Körper nach dem Stoß die gleiche Geschwindigkeit v haben. Es ist daher


Abb. 36. Kugelstoßapparat.

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = (m_1 + m_2)\, v. \quad (39)$$

Hieraus folgt:

$$v = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2}. \quad (40)$$

Ist z. B. $m_1 = m_2 = m$ und $u_2 = 0$, so ergibt sich $v = u_1/2$. Die kinetische Energie der beiden Körper zusammen ist in diesem Spezialfall nach dem Stoß gleich $\frac{1}{2}(2m)\left(\frac{1}{2}u_1\right)^2 = \frac{1}{4} m u_1^2$, während sie vor dem Stoß $\frac{1}{2} m u_1^2$ betrug. Es ist also im angenommenen Falle die Hälfte der kinetischen Energie in andere Energieformen (vor allem in Wärme und Formänderungsarbeit) umgewandelt.

Zur Demonstration des unelastischen Stoßes befestige man an der stoßenden Stahlkugel des in Abb. 36 dargestellten Apparates ein wenig Glaserkitt, so daß die Kugeln nach dem Stoß beisammen bleiben.

Diese Überlegungen zeigen besonders eindringlich die Bedeutung allgemeiner Prinzipien für die Berechnung physikalischer Erscheinungen. In den vorliegenden Fällen genügte die Anwendung des Energieprinzips bzw. des Impulssatzes und die Voraussetzung, daß der Stoß zentral erfolgt, vollkommen, um den Ablauf des in Frage stehenden Vorganges zu berechnen, mit alleiniger Ausnahme des eigentlichen Stoßvorganges bei der Berührung der stoßenden Körper, der uns hier aber auch gar nicht interessierte.

Wegen der großen prinzipiellen Bedeutung derartiger Überlegungen wollen wir auch den allgemeineren Fall eines elastischen Stoßes beliebiger Stoßrichtung an Hand einer graphischen Darstellung betrachten (Abb. 37). Zwei Massen m_1 und m_2 mit den Bewegungsgrößen $m_1 u_1$ und $m_2 u_2$ bewegen sich so, daß sie zusammenstoßen, wenn ihr gemeinsamer Schwerpunkt S (§ 34) sich in Z befindet. Sie laufen also beide auf Z zu. Die ganze Bewegungsgröße des aus den beiden Körpern bestehenden Systems finden wir, indem wir vom Schwerpunkt aus ihre Bewegungsgrößen vektoriell (§ 11) addieren (der Pfeil R). Wir betrachten nunmehr nach dem Stoß den Augenblick, wo sich der gemeinsame Schwerpunkt in S' befindet. Die Summe R der beiden Bewegungsgrößen hat sich nach

Größe und Richtung nicht geändert (§ 33). Wir nehmen jetzt an, daß die (uns unbekannten) Einzelheiten des Stoßvorganges dazu geführt hätten, daß die Masse m_1 sich in einer zu $S'A$ parallelen Richtung bewege. Wir müssen nun, um Größe und Richtung der Bewegungsgrößen der beiden Massen nach dem Stoß zu finden, die gesamte Bewegungsgröße so in zwei Komponenten zerlegen, daß die eine in die Richtung $S'A$ fällt. Von den unendlich vielen verschiedenen Arten, auf die das möglich ist, ist diejenige zu wählen, bei der die Geschwindigkeiten so groß ausfallen, daß das Energieprinzip erfüllt ist. (Bei nicht vollkommen elastischem Stoß ist die beim Stoß verlorene Energie zu berücksichtigen.) Auf diese Weise gelange man etwa zu der in Abb. 37 dargestellten Konstruktion. Den Ort, an dem sich die beiden Massen zur Zeit befinden, finden wir, indem wir einmal durch Z (denn dort kommen sie her) Parallele zu den beiden neuen Geschwindigkeitsrichtungen legen und durch S' eine Gerade derart legen, daß die Abstände ihrer Schnittpunkte mit diesen Parallelen von S' sich umgekehrt wie die beiden Massen verhalten, da ja S' der Schwerpunkt dieser beiden Massen ist. Diese Schnittpunkte sind die derzeitigen Orte von m_1 und m_2. Damit ist der Zustand nach dem Stoß und der weitere Verlauf vollständig bestimmt.

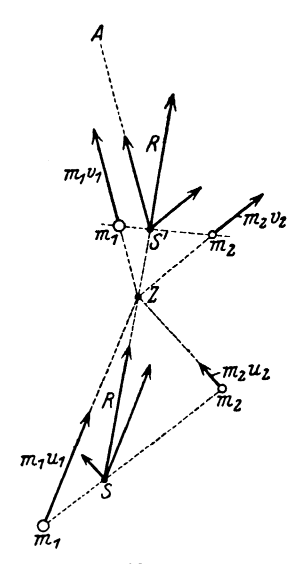


Abb. 37. Zur Theorie des elastischen Stoßes.

Wir haben bisher den Spezialfall angenommen, daß die beiden stoßenden Körper nur im Augenblick ihrer tatsächlichen Berührung eine Kraft aufeinander ausüben, sich aber sonst, wegen Abwesenheit anderer Kräfte, geradlinig und gleichförmig bewegen. Wir können aber in genau der gleichen Weise auch Fälle betrachten, bei denen die beteiligten Körper Kräfte aufeinander ausüben, die eine Funktion ihres Abstandes sind (Schwerkraft, elektrische Anziehung oder Abstoßung). Solange sich die Körper noch in großem gegenseitigen Abstande voneinander befinden, also ausreichend lange vor und nach dem Stoß, sind diese Kräfte sehr klein, und der Vorgang ist von dem oben betrachteten grundsätzlich nicht verschieden. Er unterscheidet sich von ihm nur während der Dauer des eigentlichen Stoßvorganges, der sich hier über eine längere Zeit erstreckt, nämlich über die Zeit, während derer sich die Körper im Bereich gegenseitiger Kräfte von merklicher Stärke befinden. Zur Berechnung des nach dem Stoß schließlich eintretenden Endzustandes genügt aber wieder die Kenntnis des Anfangszustandes vor dem Stoß und dessen, was man auch hier den Grad der „Elastizität" des Stoßes nennen kann, nämlich des bei dem Stoß eintretenden Energieverlustes der beiden Körper, sowie die Kenntnis der Größe oder Richtung der Geschwindigkeit eines der beiden Körper nach dem Stoß. In allen Fällen bleibt die Summe der Bewegungsgrößen der stoßenden Körper nach Größe und Richtung konstant, und das Energieprinzip gilt in der Form, daß die Endenergie der stoßenden Körper zuzüglich des beim Stoß eingetretenen Energieverlustes gleich der Anfangsenergie ist. Bei einem solchen Zusammenstoß ist es gar nicht nötig, daß die beteiligten Körper in tatsächliche körperliche Berührung kommen. Es genügt, daß sie in ihre gegenseitigen Anziehungs- bzw. Abstoßungsbereiche geraten und unter der Wirkung dieser Kräfte aus ihren ursprünglich geradlinigen Bahnen abgelenkt werden, um schließlich nach Durchlaufen des Kraftbereichs wieder in geradlinige Bahnen einzumünden. Zusammen-

stöße der geschilderten Art sind z. B. die Zusammenstöße der Moleküle eines Gases (§ 94).

Besitzen die an einem Zusammenstoß beteiligten Körper außer ihrer kinetischen Energie auch Rotationsenergie, so ist in die Energiebilanz auch die Rotationsenergie mit einzubeziehen und als weitere Bedingung der Satz von der Erhaltung des Drehimpulses (§ 46) anzusetzen.

52. **Die Dimensionen der mechanischen Größen.** Alle mechanischen Größen lassen sich aus den drei Grundgrößen des CGS-Systems, der Länge, der Zeit und der Masse, ableiten, und entsprechend können ihre Einheiten in den drei Grundeinheiten, dem cm, dem g und der sec, ausgedrückt werden, und zwar in Form von Potenzprodukten dieser Einheiten. Man sagt, die mechanischen Größen haben eine bestimmte Dimension im CGS-System. Entsprechend den drei Grundgrößen gibt es im CGS-System auch drei Grunddimensionen, die Dimensionen der Länge, der Zeit und der Masse, die man mit $|l|$, $|t|$ und $|m|$ bezeichnet. Die Dimensionen der abgeleiteten Größen sind daher Potenzprodukte aus den drei Grunddimensionen von der Form $|m^a\, l^b\, t^c|$, wobei a, b und c positive oder negative Zahlen sind, die auch gleich 0 sein können. Eine reine Zahl hat die Dimension $|z| = |m^0\, l^0\, t^0|$, denn sie ist von den Einheiten unabhängig. Die Dimensionen der wichtigsten mechanischen Größen sind in der Tabelle 1 zusammengestellt.

Tabelle 1. Dimensionen und Maßeinheiten der mechanischen Größen.

Masse	$\|m\|$	g	Energie, Arbeit	$\|m l^2 t^{-2}\|$	$g\,cm^2\,sec^{-2}$
Länge	$\|l\|$	cm	Leistung	$\|m l^2 t^{-3}\|$	$g\,cm^2\,sec^{-3}$
Zeit	$\|t\|$	sec	Winkelgeschwindigkeit .	$\|t^{-1}\|$	sec^{-1}
Geschwindigkeit	$\|l t^{-1}\|$	$cm\,sec^{-1}$	Winkelbeschleunigung .	$\|t^{-2}\|$	sec^{-2}
Beschleunigung .	$\|l t^{-2}\|$	$cm\,sec^{-2}$	Schwingungszahl . . .	$\|t^{-1}\|$	sec^{-1}
Kraft	$\|m l t^{-2}\|$	$g\,cm\,sec^{-2}$	Trägheitsmoment . . .	$\|m l^2\|$	$g\,cm^2$
Druck	$\|m l^{-1} t^{-2}\|$	$g\,cm^{-1}\,sec^{-2}$	Drehmoment	$\|m l^2 t^{-2}\|$	$g\,cm^2\,sec^{-2}$
Bewegungsgröße	$\|m l t^{-1}\|$	$g\,cm\,sec^{-1}$	Drehimpuls	$\|m l^2 t^{-1}\|$	$g\,cm^2\,sec^{-1}$

6. Kapitel.

Die Schwerkraft.

53. **Schwerkraft und Beschleunigung durch die Schwere.** Schwerkraft oder Gravitation ist diejenige Kraft, welche alle Körper in der Richtung auf den Erdmittelpunkt zieht. Es gibt keine Körper, die ihr nicht unterworfen wären. Die Schwere ist eine ebenso allgemeine Eigenschaft der Materie wie die Trägheit. Sie äußert sich bei ruhenden Körpern in einem Druck oder Zug auf diejenigen anderen Körper, auf welchen sie liegen oder an denen sie sonst befestigt sind. Bei frei beweglichen Körpern ist sie die Ursache des Fallens, also einer beschleunigten Bewegung.

Die Schwerkraft ist nicht an allen Punkten der Erdoberfläche gleich groß, sie ist um so größer, je näher sich der betreffende Körper dem Erdmittelpunkt befindet. Sie ist also größer an den Polen als am Äquator (wegen der Abplattung der Erde) und größer im Niveau des Meeres als in größeren Höhen. Doch sind die Unterschiede im Bereich der Erdoberfläche sehr gering (s. Gl. 1).

Genaue Versuche zeigen, daß die Beschleunigungen, die verschiedene Körper durch die Schwerkraft erfahren, völlig gleich sind und ganz unabhängig von der Art der Körper. Das bedeutet, daß alle Körper, die man aus gleicher Höhe frei herabfallen läßt, gleich schnell herabfallen, vorausgesetzt, daß keine

andere Kraft als die Schwere auf sie wirkt (GALILEI 1590). Daß der Augenschein (fallender Bleiklotz und fallende Feder) dem zu widersprechen scheint, rührt daher, daß beim Fall in Luft auf die Körper außer der Schwerkraft die Luftreibung wirkt, welche verschiedenartige Körper ganz verschieden stark hemmt. Man lasse von einem Turm oder möglichst hoch gelegenen Stockwerk einen Mauerstein und einen Bleiklotz von verschiedenem Gewicht gleichzeitig herabfallen. Auf diese wirkt die Reibung im Verhältnis zur Schwerkraft nur wenig. Sie kommen gleichzeitig oder doch nahezu gleichzeitig am Erdboden an. Noch besser zeigt man den gleich schnellen freien Fall der Körper, z. B. einer Bleikugel und einer Feder, indem man sie in einem Glasrohr herabfallen läßt (Abb. 38), aus dem man mit einer Luftpumpe die Luft möglichst entfernt hat.

Die Beschleunigung, die die Körper beim freien Fall auf der Erde erfahren, beträgt

$$g = 980{,}62\,(1 - 0{,}00264 \cos 2\varphi - 0{,}0000003\,h)\ \mathrm{cm/sec^2}, \qquad (1)$$

wobei φ die geographische Breite und h die Höhe über dem Meeresspiegel in m bedeutet. In runder Zahl ist also in mittleren Breiten

$$\boldsymbol{g = 981\ \mathrm{cm/sec^2}}.$$

54. **Die schwere Masse.** Die Tatsache, daß alle Körper schwer sind, d. h. Gewicht haben, schreibt man einer den Körpern innewohnenden Eigenschaft zu, die man — aus Gründen, die sogleich erörtert werden — ebenso wie die Ursache der Trägheit als Masse, und zwar genauer als schwere Masse, bezeichnet. Wir wollen sie vorerst mit m' bezeichnen. Die schwere Masse eines Körpers setzen wir der auf ihn wirkenden Schwerkraft proportional, man kann sie also nach Festsetzung ihrer Einheit mittels der Schwerkraft messen, etwa indem man die Dehnung einer Spiralfeder beobachtet, an der der Körper frei hängt.

Für einen Körper von der schweren Masse m' und der trägen Masse m ist die Schwerkraft erstens nach dem zweiten NEWTONschen Axiom (§ 23) gleich $m \cdot g$ dyn ($g = 981$ cm/sec^2), zweitens aber nach der vorstehenden Definition der schweren Masse proportional m', also

Abb. 38. Alle Körper fallen gleich schnell.

$$m g = m' a, \qquad (2)$$

wobei a eine Konstante ist. Da g für alle Körper am gleichen Ort den gleichen Wert hat, so hat das Verhältnis $\frac{m'}{m} = \frac{g}{a}$ für alle Körper ebenfalls den gleichen Wert. Träge und schwere Masse jedes Körpers sind einander also proportional. Man ist übereingekommen, dieses Verhältnis gleich 1 zu setzen, also die schwere Masse eines Körpers der trägen Masse unmittelbar gleich zu setzen. (Die Erfahrung zeigt uns nur, daß m' proportional zu m ist. Da wir aber über die Maßeinheit der schweren Masse frei verfügen können, so ist nichts im Wege, diese so zu wählen, daß $m = m'$ wird.) Es ist daher die Einheit der schweren Masse im CGS-System auch das Gramm. Wir werden künftig zwischen träger und schwerer Masse in der Regel nicht mehr unterscheiden.

Die Gleichheit der trägen und der schweren Masse der Körper, d. h. die Tatsache, daß ein Körper sich um so schwerer in Bewegung setzen läßt, je größer sein Gewicht ist, ist uns aus der alltäglichen Erfahrung derart geläufig, daß dem Nichtphysiker meist überhaupt nicht zum Bewußtsein kommt, daß an sich zwischen träger und schwerer Masse grundsätzlich unterschieden werden muß. Man bezeichnet daher im täglichen Leben einen Körper, der sich, obgleich er frei beweglich ist, auf einer horizontalen Ebene nur schwer in Bewegung setzen läßt, als „schwer", obgleich die diesem Urteil zugrunde liegende Erfahrungstatsache

mit der Schwerkraft überhaupt nichts zu tun hat. Die Gleichheit (bzw. strenge Proportionalität) der trägen und schweren Masse, die uns trotzdem zu diesem Urteil berechtigt, ist keineswegs an sich selbstverständlich, sondern eine reine Erfahrungstatsache. Die genaueste Bestätigung liefern Versuche mit dem Pendel (§ 60).

Die Tatsache der Gleichheit der trägen und der schweren Masse bildet die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie von EINSTEIN (§ 540).

55. **Gewicht.** Die Kraft, die auf eine schwere Masse infolge der Gravitation wirkt, nennt man ihr Gewicht. Es wird, als eine Kraft, im CGS-System in dyn gemessen. Die Kraft, die ein Körper von 1 g Masse infolge der Schwere erfährt, und die er daher, wenn er z. B. auf einer festen Unterlage steht, auf diese ausübt, ist gleich dem Produkt mg aus Masse und Schwerebeschleunigung, also im Meeresniveau gleich 981 dyn. Allgemein ist die dem Gewicht eines Körpers von der Masse m Gramm entsprechende Kraft gleich mg dyn. Es ist aber daneben, und insbesondere im täglichen Leben, üblich, als Krafteinheit bei Gewichtsangaben statt des dyn das Gewicht einer Masse von 1 g (bzw. 1 kg oder mg) zu benutzen, und diese Gewichts- (Kraft-) Einheit wie die Masseneinheit als 1 Gramm zu bezeichnen. Das Gewicht einer Masse von m Gramm ist eine Kraft und daher von der Masse m Gramm selbst wohl zu unterscheiden. Wir werden deshalb, wenn es sich um die Bezeichnung eines Gewichts handelt, die Einheitsbezeichnung mit einem Stern versehen (g*, kg*, mg*). g bezeichnet also die Grammasse, g* das Grammgewicht, und es ist im CGS-System

$$1\ \mathrm{g}^* = 981\ \mathrm{dyn}.$$

Da g von der Entfernung des Körpers vom Erdmittelpunkt abhängt, so ändert sich auch das Gewicht eines Körpers mit der Höhe, während seine Masse konstant bleibt. Auf hohen Bergen ist ein Körper ein wenig leichter (aber nicht träger!) als in der Ebene, und zwar auf je 1000 m Höhe um rund $^1/_{3000}$. In 3000 m Höhe wiegt 1 kg so viel wie 999 g in der Ebene, also 999 g*. Diese Gewichtsabnahme ist aber mit einer Wage, welche das Gewicht eines Körpers mittels aufgelegter Gewichtsstücke feststellt, nicht zu bemerken, weil die Gewichtsstücke mit der Höhe genau ebenso an Gewicht abnehmen. Wohl aber könnte man sie mit einer sehr empfindlichen Federwage feststellen, da ja die Kraft einer Feder durch die Höhe nicht verändert wird.

Für das tägliche Leben ist die Abnahme des Gewichts mit der Höhe ohne Bedeutung. Für die im Handelsverkehr vorkommenden Wägungen spielt sie einerseits wegen ihrer Geringfügigkeit keine Rolle. Andererseits aber dienen diese Wägungen ja eigentlich gar nicht der Feststellung eines bestimmten Gewichts, sondern einer bestimmten Substanzmenge, also einer Masse. Ein Käufer würde daher, allerdings vorausgesetzt, daß die Wägung mittels Gewichtsstücken vorgenommen wird, ohne Rücksicht auf die Höhe bei Abwägung, z. B. von 1 Pfund Butter auf einem hohen Berge die gleiche Menge Substanz zugewogen erhalten, die er in der Ebene bekommen würde; und nur darauf kommt es ihm an.

56. **Spezifisches Gewicht. Dichte. Spezifisches Volumen.** Bildet man für eine beliebige Menge eines einheitlichen Stoffes das Verhältnis

$$\frac{k}{V} = \sigma\ \mathrm{g}^*/\mathrm{cm}^3 \qquad (3)$$

aus ihrem Gewicht k in g* und ihrem Volumen V in cm³, so ergibt sich für diesen Stoff bei gleichen Bedingungen (gleicher Druck und gleiche Temperatur) stets der gleiche Wert σ. Diese Größe heißt das spezifische Gewicht des betreffenden Stoffes. Seine Maßzahl ist nach Gl. 3 gleich derjenigen des Gewichts von

1 cm³ des Stoffes. Es ist also das spezifische Gewicht als das Gewicht der Volumeinheit definiert.

Gemäß der Definition des Gramm (§ 23) ist das spezifische Gewicht von Wasser von 4° gleich 1 g*/cm³. Das spezifische Gewicht einer Substanz ist also zahlenmäßig gleich dem Verhältnis des Gewichtes einer bestimmten Menge derselben zu dem Gewicht einer ihr an Volumen gleichen Menge Wasser von 4°. Es wird daher das spezifische Gewicht eines Körpers auch oft als das Verhältnis seines Gewichts zum Gewicht des gleichen Volumens Wasser definiert. In diesem Falle wäre also das spezifische Gewicht (als Verhältnis) eine reine Zahl. Diese Definition ist nicht zu empfehlen.

Da das Gewicht eines Körpers nach § 53 von der Höhe über dem Meeresspiegel abhängt, so ist, genau genommen, das spezifische Gewicht auch von der Höhe, wenn auch nur sehr wenig, abhängig.

In § 23 haben wir bereits die Dichte eines Stoffes als die Masse der Volumeinheit des Stoffes definiert,

$$\frac{m}{V} = \varrho \text{ g/cm}^3. \tag{4}$$

Demnach hat (von den sehr kleinen Änderungen des Gewichts mit der Höhe abgesehen) das durch Gl. 3 definierte spezifische Gewicht die gleiche Maßzahl wie die Dichte. Es muß aber zwischen diesen beiden Größen streng unterschieden werden, denn sie sind Größen von verschiedener physikalischer Dimension. Da das Gewicht k einer Masse m gleich mg dyn ist, so ist das spezifische Gewicht im CGS-System gleich mg/V dyn/cm³, so daß in diesem System

$$\sigma_{CGS} = \varrho g \text{ dyn/cm}^3. \tag{5}$$

Die Dichte ϱ ist, wie die Masse selbst, von der Höhe unabhängig.

Als spezifisches Volumen V_s einer Substanz bezeichnet man den reziproken Wert der Dichte, nämlich das Volumen der Masseneinheit, also von 1 g.

Es ist also die Masse einer Substanzmenge von Volumen V cm³

$$m = \varrho V \text{ g}, \tag{6a}$$

das Gewicht einer Substanzmenge von Volumen V cm³

$$k = \sigma V \text{ g}^*, \text{ bzw. } \varrho g V \text{ dyn}, \tag{6b}$$

das Volumen einer Substanzmenge von der Masse m g

$$V = V_s m \text{ cm}^3, \tag{6c}$$

ferner ist

$$V_s = \frac{1}{\varrho} \text{ cm}^3/\text{g}. \tag{7}$$

Das spezifische Gewicht einfach geformter Körper kann man direkt durch Wägung und Ausmessung des Volumens bestimmen. Bei komplizierter geformten Körpern muß man sich anderer Methoden bedienen (§ 89).

Tabelle 2. Spezifische Gewichte in g*cm⁻³.

Aluminium	2,7	Alkohol	0,791
Blei	11,3	Wasser	0,9997
Eisen	7,6—7,8	Quecksilber	13,595
Gold	19,3	Wasserstoff	0,00008985
Kupfer	8,9	Stickstoff	0,0012507
Natrium	0,97	Sauerstoff	0,0014291
Platin	21,4	Luft	0,0012928
Glas	2,4—2,6	Kohlensäure	0,0019768
Benzol	0,881	Helium	0,0001785
Äther	0,717		

Die Tabellenwerte der spezifischen Gewichte der festen Körper und Flüssigkeiten gelten für 0° C, die der Gase für 0° C und 1 Atm. Druck.

57. Bewegungen im Schwerefeld der Erde. Fall und Wurf. Erteilt man einem frei im Raum beweglichen Körper eine bestimmte Geschwindigkeit in beliebiger Richtung, so wird seine weitere Bewegung durch die Schwerkraft beeinflußt, und seine Bahn ist im allgemeinen gekrümmt. Zur Zeit $t = 0$ befinde er sich an einem Ort, dessen Koordinaten parallel und senkrecht zur Erdoberfläche $x = 0$ und $y = 0$ seien, und er besitze in diesem Augenblick eine Geschwindigkeit v_0 in der xy-Ebene. Die Neigung seiner Bahn gegen die horizontale x-Richtung sei φ (Abb. 39, Kurve a). Dann betragen die Komponenten seiner Geschwindigkeit in der x- und y-Richtung

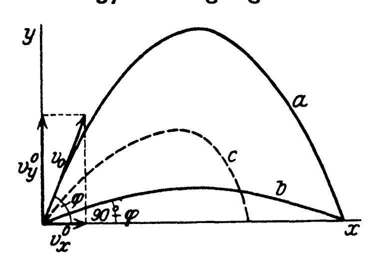


Abb. 39. Bahn eines Körpers unter der Wirkung der Schwerkraft an der Erdoberfläche (schräger Wurf).

$$v_x^0 = v_0 \cos\varphi \qquad \text{und} \qquad v_y^0 = v_0 \sin\varphi \tag{8}$$

Die Bewegung in horizontaler Richtung wird durch die Schwerkraft nicht beeinflußt. In vertikaler Richtung aber wirkt die nach unten gerichtete Schwerebeschleunigung

$$\frac{d^2 y}{d t^2} = -g. \tag{9}$$

Wir erhalten also aus Gl. 8 und indem wir Gl. 9 integrieren,

$$\frac{dx}{dt} = v_x^0 = v_0 \cos\varphi, \tag{10a}$$

$$\frac{dy}{dt} = v_0 \sin\varphi - gt. \tag{10b}$$

Durch eine zweite Integration erhalten wir

$$x = v_0 t \cos\varphi \qquad \text{und} \qquad y = v_0 t \sin\varphi - \tfrac{1}{2} g t^2. \tag{11}$$

Durch Elimination von t folgt schließlich die Gleichung der Bahnkurve des Körpers

$$y = x \operatorname{tg}\varphi - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\varphi}. \tag{12}$$

Dies ist die Gleichung einer Parabel. Ihr Scheitel liegt im höchsten Punkt der Bahn. In diesem ist $dy/dt = 0$, und wir erhalten als Steigzeit t_h aus Gl. 10b

$$t_h = \frac{v_0 \sin\varphi}{g}. \tag{13}$$

Setzen wir dies in Gl. 11 ein, so folgt für die Steighöhe $y = h$

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2\varphi}{2g}. \tag{14}$$

Der Abstieg erfolgt in einer zum Aufstieg symmetrischen Kurve. Das Niveau $y = 0$ wird, wie man aus Gl. 12 ableitet, bei der Wurfweite

$$x_m = \frac{v_0^2}{g} 2 \sin\varphi \cos\varphi = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\varphi \tag{15}$$

wieder erreicht. Aus dieser Gleichung erkennt man, daß bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit die gleiche Wurfweite bei zwei verschiedenen Anstellwinkeln φ erreicht wird, nämlich für die Winkel φ und $\pi/2 - \varphi$ (Abb. 39, Kurve b). Denn es ist $\sin\varphi = \cos(\pi/2 - \varphi)$ und $\cos\varphi = \sin(\pi/2 - \varphi)$. Auf Grund dieser Tatsache unterscheidet z. B. die Artillerie den Steilschuß und den Flachschuß.

Infolge der unvermeidlichen und bei der großen Geschoßgeschwindigkeit sehr beträchtlichen Luftreibung weichen die Geschoßbahnen von den Kurven *a* und *b* merklich ab. Der absteigende Ast der Bahn verläuft steiler als der aufsteigende Ast, und Steighöhe und Wurfweite sind geringer (sog. ballistische Kurve, Abb. 39c).

Die größte Wurfweite wird nach Gl. 15 für $\sin 2\varphi = 1$, also $\varphi = 45^0$, erreicht. Sie beträgt $x_m = v_0^2/g$. Sie ist viermal so groß wie die in diesem Fall erreichte Steighöhe, die nach Gl. 14 $h = v^2/4g$ beträgt.

Wird der Körper senkrecht aufwärts geworfen, so wird $\varphi = 90^0$, $\cos\varphi = 0$ und $x = 0$. Wir erhalten dann aus den obigen Gleichungen

$$y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2, \qquad \frac{dy}{dt} = v_0 - g t, \qquad h = \frac{v_0^2}{2g}, \qquad t_h = \frac{v_0}{g}. \tag{16}$$

Zum Herabfallen aus der Steighöhe bis in das alte Niveau $y = 0$ braucht der Körper die gleiche Zeit wie zum Aufstieg. Er kehrt also nach der Zeit $2t_h = 2v_0/g$ wieder an seinen Ausgangspunkt zurück. Die Steigzeit ist der Anfangsgeschwindigkeit v_0, die Steighöhe deren Quadrat proportional.

Wird ein Körper zur Zeit $t = 0$ in der Höhe h mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ losgelassen, so ergibt die Integration von Gl. 9

$$\frac{dy}{dt} = -g t, \quad y = h - \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{oder} \quad h - y = \frac{1}{2} g t^2. \tag{17}$$

Die durchfallene Strecke $h - y$ ist also dem Quadrat der Fallzeit t proportional. Sie beträgt nach 1 sec $1g/2 =$ rd. 490 cm, nach 2 sec $4g/2 =$ rd. 1960 cm usw. Die Fallgeschwindigkeit wächst proportional mit der Zeit. Ferner beträgt sie, wie eine einfache Umformung ergibt, nach Durchlaufen einer Fallstrecke h

$$v = \sqrt{2gh}. \tag{18}$$

Da die in 1 sec durchfallene Strecke bereits recht groß ist, sind beträchtliche Fallstrecken notwendig, um die vorstehende Gesetzmäßigkeiten nachzuprüfen. GALILEI, der die Fallgesetze im Jahre 1590 zuerst entdeckte und 1604 genau formulierte, benutzte zu ihrer Untersuchung ein besonders geeignetes Bauwerk, den berühmten schiefen Turm in Pisa, von dessen einzelnen Stockwerken er Mauersteine herabfallen ließ[1]).

Aus den obigen Gleichungen kann man leicht die kinetische Energie $mv^2/2$ eines senkrecht geworfenen Körpers in der Höhe y ableiten. Es ergibt sich

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 - m g y \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2} m v^2 + m g y = \frac{1}{2} m v_0^2. \tag{19}$$

Auf der rechten Seite der zweiten Gleichung steht die kinetische Energie des geworfenen Körpers im Niveau $y = 0$, auf der linken Seite seine kinetische Energie in der Höhe y, zuzüglich der Größe mgy. Nun ist mg die auf den Körper wirkende Schwerkraft, also nach § 44 mgy die zur Hebung des Körpers in die Höhe y aufgewendete Arbeit. Diese aber ist gleich der potentiellen Energie, die der Körper durch diese Hebung gewonnen hat. Die Gl. 19 besagt also, daß die Summe der kinetischen und der potentiellen Energie eines geworfenen Körpers (bei Vernachlässigung der Luftreibung) konstant bleibt. Beim Aufstieg wächst die potentielle Energie auf Kosten der kinetischen Energie, und beim Abstieg ist es umgekehrt. Damit ist der Satz von der Erhaltung der Energie für den freien Wurf und Fall bewiesen (HUYGENS 1673).

---

[1]) GALILEI (1564—1642) ist als der Schöpfer der Physik im heutigen Sinne zu betrachten. Er war der erste neuzeitliche Mensch, der wirkliche Experimente anstellte und physikalische Gesetze durch Gleichungen ausdrückte.

58. Fall auf der schiefen Ebene. Unter einer schiefen Ebene versteht man eine ebene Fläche, welche unter einem Winkel φ gegen die Horizontale geneigt ist (Abb. 40). m sei die Masse eines Körpers, welcher sich ohne Reibung auf dieser Ebene bewegen könne. Die Schwere übt auf ihn eine senkrecht nach unten gerichtete Kraft vom Betrage mg aus. Wir zerlegen diese Kraft in zwei zueinander senkrechte Komponenten k_1 und k_2, die eine parallel, die andere senkrecht zur schiefen Ebene. Von diesen beiden Komponenten kann nur die zur Ebene parallele eine Beschleunigung des Körpers bewirken. Diese Komponente hat den Wert $k_1 = mg \sin\varphi$. Die dazu senkrechte Komponente $k_2 = mg \cos\varphi$ drückt den Körper gegen die schiefe Ebene, ohne ihn in dieser Richtung beschleunigen zu können, denn ihre Wirkung wird durch die in der Fläche auftretende Gegenkraft (Zwangskraft, § 30) k_z, welche gleich k_2 und ihr entgegengesetzt gerichtet ist, aufgehoben. (Die Kraft k_1 ist demnach eigentlich als die Resultierende der Schwerkraft mg und der Zwangskraft k_z aufzufassen, wie man auch aus Abb. 40 erkennt. Denn tatsächlich wirken auf die Masse m diese beiden Kräfte.) Es ist daher die wirksame Kraft

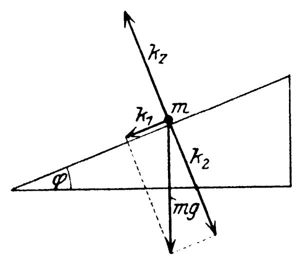


Abb. 40. Schiefe Ebene.

$$k_1 = m\gamma = mg\sin\varphi, \tag{20}$$

wenn γ die Beschleunigung des Körpers in Richtung der Ebene nach unten bedeutet.

Ist h die Höhe und s die Länge der schiefen Ebene, auf deren höchstem Punkt sich ein Körper befinde, so ist seine Entfernung vom Fußpunkt der Ebene $s = \frac{h}{\sin\varphi}$. Wird er losgelassen, so durchfällt er die Strecke s mit wachsender Geschwindigkeit, und zwar ist die nach der Zeit t zurückgelegte Strecke (§ 20)

$$x = \tfrac{1}{2}\gamma t^2 = \tfrac{1}{2} g t^2 \sin\varphi, \tag{21}$$

und die erreichte Geschwindigkeit

$$v = \gamma t = g t \sin\varphi \quad \text{oder} \quad v = \sqrt{2 g x \sin\varphi}. \tag{22}$$

Die nach Durchlaufen der ganzen Strecke s erreichte Geschwindigkeit beträgt

$$v = \sqrt{2 g s \sin\varphi} = \sqrt{2 g h}. \tag{23}$$

Das ist aber die gleiche Geschwindigkeit, welche er gemäß Gl. 18 beim freien, senkrechten Durchfallen der Höhe h erlangt haben würde. Übrigens wieder eine einfache Folge aus dem Energieprinzip, da in beiden Fällen die gleiche Verminderung der potentiellen Energie stattfindet, der jeweils der gleiche Gewinn an kinetischer Energie entsprechen muß.

Das gleiche ergibt sich auch, wenn es sich nicht um eine schiefe Ebene handelt, sondern um eine Fläche mit wechselnder Neigung, welche man sich aus lauter kleinen, schiefen Ebenen zusammengesetzt denken kann.

Um einen Körper von der Masse m auf einer schiefen Ebene um die Strecke s, d. h. bis in die Höhe $h = s \cdot \sin\varphi$, aufwärts zu befördern, ist eine Arbeit vom Betrage

$$A = m \cdot g \cdot s \cdot \sin\varphi = mgh \text{ erg} \tag{24}$$

erforderlich, da die wirksame Kraftkomponente der Schwere den Wert $mg\sin\varphi$ dyn hat, und der zurückzulegende Weg gleich s ist. Man sieht, daß die Arbeit ebenso groß ist, wie wenn der Körper senkrecht um die Strecke h gehoben worden wäre. Die Hebung eines Körpers auf einer schiefen Ebene erfordert demnach die gleiche Arbeit wie die senkrechte Hebung, sie ist aber mit einer um so kleineren Kraft zu leisten, je geringer die Neigung

der Ebene ist, weil die wirksame Komponente der Schwerkraft um den Faktor $\sin\varphi$ kleiner ist, als die bei senkrechter Hebung in Wirksamkeit tretende volle Schwerkraft. Dafür ist der zurückzulegende Weg entsprechend länger.

Zur Anstellung von einfachen Fallversuchen auf der schiefen Ebene eignet sich die schon von GALILEI zur Prüfung der Fallgesetze benutzte Fallrinne, eine schräge Rinne, in der eine Kugel herabrollen kann. Man prüfe die vorstehend abgeleiteten Sätze, indem man die verschiedenen Zeiten entsprechenden Fallstrecken mißt. Man findet leicht, daß sich bei gleicher Neigung die durchfallenen Strecken wie die Quadrate der seit Beginn der Bewegung verflossenen Zeiten verhalten. Ebenso kann man die Abhängigkeit der Fallzeit von dem Neigungswinkel φ durch Verändern der Neigung nachprüfen.

Die rollende Kugel entspricht allerdings nicht dem bei den vorstehenden Überlegungen vorausgesetzten reibungslos gleitenden Körper. Sie hat außer der kinetischen Energie ihrer fortschreitenden Bewegung auch Rotationsenergie. Nach Durchfallen einer bestimmten Strecke ist daher ein Teil ihrer potentiellen Energie in Rotationsenergie übergegangen, und die kinetische Energie der fortschreitenden Bewegung ist um diesen Betrag geringer. Die Geschwindigkeit der Kugel ist kleiner als die eines reibungslos gleitenden Körpers. Berührt die Kugel die Rinne nur in einem Punkt (liegt sie also nicht auf den Rändern der Rinne), so erscheint nach § 36 ihre träge Masse um $\frac{2}{5}$ vergrößert. Wir haben daher statt Gl. 20 zu schreiben $\frac{7}{5} m\gamma = mg\sin\varphi$ oder $\gamma = \frac{5}{7} g\sin\varphi$. Die auf der rechten Seite stehende schwere Masse bleibt natürlich unberührt. Die Wirkung der Rotation ist also so, als sei die Schwerebeschleunigung g auf $\frac{5}{7}$ ihres wirklichen Wertes vermindert. Liegt die Kugel auf den Rändern der Rinne auf, so ist die Wirkung noch größer.

59. Der Schwerpunkt. Die an einem Körper angreifende Schwerkraft ist die Resultierende der an seinen einzelnen Massenpunkten angreifenden Einzelschwerkräfte. Diese sind alle unter sich parallel und den Massen der Massenpunkte proportional. Sie erfüllen also genau die gleiche Bedingung wie die Trägheitskräfte bei reiner Beschleunigung (§ 34). Daher spielt der Massenmittelpunkt bezüglich der Schwerewirkungen auf einen Körper genau die gleiche Rolle wie bezüglich der Trägheitswirkungen, und er wird daher auch als Schwerpunkt bezeichnet. Er ist derjenige Punkt, in dem man sich die auf dem Körper wirkende Schwerkraft bei jeder beliebigen Orientierung des Körpers angreifend denken kann.

60. Das Pendel. Ein Pendel ist ein der Schwerkraft unterworfener Körper, welcher frei (um einen Punkt oder eine feste horizontale Achse) drehbar aufgehängt ist. Es ist dabei ohne Belang, ob sich der Drehpunkt oder die Drehachse innerhalb oder außerhalb des Körpers befindet. Ist der Körper sich selbst überlassen, so stellt er sich so ein, daß sein Schwerpunkt senkrecht unter dem Unterstützungspunkt liegt. Wird er aus dieser natürlichen Ruhelage entfernt, so führt er Schwingungen um sie aus, sein Ausschlag φ aus der Ruhelage ist eine periodische Funktion der Zeit. Wir wollen nur so kleine Ausschläge in Betracht ziehen, daß wir in den folgenden Rechnungen den $\sin\varphi$ durch den Winkel φ ersetzen dürfen (§ 8).

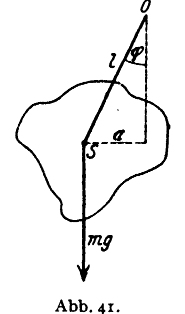


Abb. 41. Zur Ableitung der Pendelgesetze.

Das Pendel habe die Masse m und, bezogen auf den Drehpunkt O, das Trägheitsmoment J. Der Schwerpunkt S des Körpers befinde sich im Abstande l vom Drehpunkt O (Abb. 41). Es ist gleichgültig, ob der Körper von einem Punkte O frei herabhängt oder ob er an einer durch O gehenden horizontalen Achse starr befestigt ist. (Ist die Achse nicht horizontal, so sind die

nachfolgenden Rechnungen ein wenig zu modifizieren.) Wir betrachten zunächst nur ebene Schwingungen des Pendels.

Auf den Körper wirkt im Schwerpunkt die Schwerkraft mg. Infolgedessen erfährt er bei einem Ausschlag φ ein rücktreibendes Drehmoment

$$N = -mga = -mgl\sin\varphi = -mg\varphi.$$

(Die rechte Seite muß negatives Vorzeichen erhalten, weil das Drehmoment den Winkel φ zu verkleinern sucht.) Nach § 47 gilt daher

$$N = J\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl\varphi = -D\varphi, \tag{25}$$

wobei wir $mgl = D$ gesetzt haben. D ist nach § 47 das Direktionsmoment des Pendels. Es gilt also

$$J\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -D\varphi. \tag{26}$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung haben wir in § 47 abgeleitet, und wir haben dort gefunden, daß die Schwingungsdauer eines Systems vom Trägheitsmoment J und dem Direktionsmoment D gleich

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}}\ \text{sec}, \tag{27}$$

oder in unserem Falle

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}\ \text{sec} \tag{28}$$

ist.

Es sei J_0 das Trägheitsmoment des Pendelkörpers bezüglich der zu seiner Schwingungsebene senkrechten, durch seinen Schwerpunkt hindurchgehenden Achse. Dann ist nach dem STEINERschen Satz (§ 36) sein Trägheitsmoment bezüglich des Punktes O gleich $J = J_0 + ml^2$. Handelt es sich um einen Körper, dessen Dimensionen sehr klein sind gegenüber der Länge l, so kann man J_0 gegen ml^2 vernachlässigen und den Körper wie einen Massenpunkt behandeln, der sich am jeweiligen Ort des Schwerpunktes S befindet. Ein solches idealisiertes Pendel nennt man ein mathematisches Pendel, im Gegensatz zu dem wirklichen, sog. physischen Pendel. Setzt man $J = ml^2$ in Gl. 28 ein, so folgt

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\ \text{sec}. \tag{29}$$

Die Schwingungsdauer eines mathematischen Pendels ist also der Wurzel aus der Pendellänge l proportional. Dieses Gesetz ist 1596 von GALILEI experimentell gefunden worden. Setzt man $g = 981\ \text{cm/sec}^2$ in Gl. 29 ein, so findet man für ein mathematisches Pendel von 1 m Länge sehr nahezu $\tau = 2$ sec (sog. Sekundenpendel).

Der physikalische Sinn der Idealisierung eines Pendels durch ein mathematisches Pendel ist folgender. Man kann sich die Bewegung eines physischen Pendels in zwei Pendelbewegungen zerlegt denken, eine Pendelung um den Punkt O ohne Änderung der Orientierung des Körpers im Raum und eine Pendelung des Körpers um seine Schwerpunktsachse. Bei sehr kleinen Körperdimensionen steckt in der letzteren Komponente ein so geringer Bruchteil der kinetischen Energie des Körpers, daß er vernachlässigt werden kann.

Setzen wir in Gl. 28

$$\frac{J}{ml} = \lambda\ \text{cm}, \tag{30}$$

so können wir für das physische Pendel schreiben

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{\lambda}{g}}\,\text{sec}\,. \tag{31}$$

Durch Vergleich der Gl. 29 und 31 stellt man fest, daß λ die Länge eines mathematischen Pendels ist, das die gleiche Schwingungsdauer hat wie das gegebene Pendel. Man nent daher λ die reduzierte Pendellänge des physischen Pendels.

Das Trägheitsmoment einer homogenen Vollkugel von der Masse m und dem Radius r, bezogen auf eine durch ihren Schwerpunkt (Mittelpunkt) gehende Achse ist $J_0 = \frac{2}{5}\,mr^2$. Ist daher eine solche Kugel so an einen Faden aufgehängt, daß ihr Mittelpunkt den Abstand l vom Aufhängepunkt hat, so ist ihr Trägheitsmoment, bezogen auf diesen Punkt, nach § 36

$$J = \tfrac{2}{5}\,m r^2 + m l^2 = m\,(l^2 + \tfrac{2}{5}\,r^2)\,.$$

Die reduzierte Pendellänge eines solchen Pendels ist daher

$$\lambda = l\left(1 + \frac{2}{5}\frac{r^2}{l^2}\right)\text{cm}\,.$$

Ist z. B. $l = 100$ cm, $r = 1$ cm, so ist $\lambda = 1{,}00004\,l$, unterscheidet sich also von l nur um $1/_{25}$ mm. Ein solches Pendel stellt also bereits eine recht gute Annäherung an das mathematische Pendel dar.

61. **Bestimmung von g mit dem Pendel.** Mit einem Pendel aus einer an einem nicht zu kurzen Faden hängenden Masse — die man nicht zu klein wähle, indem man etwa eine gut gedrehte Bleikugel verwendet — kann man durch Messung der Schwingungsdauer mit einer guten Pendeluhr eine Bestimmung der Erdbeschleunigung g nach Gl. 29 oder 31 schon mit einiger Genauigkeit vornehmen.

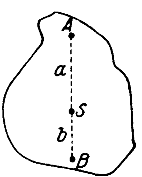


Abb. 42. Zur Theorie des Reversionspendels.

Beträchtlich genauer ist die Bestimmung von g mit dem Reversionspendel. Es sei J_0 das Trägheitsmoment eines Körpers, bezogen auf eine horizontale durch seinen Schwerpunkt S gehende Achse (Abb. 42), etwa die zur Zeichnungsebene senkrecht stehende. Der Körper sei in A im Abstande a von S in einer horizontalen Achse drehbar aufgehängt. Er hat dann die Schwingungsdauer $\tau = 2\pi\sqrt{\frac{J_0 + m a^2}{m g a}}$. Es läßt sich nun stets auf der durch A und S gehenden Geraden auf der andern Seite des Schwerpunktes im Abstande b von S ein Punkt B finden, derart, daß der Körper um eine durch B gehende, zu der andern parallele Achse schwingend, die gleiche Schwingungsdauer τ hat, wie bei der Aufhängung in A. Es ist dann

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{J_0 + m a^2}{m g a}} = 2\pi\sqrt{\frac{J_0 + m b^2}{m g b}} \quad \text{oder} \quad \frac{J_0 + m a^2}{a} = \frac{J_0 + m b^2}{b}\,.$$

Löst man diese Gleichung nach b auf, so ergibt sich — außer dem selbstverständlichen Wert $b = a$ (d. h. B fällt mit A zusammen) —

$$b = \frac{J_0}{ma}\,.$$

Die Länge der Strecke AB ergibt sich als die Summe von a und b, also

$$AB = a + \frac{J_0}{m a} = \frac{J_0 + m a^2}{m a} = \frac{J}{m a}\,,$$

wobei J das Trägheitsmoment, bezogen auf die durch A gehende Achse bedeutet. Das aber ist gemäß Gl. 31 die reduzierte Pendellänge λ des um A schwingenden

Körpers, also wegen der gleichen Schwingungsdauer auch die des um *B* schwingenden Körpers. Man kann daher auf diese Weise die reduzierte Pendellänge des Körpers finden und daraus und aus der Schwingungszeit, die sehr genau zu messen ist, *g* berechnen.

Eine einfache Ausführung zeigt Abb. 43. An einer Metallstange sind zwei, zur Verringerung des Luftwiderstandes linsenförmige Massen m_1 und m_2 verschiebbar angebracht. An der Stange befinden sich ferner zwei einander zugekehrte Schneiden, die eine zwischen den beiden Massen, die zweite außerhalb. Die Vorrichtung kann um jede der beiden Schneiden als Pendel schwingen, wenn man eine derselben auf eine geeignete Unterlage (Achat- oder Stahlplatte) setzt. Man verschiebt nun die beiden Massen so lange, bis das Pendel um beide Schneiden genau gleich schnell schwingt. Der Abstand der beiden Schneiden, der sich wegen ihrer Feinheit äußerst genau messen läßt, ist dann gleich der reduzierten Pendellänge λ. Durch eine solche Messung von τ und λ kann man dann *g* nach Gl. 31 sehr genau bestimmen.

A

B

Abb. 43. Reversionspendel.

Das Pendel liefert weit genauer als der freie Fall die experimentelle Begründung für die strenge Proportionalität bzw. Gleichheit der trägen und der schweren Masse der Körper (§ 54). Man beachte, daß in das Trägheitsmoment *J* die träge Masse, in die Direktionskraft *D* die schwere Masse eingeht. In dem Verhältnis J/D, das nach Gl. 27 die Schwingungsdauer bestimmt, steckt also das Verhältnis der trägen zur schweren Masse. Wäre dies Verhältnis nicht für alle Körper genau das gleiche, so würde sich das daran bemerkbar machen, daß zwei vollkommen gleich geformte und gleich aufgehängte Pendel aus verschiedenem Material eine verschiedene Schwingungszeit τ haben. Diese Frage kann man mit sehr großer Genauigkeit prüfen, da die Schwingungszahl eines Pendels durch Beobachtung einer größeren Zahl von Schwingungen sehr genau zu messen ist. Versuche, die zu diesem Zweck mit äußerster Präzision angestellt wurden, haben die strenge Gültigkeit des Satzes von der Gleichheit der trägen und der schweren Masse ergeben.

62. Stabiles, labiles und indifferentes Gleichgewicht. Ein der Schwerkraft unterworfener Körper kann nur dann im Gleichgewicht sein, wenn die Schwerkraft durch eine gleich große, entgegengesetzt gerichtete Kraft aufgehoben wird. Beispiele derartiger Gleichgewichte umgeben uns im täglichen Leben in Fülle. Die meisten Gegenstände unserer Umgebung sind in Ruhe, befinden sich also im Gleichgewicht. Entfernt man einen solchen Körper ein wenig aus seiner Ruhelage und läßt ihn dann wieder los, so sucht er, insbesondere wenn die Reibung ausgeschaltet ist, in der Regel in seine ursprüngliche Lage zurückzukehren, z. B. ein aus seiner Ruhelage entferntes Pendel, ein Kasten auf einem Tische, den wir ein wenig kippen usw. Ein Gleichgewicht, bei dem dies der Fall ist, nennt man stabil. Es sind aber auch Fälle denkbar, in denen ein aus seiner Gleichgewichtslage ein wenig verschobener Körper trotz völliger Ausschaltung der Reibung in seiner neuen Lage verbleibt, z. B. eine auf einer genau horizontalen Ebene liegende homogene Kugel, ein an einer Achse drehbar befestigtes, ringsum völlig gleichmäßig gebautes Rad, überhaupt jeder genau in seinem Schwerpunkt unterstützte Körper. Ein derartiges Gleichgewicht nennt man indifferent. Ein dritter Fall liegt vor, wenn ein aus seiner Gleichgewichtslage nur ein wenig entfernter Körper sich alsdann von selbst noch weiter von dieser entfernt und einer anderen, stabilen Ruhelage zustrebt. Dieser Fall würde etwa dem eines auf einer Fingerspitze balancierten Stockes ähneln, der aber kein Gleichgewicht darstellt, da das Balancieren nur bei fortgesetzter Bewegung des Stockes möglich ist. Ein solches gedachtes Gleichgewicht nennt man labil. Es kann

praktisch deshalb nicht vorkommen, weil, wenn ein Körper einmal in eine solche Gleichgewichtslage gebracht wäre, er schon durch eine unendlich kleine Störung aus ihr endgültig entfernt würde. Derartige Störungen lassen sich aber auf der Erde auf keine Weise vermeiden. Labile Gleichgewichtszustände existieren daher als Dauerzustände tatsächlich nicht, sind aber von theoretischem Interesse.

Labilen Lagen sind oft gewisse stabile Lagen sehr ähnlich, bei denen eine sehr kleine Verschiebung des Körpers aus dieser stabilen Lage ihn in eine labile Lage führt, über die hinweg er in eine neue stabile Lage übergehen kann. Ein Beispiel hierfür ist ein auf eine seiner schmalen Flächen gestelltes Brett oder ein auf seine eine Grundfläche gestellter langer und dünner Zylinder. Schon eine geringe Erschütterung kann genügen, um das Brett so weit zu kippen, daß es, indem es sich um eine seiner Kanten dreht, durch die der stabilen Anfangslage ganz dicht benachbarte labile Gleichgewichtslage hindurchgeht, um in einer neuen stabilen Lage, auf einer seiner Seitenflächen liegend, zu enden. Ein solches Gleichgewicht nennt man auch metastabil.

Bei jeder Gleichgewichtslage sind die Bewegungsmöglichkeiten eines Körpers in irgendeiner Weise beschränkt, es sind ihm gewisse Bedingungen vorgeschrieben. Ein Pendelkörper, der an einem Faden hängt, kann über den Raum der durch die Pendellänge als Radius gegebenen Kugel nicht hinaus. Ein auf einem Tische liegender Kasten kann mit keinem seiner Punkte tiefer liegen als die Tischplatte usw.

Für die drei vorstehend charakterisierten Arten des Gleichgewichts bei Wirkung der Schwerkraft ist eine gemeinsame Bedingung maßgebend, nämlich die, daß der Schwerpunkt des im Gleichgewicht befindlichen Körpers eine extreme Lage einnimmt.

1. Beim stabilen Gleichgewicht nimmt der Schwerpunkt des Körpers die tiefste Lage ein, die die ihm vorgeschriebenen Bedingungen zulassen.

2. Beim labilen Gleichgewicht nimmt der Schwerpunkt des Körpers die höchste Lage ein, die die ihm vorgeschriebenen Bedingungen zulassen.

3. Das indifferente Gleichgewicht bildet den Übergang zwischen dem stabilen und dem labilen Gleichgewicht. Es liegt dann vor, wenn der Schwerpunkt bei einer Bewegung des Körpers aus seiner Ruhelage seine Höhenlage nicht ändert.

Es kommt sehr häufig vor, daß man eine Gleichgewichtslage gleichzeitig als stabil und als indifferent bezeichnen muß, je nachdem, was für eine Art von Verschiebung aus der Ruhelage man betrachtet. Ein auf einer horizontalen Ebene liegender Zylinder kann ohne Hebung seines Schwerpunktes gerollt werden, in diesem Sinne befindet er sich also im indifferenten Gleichgewicht; bezüglich jeder andern möglichen Bewegung ist er im stabilen Gleichgewicht.

Bewegt man einen Körper aus einer Gleichgewichtslage heraus, so ist mit jeder Änderung der Höhenlage seines Schwerpunktes eine Änderung seiner potentiellen Energie (§ 44) verbunden. Im Falle stabilen Gleichgewichts haben die vorgeschriebenen Bedingungen zur Folge, daß nur Hebungen des Schwerpunktes möglich sind, die potentielle Energie des Körpers wird also bei jeder möglichen Verschiebung aus der Gleichgewichtslage größer, man muß Arbeit aufwenden, um eine solche Verschiebung hervorzurufen. Beim labilen Gleichgewicht dagegen sind nur Senkungen des Schwerpunktes mit den vorgeschriebenen Bedingungen verträglich, die potentielle Energie des Körpers nimmt bei jeder möglichen Bewegung ab, es wird daher bei einer solchen Bewegung Arbeit gewonnen, z. B. gerät der Körper in beschleunigte Bewegung. Beim indifferenten Gleichgewicht wird bei einer Verschiebung des

Körpers Arbeit weder aufgewendet noch gewonnen, sie geschieht also ohne Änderung der Energie des Körpers.

Man kann daher die obenerwähnten Definitionen der Gleichgewichtsarten auch folgendermaßen aussprechen: Die potentielle Energie eines Körpers ist im stabilen Gleichgewicht ein Minimum, im labilen Gleichgewicht ein Maximum. Das indifferente Gleichgewicht bildet den Grenzfall zwischen dem stabilen und dem labilen Gleichgewicht.

In der letzten Form gelten die Gleichgewichtsbedingungen für jede Art des Gleichgewichts, nicht nur für solche unter der Wirkung der Schwerkraft, sondern auch irgendwelcher anderer, z. B. elastischer, elektrischer, magnetischer Kräfte.

Häufig hat ein Körper mehrere stabile und labile Gleichgewichtslagen. Ein auf einem Tische stehender Kasten hat 6 stabile Gleichgewichtslagen, nämlich je eine, wenn er auf einer seiner 6 Seitenflächen liegt, und 20 labile Gleichgewichtslagen, nämlich je eine, wenn er auf einer der 12 Kanten, und 8, wenn er auf je einer der 8 Ecken steht. Ein Fadenpendel hat nur eine stabile Gleichgewichtslage.

Für den Fall, daß ein Körper sich auf einer horizontalen Ebene befindet, ist es Bedingung für das Gleichgewicht, daß das von seinem Schwerpunkt auf die Ebene gefällte Lot durch seine auf der Ebene ruhende Grundfläche (Unterstützungsfläche) geht. Bei einem hängenden Körper liegt im stabilen Gleichgewicht der Schwerpunkt senkrecht unterhalb des Aufhängepunktes. (Man hüte sich, diese Bedingungen zur allgemeinen Definition der Gleichgewichtslage zu benützen, da sie nur auf die genannten Spezialfälle zutreffen!)

Ein Maß für den Grad der Stabilität einer Gleichgewichtslage bildet die Größe der Lagenänderung, die man mit einem Körper vornehmen kann, ohne ihn in eine labile Gleichgewichtslage zu überführen (Standfestigkeit). Die Stabilität ist daher meist in verschiedenen Richtungen verschieden groß. Ein Körper fällt oft nach der einen Seite leichter um als nach der andern.

63. Das Newtonsche Gravitationsgesetz. Es war zweifellos eine der größten Geistestaten aller Zeiten, als Isaac Newton (1643—1727) auf den Gedanken kam, daß die Schwerkraft nicht auf die irdischen Körper beschränkt sei, sondern überhaupt zwischen allen Massen im Weltraum wirksam sei (allgemeine Gravitation, 1683). Er kam dadurch zunächst zu der Behauptung, daß die Kraft (Zentripetalkraft, § 37), welche den Mond zwingt, eine kreisförmige Bahn um die Erde zu beschreiben, nichts anderes sei, als die Schwerkraft, die, von der Erde ausgehend, auf den Mond in gleicher Weise wirkt, wie auf jeden auf der Erde befindlichen Körper. Ferner aber müssen gleichartige Kraftwirkungen zwischen der Sonne und den sie umkreisenden Planeten auftreten, wenn die Schwere eine allgemeine Eigenschaft der Materie ist, d. h. wenn jegliche Masse auf jede andere eine anziehende Kraft ausübt. In Verfolg dieses Gedankens kam Newton zur Aufstellung seines Gravitationsgesetzes für die zwischen zwei Massen m und M wirkende Anziehungskraft k. Der Abstand der Schwerpunkte der beiden Massen sei r, dann ist, wie schon Kepler erkannte,

$$k = -G\frac{m\,M}{r^2}\,\mathrm{dyn}. \tag{32}$$

D. h. die zwischen zwei Massen wirkende anziehende Kraft ist jeder der beiden Massen proportional und dem Quadrat des Abstandes ihrer Schwerpunkte umgekehrt proportional. Die Größe G ist eine Konstante, die man als die allgemeine Gravitationskonstante bezeichnet. Ihr Zahlenwert beträgt im CGS-System

$$G = 6{,}65 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{dyn}\cdot\mathrm{cm}^2/\mathrm{g}^2 \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{cm}^3/\mathrm{g}\cdot\mathrm{sec}^2.$$

Zwei Massenpunkte von je 1 g ziehen sich also, wenn sie 1 cm voneinander entfernt sind, mit der sehr kleinen Kraft von $6{,}65 \cdot 10^{-8}$ dyn an. Das negative Vorzeichen in Gl. 32 bedeutet, daß die auf die eine der beiden Massen wirkende Kraft die entgegengesetzte Richtung hat, wie der von der andern Masse her auf sie weisende Radiusvektor, daß es sich also um eine Anziehung handelt, d. h. um eine Kraft, welche den Abstand r zu verkleinern sucht.

Es bedeute m die Masse eines auf der Erdoberfläche befindlichen Körpers. Die Größe der auf ihn wirkenden Schwerkraft k ist nach § 54 gleich $-mg$, wobei $g = 981$ cm/sec² ist. (Wir setzen diese Kraft hier negativ, weil sie nach dem Erdmittelpunkt hin gerichtet ist.) Andrerseits muß aber k dem NEWTONschen Gravitationsgesetz entsprechen, wenn wir für m die Masse des Körpers, für M die Masse der Erde und für r den Erdradius ($R = 6370$ km) einsetzen, da dies die Entfernung zwischen dem Körper und dem Schwerpunkt der Erde ist. Es ergibt sich daher

$$k = -mg = -G\frac{mM}{R^2}\ \text{dyn} \qquad \text{oder} \qquad g = G\frac{M}{R^2}\ \text{cm/sec}^{-2}. \tag{33}$$

Man kann demnach, da g und der Radius R der Erde bekannt ist, die Masse der Erde berechnen, wenn man die Größe der allgemeinen Gravitationskonstanten G kennt. Sie ist durch sehr genaue Versuche u. a. von RICHARZ und KRIGAR-MENZEL bestimmt worden, welche die Anziehung großer Bleimassen auf leichte Körper gemessen haben. Es ergibt sich dann die Masse der Erde zu rund $6 \cdot 10^{27}$ g $= 6 \cdot 10^{21}$ Tonnen, und ihre Dichte (§ 56) zu rund 5,5 g/cm⁻³. Man muß aus dieser hohen Dichte schließen, daß im Innern der Erde verhältnismäßig schwere Stoffe vorhanden sind. Viele Gründe machen es so gut wie sicher, daß die Erde zum größten Teil aus Eisen und Nickel besteht.

Man kann die Anziehung zwischen Massen schon durch einen von CAVENDISH (1798) stammenden Versuch nachweisen. Man bedient sich dazu einer Drehwage, d. h. zweier an einer Stange drehbar aufgehängten kleinen Bleikugeln (Abb. 44). Stehen diesen zwei größere Bleikugeln in der Stellung AA gegenüber, so heben sich die anziehenden Wirkungen der großen Kugeln auf die kleinen gegenseitig auf. (Allerdings ist das Gleichgewicht labil.) Bringt man sie aber in die Lage BB, so hat die Anziehung durch die großen Kugeln eine drehende Wirkung auf die kleinen zur Folge.

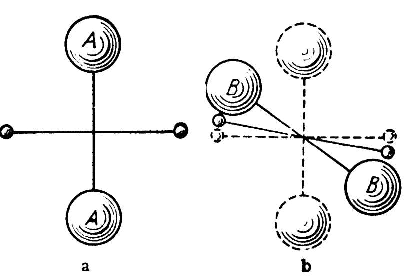


Abb. 44. CAVENDISHS Versuch zur Demonstration der Gravitation.

64. **Die Schwerkraft im Erdinnern.** Die Gl. 32 gilt nicht mehr, wenn sich die Masse m innerhalb der Masse M, z. B. innerhalb der Erde, befindet. Es sei R der Erdradius, und die Masse m befinde sich im Abstande $r < R$ vom Erdmittelpunkt (Abb. 45). Dann ergibt eine einfache Integration, daß sich unter Voraussetzung völliger Homogenität der einzelnen Kugelschalen, aus denen sich die Erde zusammensetzt, die von der zwischen den Radien r und R liegenden Kugelschale herrührenden Gravitationskräfte nach Größe und Richtung gegenseitig genau aufheben, so daß nur die Wirkung der Kugel mit dem Radius r übrigbleibt. Ist ϱ die Dichte der Erde, die wir als überall gleich annehmen wollen, so ist die Masse M' dieser Kugel gleich $4\pi\varrho r^3/3$, und es folgt

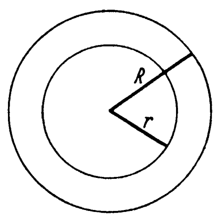


Abb. 45. Zur Ableitung der Schwerkraft im Erdinnern.

$$k = -G\frac{mM'}{r^2} = -\frac{4\pi}{3}\varrho G m r.$$

Im Erdinnern ist also die Schwerkraft dem Abstand r vom Erdmittelpunkt proportional. (Sie entspricht also formal einer elastischen Kraft, § 82.) Nähert man sich der Erde von außen her, so nimmt die Schwerkraft zunächst wie $1/r^2$ zu, um beim Erreichen der Erdoberfläche ihren größten Wert zu erreichen. Nach Passieren der Erdoberfläche nimmt sie dann wie r wieder ab und verschwindet im Erdmittelpunkt. Im Außenraum ist die Beschleunigung durch die Schwere $\gamma_a = gR^2/r^2$, im Erdinnern $\gamma_i = gr/R$. Natürlich gilt dies nicht streng, weil die Dichte der Erde nicht überall die gleiche ist. Die Erdrinde hat eine kleinere Dichte als die inneren Schichten.

65. **Die Mondbewegung.** Den ersten augenfälligen Beweis für die Richtigkeit der Gravitationstheorie lieferte NEWTON durch Berechnung der Umlaufszeit des Mondes um die Erde. Der Mond bewegt sich (sehr annähernd) auf einer Kreisbahn um die Erde. Aber auch die Erde ist (von der hier belanglosen Bewegung der Erde um die Sonne und des ganzen Sonnensystems abgesehen) nicht in Ruhe. In Ruhe ist vielmehr, da es sich hier nur um Wirkungen innerer Kräfte im System Erde-Mond handelt, der gemeinsame Schwerpunkt Sp von Erde und Mond. Sei r der Abstand des Mondes von der Erde, M die Erdmasse, m die Mondmasse, r_1 der Abstand des Erdschwerpunktes, r_2 der des Mondschwerpunktes von Sp, so ist die Lage dieses gemeinsamen Schwerpunktes nach § 34 gegeben durch die Beziehung $Mr_1 = mr_2$ (Abb. 46), wobei M die Erdmasse, m die Mondmasse und $r_1 + r_2 = r$ ist. Um den gemeinsamen Schwerpunkt Sp bewegt sich der Mond demnach auf einem großen, die Erde auf einem kleinen Kreise, und beide vollführen in der gleichen Zeit einen vollen Umlauf, d. h. sie haben die gleiche Winkelgeschwindigkeit ω. Sp liegt tatsächlich noch im Innern der Erde, etwa um $^3/_4$ des Erdradius vom Erdmittelpunkt entfernt — wie man leicht daraus berechnet, daß M/m etwa gleich 81 und r gleich 60 Erdradien ist —, und ist in der Abb. 46 nur der Deutlichkeit halber anders gezeichnet worden.

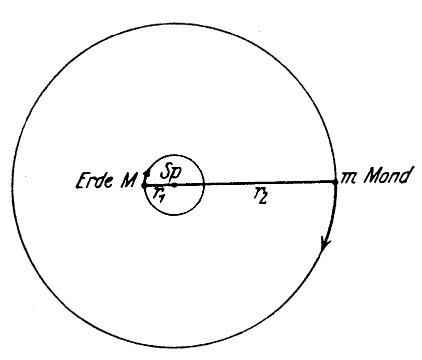


Abb. 46. Zur Mondbewegung.

Das Gleichgewicht im System Erde-Mond fordert nach § 38 Gleichheit der zwischen den beiden Himmelskörpern wirkenden anziehenden Kraft (Zentripetalkraft) und der auf jeden von ihnen wirkenden Zentrifugalkraft, also

$$M r_1 \omega^2 = m r_2 \omega^2 = G \frac{Mm}{r^2} .$$

Hieraus berechnet man leicht mit Hilfe der obigen Beziehungen und Gl. 33

$$\omega^2 = \left(1 + \frac{m}{M}\right) g \frac{R^2}{r^3} \sec^{-2} .$$

Sei τ die Zeit eines Mondumlaufs, so ist $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$. Vernachlässigen wir die sehr kleine Größe m/M, so ergibt sich

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{gR^2}} \sec . \tag{34}$$

Setzt man in Gl. 3 ein $R = 6370$ km $= 6{,}37 \cdot 10^8$ cm, $r = 60{,}3\, R$ und $g = 981$ cm/sec², so ergibt sich $\tau = 27{,}3$ Tage, in Übereinstimmung mit der Wirklichkeit.

Aus Gl. 34 folgt, daß τ^2 proportional r^3 ist. Würde die Erde — wie einzelne Planeten — mehrere auf Kreisbahnen laufende Monde haben, so würden sich die Quadrate ihrer Umlaufszeiten τ wie die 3. Potenzen ihrer Abstände r vom Erdmittelpunkte verhalten (vgl. das dritte KEPLERsche Gesetz, § 66).

66. **Die Bewegung der Planeten.** Der größte Erfolg der Gravitationstheorie aber war es, daß NEWTON aus ihr auf rein mathematischem Wege die Bewegungsgesetze der Planeten ableiten konnte, wie sie von KEPLER (1609 und 1618) zunächst rein empirisch auf Grund der astronomischen Beobachtungen aufgestellt worden waren. Die drei KEPLERschen Gesetze lauten:

1. Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

2. Der von der Sonne nach einem Planeten weisende Fahrstrahl (Radius Vektor) überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

3. Die Quadrate der Umlaufszeiten der Planeten verhalten sich wie die 3. Potenzen der großen Achsen ihrer Bahnellipsen.

Zu 1. Die Exzentrizität der meisten Planetenbahnen, also ihre Abweichung von einer Kreisbahn, ist sehr gering. Sie ist mit 0,20561 am größten beim Merkur, am kleinsten bei der Venus mit 0,00682. Die Exzentrizität der Erdbahn beträgt 0,01675.

Strenggenommen müßte man das 1. KEPLERsche Gesetz etwas anders formulieren. Denn in der obenerwähnten Fassung widerspricht es dem Satz von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes (§ 35). Im einfachsten Falle, daß die Sonne nur einen Planeten besäße, würde nämlich nach vorstehender Fassung der gemeinsame Schwerpunkt von Sonne und Planet, der ja zwischen den Schwerpunkten der beiden Körper liegt, bei einem Umlauf des Planeten ebenfalls einen Umlauf um den Mittelpunkt der Sonne ausführen, also nicht in Ruhe bleiben, obgleich zwischen den beiden Körpern nur innere, d. h. von ihnen selbst ausgehende Kräfte wirken. Tatsächlich bewegt sich auch die Sonne, wie wir das bei der Mondbewegung schon bezüglich der Erde erläutert haben, und zwar würde ihr Schwerpunkt im Falle, daß sie nur einen einzigen Planeten hätte, auch auf einer Ellipse laufen, welche mit der Ellipse der Planetenbahn einen Brennpunkt gemeinsam hat, der im gemeinsamen Schwerpunkt von Sonne und Planet läge. Nun ist aber in Wirklichkeit die Sonnenmasse außerordentlich viel größer als die Gesamtmasse aller Planeten zusammen (330000 mal größer als die Erdmasse, 1047 mal größer als die Masse des Jupiter, der selbst wieder 750 mal schwerer ist als alle andern Planeten zusammen), so daß der Schwerpunkt des Sonnensystems sehr nahezu in den Mittelpunkt der Sonne fällt, die Sonnenbewegung also vernachlässigt werden kann.

In der praktischen Astronomie kann jedoch eine andere Wirkung nicht vernachlässigt werden, das ist die Schwerewirkung, die die einzelnen Planeten aufeinander ausüben. Hierdurch treten Störungen der Planetenbahnen auf. Die Berechnung dieser Störungen ist schwierig, weil es im allgemeinen mathematisch nicht möglich ist, die Bewegung von drei oder mehr sich gegenseitig anziehenden Körpern in geschlossener Form aus dem Gravitationsgesetz zu berechnen (sog. Mehrkörperproblem). Man ist also auf Näherungsrechnungen sehr komplizierter Art angewiesen. Das gleiche gilt für die genaue Berechnung der Mondbewegung, auf die vor allem die Anziehung der Sonne störend wirkt.

Die KEPLERschen Gesetze gelten grundsätzlich auch für die periodischen Kometen. Diese haben durchweg eine Bahn von sehr großer Exzentrizität. Sie unterliegen aber fast alle sehr beträchtlichen Störungen, weil sie meist auf ihrer Bahn in die Nähe eines Planeten kommen. Daher ist die Vorausberechnung

ihrer Wiederkehr oft sehr ungenau. Man nimmt an, daß es sich bei „verlorenen“ oder „neuen“ Kometen in der Mehrzahl der Fälle um Kometen handelt, deren Bahn durch solche Einflüsse bis zur Unkenntlichkeit gestört ist, und daß die meisten Kometen periodisch sind, also dem Sonnensystem dauernd angehören. Ein nicht-periodischer Komet muß auf einer parabolischen oder hyperbolischen Bahn verlaufen. Die Bahnen von Kometen mit sehr großer Umlaufszeit nähern sich in der Nähe der Sonne einer Parabel bereits sehr an.

Beispiele für die Gültigkeit der KEPLERschen Gesetze finden sich auch außerhalb des Sonnensystems. Es gibt nämlich unter den Fixsternen eine sehr große Zahl von Doppelsternen, das sind Paare von verhältnismäßig nahe benachbarten Fixsternen, welche unter der Wirkung ihrer gegenseitigen Anziehung umeinander rotieren. Es ist also so, als wenn eine Sonne einen Planeten hätte, der mit ihr an Masse vergleichbar ist. In diesem Falle muß man natürlich das erste KEPLERsche Gesetz in seiner strengen Fassung anwenden, d. h. unter Berücksichtigung der Bewegung beider Massen. Beide Fixsterne rotieren auf Ellipsen um ihren gemeinsamen Schwerpunkt.

Die Bahn eines an der Erdoberfläche geworfenen Körpers (§ 57) ist tatsächlich auch ein kleines Stück einer elliptischen „Planetenbahn“, bezogen auf die Erde als „Sonne“, und zwar in nächster Nähe des einen Endpunktes ihrer großen Achse. Man kann aber die Ellipse hier mit außerordentlich großer Genauigkeit durch eine Parabel ersetzen, die ihren Scheitel im höchsten Punkt der Bahn hat. Man vernachlässigt dabei die Tatsache, daß die stets zum Erdmittelpunkt hin gerichtete Schwerkraft in den verschiedenen Punkten der Bahn nicht streng die gleiche Richtung im Raume hat.

Zu 2. Die Bedeutung des zweiten KEPLERschen Gesetzes zeigt Abb. 47. Die schraffierten, inhaltsgleichen Flächen entsprechen jeweils gleichen Zeiträumen. Daß ein Gesetz von etwa dieser Art bestehen muß, kann man bereits aus dem Energieprinzip ableiten. Je näher ein Planet der Sonne ist, desto kleiner wird seine potentielle Energie, also muß seine kinetische Energie und daher seine Geschwindigkeit zunehmen. Die Bahngeschwindigkeit ist daher am größten in größter Sonnennähe (Perihel), am kleinsten in größter Sonnenferne (Aphel).

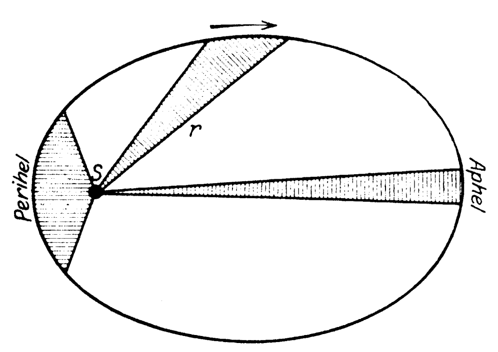


Abb. 47. Zum zweiten KEPLERschen Gesetz.

Man bezeichnet das zweite KEPLERsche Gesetz auch als den **Flächensatz**. Er gilt ganz allgemein bei Bewegungen, die unter der Wirkung einer von einem festen Zentrum ausgehenden Kraft (Zentralkraft) erfolgen, während die beiden anderen Gesetze nur dann gelten, wenn diese Kraft proportional $1/r^2$ ist.

Zu 3. Das dritte KEPLERsche Gesetz ist bereits oben (Gl. 34, § 65) als für die kreisförmige Mondbahn gültig bewiesen worden. Es läßt sich auf die gleiche Weise für kreisförmige Planetenbahnen beweisen, folgt aber aus dem NEWTONschen Gravitationsgesetz ebenfalls für elliptische Bahnen.

Da die Gravitation zwischen allen im Weltall befindlichen Massen wirkt, wenn auch wegen der ungeheuer großen Entfernungen meist nur in ganz außerordentlich geringem Maße, so müssen doch im Laufe von Jahrmillionen gegenseitige Beeinflussungen der Bewegungen der Fixsterne eintreten. Ferner wirkt auch die gegenseitige Anziehung zwischen den an vielen Stellen des Weltalls

vorhandenen, äußerst dünn verteilten und noch nicht zu Fixsternen zusammengeballten Massen (dunkle Nebel). Im Laufe der Zeit werden solche Nebelmassen durch die gegenseitige Anziehung ihrer Bestandteile immer mehr in Richtung ihres gemeinsamen Schwerpunktes gezogen, verdichten sich also, wobei sie sich auf sehr hohe Temperaturen erwärmen, und bilden schließlich einen neuen Fixstern.

Das erste und dritte KEPLERsche Gesetz folgt, wie die mathematische Behandlung zeigt, aus dem Gravitationsgesetz aus dem einzigen Grunde, weil k proportional $1/r^2$ ist. Das zweite Gesetz gilt, wie oben erwähnt, bei jeder Zentralkraft. Diese Gesetze gelten also nicht nur dann, wenn die Zentralkraft von der Gravitation herrührt, sondern in allen Fällen, wo eine Kraft zwischen zwei Körpern wirkt, die dem Quadrat ihres Abstandes umgekehrt proportional ist, z. B. für elektrische Ladungen. Diese werden daher unter geeigneten Bedingungen ebenfalls Bewegungen umeinander ausführen, welche den KEPLERschen Gesetzen gehorchen (sog. KEPLERbewegung). Eine wichtige Anwendung findet diese Tatsache in der Theorie der Atome.

67. **Die Gezeiten.** Die Gezeiten, der regelmäßige Wechsel von Ebbe und Flut, sind, wie schon NEWTON erkannte, eine Wirkung der Schwerkraft, nämlich einer Anziehung des Meerwassers durch den Mond und auch durch die Sonne. Die Wirkung der letzteren ist etwa halb so stark wie die des Mondes.

Wir wollen hier nur die Wirkung des Mondes betrachten. Für ihr Verständnis ist die Tatsache wesentlich, daß die Erde, ebenso wie der Mond, bei einem vollen Umlauf des Mondes um die Erde selbst einen vollen Umlauf um den gemeinsamen Schwerpunkt S von Mond und Erde ausführt, der im Innern der Erde liegt, etwa um $^3/_4$ des Erdradius vom Erdmittelpunkt entfernt (§ 65). Infolgedessen sind die dieser Rotation entsprechenden Bahnradien und daher auch die von ihr herrührenden Trägheitswirkungen (Zentrifugalkraft, § 37) an der dem Monde zugekehrten Seite der Erde kleiner als an der vom Monde abgekehrten Seite. Auf das Meerwasser wirken neben der überall nahezu gleichen Erdanziehung zwei weitere Kräfte, erstens die Anziehung durch den Mond, zweitens die eben erwähnten Trägheitskräfte. An der dem Monde zugekehrten Seite vermindert die Anziehung durch den Mond die Wirkung der irdischen Schwerkraft; gegenüber dieser Anziehung sind die Trägheitskräfte ($mr\omega^2$) infolge der Rotation um den gemeinsamen Schwerpunkt von Erde und Mond, die im gleichen Sinne schwerkraftverkleinernd wirken, klein, da der Bahnradius r hier klein ist (etwa $^1/_4$ Erdradius). An der dem Monde abgekehrten Seite ist zwar die anziehende Wirkung des Mondes der irdischen Schwerkraft gleichgerichtet, in entgegengesetzter Richtung wirken aber hier die von der Rotation herrührenden Trägheitskräfte, die die Wirkung der Mondanziehung wegen des großen Bahnradius (etwa $^7/_4$ Erdradius) beträchtlich überwiegen, so daß auch an dieser Seite der Erde insgesamt eine schwerkraftmindernde Wirkung eintritt. Zwischen den beiden betrachteten Punkten nimmt diese Wirkung zunächst allmählich ab und steigt dann wieder an. Die Wasserbedeckung der Erde nimmt daher eine gestreckte Form an und steht jeweils an diesen Punkten am höchsten (Abb. 48).

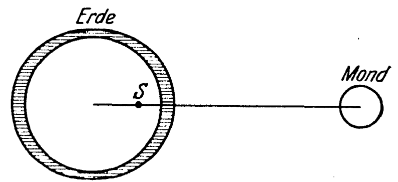


Abb. 48. Schema der Gezeiten.

Aus der vorstehenden Überlegung geht aber noch nicht hervor, woher es kommt, daß die Höhe der dem Monde zugekehrten und der vom Monde abgewandten Flutwelle gleich groß ist. Es könnte zunächst scheinen, daß dies ein

Zufall sei, der durch die Abstands- und Größenverhältnisse von Erde und Mond herbeigeführt wird. Tatsächlich kann die gleiche Höhe nur so zustande kommen, daß die Summe von Zentrifugalkraft und Mondanziehung auf der dem Monde zugekehrten Seite gleich der Differenz zwischen der Zentrifugalkraft und der Mondanziehung auf der vom Monde abgewandten Seite ist, und es ist wenigstens nicht auf den ersten Blick einzusehen, daß zwischen diesen beiden Kräften eine grundsätzliche Beziehung bestehen sollte. Daß dies doch der Fall ist, zeigt die folgende sehr lehrreiche Rechnung. Es sei r der Abstand des Mondschwerpunkts vom Erdschwerpunkt, S der gemeinsame Schwerpunkt von Erde und Mond, r_1 der Abstand des Erdschwerpunkts, r_2 der Abstand des Mondschwerpunkts von S, so daß $r = r_1 + r_2$ (Abb. 49). Die Lage von S ergibt sich aus der Bedingung $M r_1 = m r_2$ (M = Erdmasse, m = Mondmasse). Es folgt $r_1 = rm/(M+m)$ und $r_2 = rM/(M+m)$. Sei R der Erdradius, so ist r etwa gleich $60R$; ferner ist m etwa gleich $M/81$. Daraus folgt $r_1 = 60R/82$ oder rund $3R/4$, wie oben bereits erwähnt.

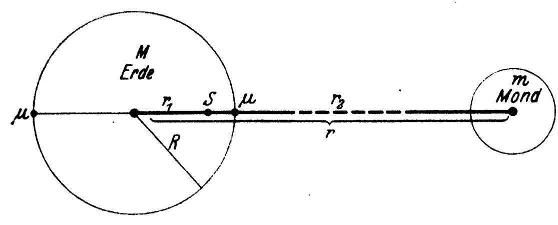


Abb. 49. Zur Theorie der Gezeiten.

Es sei ω die Winkelgeschwindigkeit, mit der Erde und Mond sich um ihren gemeinsamen Schwerpunkt drehen. Bei beiden Himmelskörpern wirkt der Zentrifugalkraft die gleiche Zentripetalkraft entgegen, nämlich ihre gegenseitige Anziehung, und diese beträgt nach § 63 GMm/r^2. Es gilt daher

$$M r_1 \omega^2 = m r_2 \omega^2 = G\frac{Mm}{r^2} \quad \text{oder} \quad \omega^2 = Gm/r^2 r_1 = G(M+m)/r^3 .$$

Wir bezeichnen mit k_1 die von Mondanziehung und Zentrifugalkraft erzeugte, der irdischen Schwerkraft entgegengerichtete Kraft an der dem Monde zugewandten Seite, mit k_2 diejenige an der vom Monde abgewandten Seite auf irgendeine Masse μ, die sich auf der Erdoberfläche befindet. Dann folgt aus dem Vorstehenden

$$k_1 = G\frac{\mu \cdot m}{(r-R)^2} + \mu(R - r_1)\omega^2, \qquad k_2 = -G\frac{\mu \cdot m}{(r+R)^2} + \mu(R + r_1)\omega^2 .$$

Führen wir die obigen Werte von ω^2 und r_1 in diese Gleichungen ein, so ergibt sich

$$k_1 = G\mu\left[\frac{m}{(r-R)^2} - \frac{m}{r^2} + (m+M)\frac{R}{r^3}\right], \quad k_2 = G\cdot\mu\left[-\frac{m}{(r+R)^2} + \frac{m}{r^2} + (m+M)\frac{R}{r^3}\right].$$

Nun ist R sehr klein gegen r, rund $r/60$ (s. o.). Wir können daher die Nenner $(r-R)^2$ und $(r+R)^2$ in eine Reihe entwickeln und nach dem zweiten Gliede abbrechen. Dann folgt

$$k_1 = G\mu\left[\frac{m}{r^2}\left(1 + \frac{2R}{r}\right) - \frac{m}{r^2} + (m+M)\frac{R}{r^3}\right] = G\mu(M + 3m)\frac{R}{r^3},$$

$$k_2 = G\mu\left[-\frac{m}{r^2}\left(1 - \frac{2R}{r}\right) + \frac{m}{r^2} + (m+M)\frac{R}{r^3}\right] = G\mu(M + 3m)\frac{R}{r^3}$$

also $k_1 = k_2$ bis auf sehr kleine Glieder höherer Ordnung. Bei dieser Ableitung haben wir von den besonderen Größenverhältnissen von Erde und Mond nur insofern Gebrauch gemacht, als wir aus ihnen die Berechtigung zu der vorstehenden Reihenentwicklung gezogen haben. Das Ergebnis gilt demnach für alle Fälle, in denen der Radius des betrachteten Himmelskörpers klein gegen den Abstand von dem zweiten Himmelskörper ist.

Wegen der Kleinheit von m gegenüber M kann man die Ausdrücke für die obigen Kräfte mit sehr geringem Fehler auch schreiben

$$k = k_1 = k_2 = G\mu M \frac{R}{r^3}.$$

Nun ist aber die Schwerkraft k' an der Erdoberfläche (§ 63)

$$k' = G\frac{\mu M}{R^2}.$$

Demnach ist $k = k' R^3/r^3$ oder rund $k'/_{200000}$. An den betrachteten Stellen ist daher die Schwerkraft scheinbar um rund $^1/_{200000}$ ihres normalen Betrages vermindert. Auch an den anderen Stellen der Erdoberfläche findet eine scheinbare Verminderung der Schwerkraft statt, die zwar von gleicher Größenordnung, aber kleiner ist als an den betrachteten Punkten, welche demnach die Orte maximaler Flut sind.

Während eines vollen Mondumlaufs (27,3 Tage) vollführen die Punkte maximaler Flut ebenfalls einen Umlauf um 360^0 im Raume. Sie würden also, wenn die Erde nicht selbst rotierte, die Erde in 27,3 Tagen einmal umlaufen. Da sich aber die Erde in 24 Stunden einmal um sich selbst, d. h. sozusagen unter den beiden Flutwellen weg, dreht, so wiederholen sich Flut und Ebbe an jedem Punkt der Erdoberfläche zweimal in rund $24^3/_4$ Stunden.

Der Mondflut überlagert sich die schwächere Sonnenflut und bewirkt, je nach der Stellung von Sonne und Mond zueinander, Verstärkung (Springflut) oder Schwächung (Nippflut). Die Differenz der Wasserstände zwischen Ebbe und Flut wird durch die Küstenverhältnisse stark beeinflußt und kann im offenen Ozean mehrere Meter betragen.

Da sich die Erde unter der Flutwelle fortdreht, so besteht eine dauernde Reibung im Wasser der Ozeane, welche mit einem Energieverlust auf Kosten der Erddrehung verbunden ist und eine allmähliche Abnahme der Umdrehungsgeschwindigkeit, d. h. eine Verlängerung des Tages zur Folge haben muß. Dieser Einfluß ist aber so gering, daß man ihn in historischen Zeiten nicht hat nachweisen können. Auf einer entsprechenden Ursache beruht aber jedenfalls die Tatsache, daß der Mond der Erde stets die gleiche Seite zukehrt, also bei einem Umlauf um die Erde eine Umdrehung um sich selbst ausführt. Als sich der Mond noch in flüssigem Zustand befand, muß die von der Erde her wirkende Gravitation in seiner Substanz sehr starke Gezeitenwirkungen hervorgerufen haben. Die dadurch erzeugte Reibung hat dazu geführt, daß die Drehung des Mondes relativ zur Erde völlig abgebremst worden ist.

68. **Fernwirkung und Nahewirkung.** Bis gegen Ende des 19. Jahrhunderts bestand die Meinung, daß die Schwerkraft eine sog. Fernwirkung sei, d. h. daß sie von einem Körper auf einen andern wirke, ohne daß in dem zwischen ihnen befindlichen Raume Veränderungen vor sich gehen. Daher nahm man auch an, daß diese Wirkung zu ihrer Ausbreitung durch den Raum keiner Zeit bedürfe, ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit also unendlich groß sei. Das gleiche wurde früher für die Ausbreitung elektrischer Kraftwirkungen angenommen.

Diese Vorstellung ist seit langer Zeit aufgegeben. Auch hat die Relativitätstheorie gezeigt, daß die Geschwindigkeit, mit der irgendeine Wirkung sich im Raume ausbreiten kann, die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum (300000 km/sec) nie überschreiten kann. An die Stelle der Annahme einer Fernwirkung ist die Nahewirkungs- oder Feldtheorie getreten. Diese sagt, daß eine an einer

Stelle des Raumes befindliche Masse den sie rings umgebenden Raum, also streng-genommen das ganze Weltall, in einen gewissen Zustand versetze, der zur Folge hat, daß ein an irgendeinem Ort im Raum befindlicher Körper dort eine Kraftwirkung erfährt, deren Größe aus dem Gravitationsgesetz folgt. Man sagt, daß der Raum Träger von Kraftfeldern (Schwerefeldern) sei. Wir werden später noch andere Arten von Kraftfeldern kennenlernen. Es ist bisher nicht möglich gewesen, die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Schwerewirkungen zu messen. Es kann aber kaum einem Zweifel unterliegen, daß die Fortpflanzung von Schwerewirkungen mit der gleichen Geschwindigkeit erfolgt wie die des Lichtes.

69. **Gravitationspotential und Feldstärke.** Steht eine Masse m unter der anziehenden Wirkung einer zweiten Masse M, so ist bei jeder Bewegung der Masse m, die den Abstand der beiden Massen vergrößert, gegen die Anziehung Arbeit zu leisten, bei jeder Bewegung, die den Abstand verkleinert, wird aber Arbeit gewonnen. Daraus folgt, daß die potentielle Energie, die die Masse m bezüglich der Masse M hat, von dem Abstande r der beiden Massen abhängig ist, und zwar beträgt sie, wenn man sie für die Entfernung $r = \infty$ gleich Null setzt (der Nullpunkt der potentiellen Energie kann nach § 44 willkürlich gewählt werden), nach Gl. 32, § 63,

$$A = \int_{\infty}^{r} G \frac{m M}{r^2} \, dr = -G \frac{m M}{r} \text{ erg.} \qquad (35)$$

Unter dem Gravitationspotential P an einer Stelle des Raumes versteht man die potentielle Energie der Masseneinheit, also von 1 g, in jenem Punkte. Es ist also das Gravitationspotential in der Entfernung r vom Schwerpunkt der Masse M

$$P = -G \frac{M}{r} \text{ erg g}^{-1} \text{ bzw. cm}^2 \text{sec}^{-2}. \qquad (36)$$

Man kann auch sagen: Das Gravitationspotential in einem Punkte des Raumes ist die Arbeit, welche gewonnen wird, wenn man die Masse 1 g von jener Stelle des Raumes bis in unendliche Entfernung von der anziehenden Masse bringt. Diese Arbeit ist gemäß Gl. 35 negativ, da ja tatsächlich Arbeit gegen die Schwere geleistet werden muß.

Unter der Feldstärke der Gravitation versteht man diejenige Kraft, welche infolge der Gravitation in irgendeinem Punkte des Raumes auf die Masse 1 g wirkt. Sie ist also, wenn wir es nur mit einer anziehenden Masse M zu tun haben, nach Gl. 32, § 63,

$$\mathfrak{G} = -G \frac{M}{r^2} \text{ erg g}^{-1} \text{cm}^{-1} \text{ bzw. cm sec}^{-2}. \qquad (37)$$

Hiernach und nach Gl. 33 ist also die Feldstärke der Gravitation auf der Erdoberfläche (M = Erdmasse, r = Erdradius) einfach gleich der Schwerebeschleunigung g auf der Erdoberfläche, wie überhaupt im Falle der Gravitation Feldstärke und Beschleunigung miteinander identisch sind, wegen der Beziehungen Kraft = (träge) Masse × Beschleunigung und Kraft = (schwere) Masse × Feldstärke. (Bei anderen Arten von Kraftfeldern, z. B. elektrischen, ist das nicht der Fall.)

7. Kapitel.

Einige praktische Anwendungen der mechanischen Gesetze[1].

70. Maschinen. Die mechanischen Gesetze finden im täglichen Leben ausgedehnteste Anwendung bei den sog. Maschinen. Man pflegt in der Technik die Maschinen in Kraftmaschinen und Arbeitsmaschinen einzuteilen. Unter einer Kraftmaschine versteht man eine Maschine, die eine von der Natur gebotene Energieform in diejenige Energieform verwandelt, die für den vorliegenden Gebrauchszweck benötigt wird. Hierher gehören die Dampfmaschinen und sonstige Arten von Motoren, die Generatoren für elektrische Energie usw. Die Arbeitsmaschinen setzen die von den Kraftmaschinen gelieferte Energie in die gewünschte Arbeit um. Beispiele hierfür sind die Werkzeugmaschinen, die Transportmaschinen, die Hebezeuge, Pressen usw. Die primäre Energie der Kraftmaschinen kann sehr verschiedener Natur sein. Im einfachsten Falle ist es sehr oft potentielle Energie irgendwelcher Körper, vor allem von Wasser, welches diese beim Fallen von höherem zu tieferem Niveau abgibt; oder es ist kinetische Energie, z. B. von strömendem Wasser oder bewegter Luft (Wind). Oder es ist Wärmeenergie, die ihrerseits zunächst durch einen Verbrennungsprozeß aus chemischer Energie gewonnen wird (Dampfmaschine, Explosionsmotor). Viele Maschinen werden durch Menschen- oder Tierkraft getrieben und beziehen daher ihre Energie aus den im menschlichen oder tierischen Körper ablaufenden chemischen Prozessen. (Ein Mensch, der mit der Schreibmaschine schreibt, wirkt als Kraftmaschine, mittels derer die Schreibmaschine als Arbeitsmaschine betrieben wird.)

Wir befassen uns hier zunächst lediglich mit denjenigen Maschinen, welche rein mechanischen Charakter haben, bei denen also sowohl die zugeführte als auch die umgewandelte Energie, soweit sie nicht durch Reibung nutzlos in Wärme verwandelt wird, mechanisch ist, also hauptsächlich mit den Arbeitsmaschinen. Das Charakteristische an allen derartigen Maschinen ist, daß sie bewegte Teile haben. Viele mechanische Maschinen bezwecken entweder die Änderung der potentiellen (Hebung) oder der kinetischen Energie (z. B. Beschleunigungsarbeit bei horizontaler Fortbewegung) von Massen oder beides zugleich. Andere dienen zur Überwindung von allen möglichen Arten von Widerständen. Alle Maschinen müssen dabei gleichzeitig die nie ganz vermeidbaren Gegenkräfte der Reibung überwinden. Viele Maschinen dienen sogar fast ausschließlich diesem Zweck. So leistet z. B. die Lokomotive eines Eisenbahnzuges oder die Maschine eines Schiffes lediglich während des Anfahrens Beschleunigungsarbeit, während der horizontalen Fahrt auf beliebig gekrümmter Bahn bei konstanter Geschwindigkeit aber nur Arbeit gegen die Reibung.

Wir betrachten als einfaches Beispiel die Arbeit gegen die Schwerkraft. Ein Körper soll gegen die Wirkung der Schwere um eine bestimmte Strecke h senkrecht gehoben werden. Damit diese Arbeit geleistet werden kann, ist es, wie in § 40 auseinandergesetzt ist, zunächst nötig, die Schwerkraft durch eine gleich große Gegenkraft zu kompensieren. Ist das geschehen, so genügt (wenn wir vorläufig von etwaiger Reibung absehen) ein beliebig kleiner Anstoß in der gewünschten Richtung, um den Körper bei dauernder Wirkung der Gegen-

---

[1]) Dieser Abschnitt macht in keiner Weise Anspruch auf Vollständigkeit. Es ist lediglich eine Reihe von Beispielen ausgesucht worden, die besonders geeignet scheinen, die Anwendung der mechanischen Gesetze anschaulich zu erläutern.

kraft mit konstanter Geschwindigkeit in dieser Richtung weiter zu befördern. Ist während der Bewegung auch Reibung zu überwinden, so muß auch die hierzu nötige Arbeit dauernd zugeführt werden.

Jede uns von der Natur zur Verfügung gestellte Energiequelle — der menschliche oder tierische Körper, fallendes Wasser usw. — besitzt eine obere Grenze der Leistung (§ 45), d. h. der Arbeit, die sie in einer Sekunde liefern kann. Aber nicht nur die Leistung ist begrenzt, sondern in der Regel auch die ursprünglich verfügbare Kraft, und sie reicht in vielen Fällen nicht aus, um die obenerwähnte Bedingung — Aufhebung der zu überwindenden Gegenkraft — zu erfüllen. So kann wohl ein Mensch 10 Zentner um 10 m heben, aber nur dann, wenn er es stückweise tut. Die erforderliche Arbeit kann er aufbringen, aber nicht die Kraft, um das Gewicht von 10 Zentnern zu kompensieren. So dienen die mechanischen Maschinen, wenn wir wieder von der Reibung absehen, vielfach dazu, das Produkt aus Kraft mal Weg, als das sich häufig die zugeführte Energie darstellt, umzuformen, d. h. es in ein gleich großes Produkt aus einer anderen Kraft multipliziert mit einem anderen Weg zu verwandeln, derart, daß diese andere Kraft diejenige Größe hat, die zur Leistung der gewünschten Arbeit erforderlich ist. So wirkt bei den mechanischen Maschinen an einem Ende eine Kraft k_1 längs eines gewissen Weges s_1 und erzeugt dafür am andern Ende eine Kraft k_2 von meist anderer Größe, welche längs eines Weges s_2 wirkt, der, von Reibungsverlusten abgesehen, durch das Energieprinzip gegeben ist:

$$k_1 s_1 = k_2 s_2 .$$

Diese Gleichung zeigt, daß ein durch eine Maschine erzielter Gewinn an Kraft ($k_2 > k_1$) nur erkauft werden kann durch einen entsprechenden Verlust an Weg ($s_2 < s_1$). Sieht man von Reibungsverlusten in der Maschine ab, so sind die Wege den Kräften umgekehrt proportional (sog. goldene Regel der Mechanik).

Bei den meisten Maschinen ist es so auf eine Änderung der Kraft abgesehen; doch muß man zu den Maschinen ihres gleichartigen Charakters wegen auch gewisse Vorrichtungen rechnen, bei denen es darauf ankommt, den Weg zu ändern. Hierzu gehören z. B. die Uhren, bei denen kleine Wege des Endes der Uhrfeder oder kleine Fallstrecken des Gewichtes umgesetzt werden in große Wege des Zeigerendes. Die zugeführte Energie dient hier lediglich zur Überwindung der Reibung.

Man kann noch so komplizierte mechanische Maschinen in ihren einzelnen Bestandteilen stets zurückführen auf gewisse Grundtypen, die sog. einfachen Maschinen. Diese wieder kann man in zwei Gruppen teilen, solche, die vom Typus des Hebels und solche, die vom Typus der schiefen Ebene sind. In die erste Gruppe gehören vor allem, außer dem Hebel selbst, das Wellrad und die Rolle, in die zweite Gruppe Keil und Schraube.

71. **Der Hebel als Maschine.** Die Hebelgesetze sind in § 32 gegeben worden. Der Drehpunkt des Hebels ist nach dem früher Gesagten der Angriffspunkt einer Zwangskraft k_z. Bei der praktischen Anwendung von Hebeln hat man zu unterscheiden zwischen Hebeln mit festem und solchen mit veränderlichem Drehpunkt. Der erste Fall liegt vor, wenn der Hebel in einer festen Achse gelagert ist. Ein Beispiel für den zweiten Fall bildet das Brecheisen. Es besteht ferner ein praktischer Unterschied, je nachdem der Drehpunkt zwischen den Angriffspunkten der beiden äußeren Kräfte liegt (sog. zweiarmiger Hebel) oder ob diese beide auf der gleichen Seite des Drehpunktes liegen (sog. einarmiger Hebel) (Abb. 50a und b).

Liegen die Angriffspunkte der drei Kräfte nicht, wie in Abb. 50a und b, auf einer Geraden, so liegt ein sog. Winkelhebel vor (Abb. 50c und d).

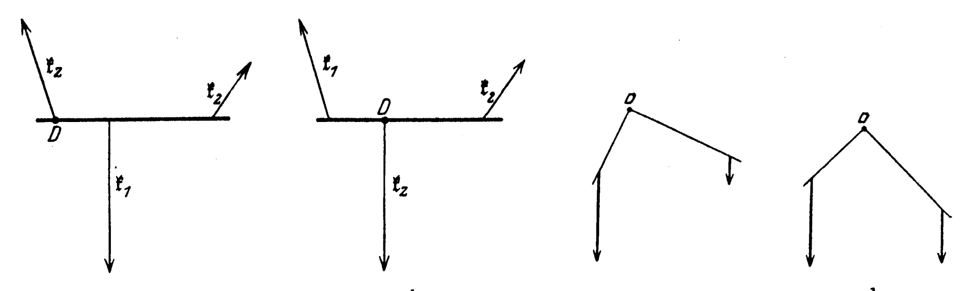
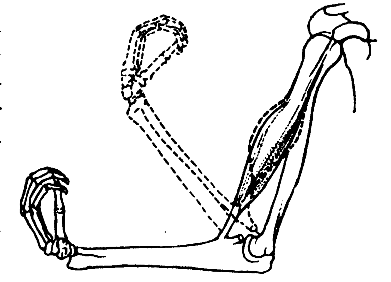


Abb. 50. a einarmiger Hebel, b zweiarmiger Hebel, c und d Kräfte am Winkelhebel bei verschiedener Hebelstellung.

Die unmittelbarste Anwendung findet der Hebel bei allen denjenigen Vorrichtungen, die auch im täglichen Leben als Hebel bezeichnet werden. Sie dienen zur Hebung von Lasten sowie zur Überwindung irgendwelcher sonstiger Widerstände. Wir finden sie z. B. in den Pumpenschwengeln, welche sowohl als einarmige wie als zweiarmige Hebel konstruiert werden, als Bestandteile der Dampfmaschinen, Bremsen und Pedale der Fahrräder usw. Sehr viele unserer gebräuchlichsten Werkzeuge sind teils einarmige, teils zweiarmige Hebel, z. B. Zangen und Scheren. Auch bei der Schubkarre bedienen wir uns einer Hebelwirkung. Wir können sie als einen Hebel auffassen, dessen beweglicher Drehpunkt in der Radachse liegt. Man kann mittels der Schubkarre Lasten heben und befördern, die man mit den Armkräften nicht zu heben vermöchte, und zwar um so besser, je länger die Schubstangen der Schubkarre sind.


Abb. 51. Der menschliche Arm als Hebel.

In vielen Fällen haben Hebel die Form von Rädern, so z. B. als Handgriffe zum Öffnen und Schließen von Ventilen (bei den Dampfheizungen, Dampfmaschinen usw.). Ein Hebel ist auch das Wellrad mit der daran befindlichen Kurbel, wie es z. B. bei Ziehbrunnen verwandt wird. Bei Brunnen älterer Art findet man allerdings auch oft noch die Anwendung eines gewöhnlichen Hebels zum Heraufholen der Eimer. Weitere Fälle sind die Griffe von Türen und vielen Werkzeugen, bei denen man durch Vergrößerung des Hebelarms das Drehmoment der wirkenden Kraft (§ 31) vergrößert (Korkzieher, Bohrer, Schlüsselgriff).

Auch die Glieder des menschlichen Körpers sind Hebel. Abb. 51 zeigt dies am Beispiel des Arms.

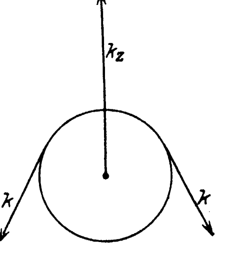


Abb. 52. Schema der festen Rolle.

72. Rollen und Flaschenzüge. Ein technisch wichtiger Hebeltyp sind die Rollen. Eine feste Rolle ist ein um eine feste Achse drehbares Rad, über welches eine Schnur, ein Riemen oder eine Kette läuft (Abb. 52). Wirkt an dieser nach jeder Seite eine Kraft k, so ist die Rolle im Gleichgewicht, wenn diese Kräfte gleich groß sind. Dabei tritt an der Achse eine Zwangskraft k_z auf, welche gleich $2\,k \cos \varphi/2$ ist, wenn φ der Winkel ist, den die beiden Kräfte k miteinander bilden.

In der Praxis dienen die festen Rollen meist dazu, die Richtung einer Kraft, z. B. des Zugs in einem Seil, zu ändern oder drehende Bewegungen zu übertragen (Transmissionen). Eine Änderung des Betrages der Kraft bewirken sie nicht.

Ist die Achse einer Rolle nicht festgelagert, so heißt die Rolle beweglich. Bewegliche Rollen finden sich vor allem bei den Flaschenzügen (Abb. 53).

Bei der Untersuchung der Gleichgewichtsverhältnisse an Flaschenzügen geht man am bequemsten davon aus, daß die Zugkraft in der Schnur überall gleich groß ist, und zwar gleich der am freien Ende angreifenden Kraft k. Daher wird die an zwei Schnurstücken hängende bewegliche Rolle mit der Kraft $2k$ nach oben gezogen. Gleichgewicht besteht, wenn an der beweglichen Rolle nach unten ebenfalls die Kraft $2k$ wirkt. Das Gleichgewicht des ganzen Systems wird dadurch hergestellt, daß im Aufhängepunkt des Fadens (A) eine Kraft k, im Aufhängepunkt der festen Rolle (B) eine Kraft $2k$ nach oben wirkt. Hierbei ist jedesmal vom Gewicht der Rollen abgesehen. — Zum gleichen Ergebnis kommt man durch Anwendung des Energieprinzips. Bewegt sich der Angriffspunkt der Kraft k um die Strecke s nach unten, so hebt sich (wegen der gleichbleibenden Fadenlänge) die bewegliche Rolle und damit der Angriffspunkt der an ihr wirkenden Kraft k' um die Strecke $s/2$. Also ist

$$k \cdot s = k' \cdot s/2 \quad \text{und} \quad k' = 2k.$$

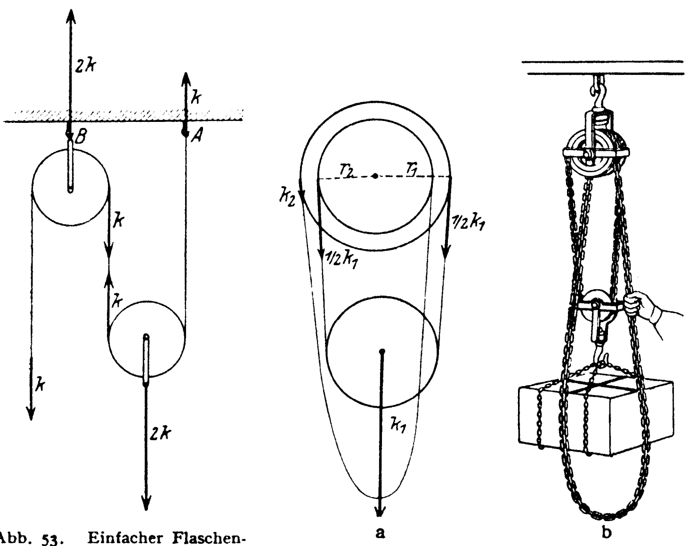


Abb. 53. Einfacher Flaschenzug mit einer festen und einer beweglichen Rolle.

Abb. 54. Differentialflaschenzug. a Schema, b praktische Ausführung.

In analoger Weise wie beim einfachen Flaschenzug lassen sich die Kraftverhältnisse bei Vorhandensein mehrerer fester und beweglicher Rollen berechnen.

Eine andere Form des Flaschenzuges ist der Differentialflaschenzug (Abb. 54). Zwei aufeinander befestigte Räder von etwas verschiedenen Radien r_1 und r_2 bilden eine feste Rolle. Eine Schnur (Kette ohne Ende) läuft über die Umfänge beider Räder und trägt eine bewegliche Rolle, an welcher eine Kraft k_1 wirkt. Dieser wird durch die an der Schnur wirkende Kraft k_2 das Gleichgewicht gehalten. Da an der beweglichen Rolle nach unten die Kraft k_1 wirkt, so muß der Zug in der Schnur $k_1/2$ sein. Die feste Rolle erfährt also zunächst zwei entgegengesetzt gerichtete Drehmomente von den Größen $\frac{1}{2} k_1 r_1$ und $-\frac{1}{2} k_1 r_2$. Die Summe dieser Drehmomente ist ein die Rolle rechts drehendes Drehmoment von der Größe $\frac{1}{2} k_1 (r_1 - r_2)$. Es muß, damit Gleichgewicht besteht, durch ein links drehendes Drehmoment von gleicher Größe aufgehoben werden. Dieses Drehmoment wird von der Kraft k_2 geliefert und hat die Größe $k_2 r_1$. Es ist also $k_2 = \frac{1}{2} k_1 \frac{r_1 - r_2}{r_1}$. Ist r_1 von r_2 nur wenig verschieden, so ist k_2 sehr viel kleiner als k_1. Es ge-

nügt also eine relativ kleine Kraft k_2, um Arbeit gegen eine erheblich größere Kraft k_1 zu leisten. Aus dem Energieprinzip — sowie auch aus einfachen geometrischen Überlegungen (s. o.) — folgt aber auch, daß der Angriffspunkt der Kraft k_2 beim Differentialflaschenzug verhältnismäßig sehr große Wege zurückzulegen hat. Bei einer vollen Umdrehung des Rades verschiebt sich der Angriffspunkt der Kraft k_2 um die Strecke $2\pi r_1$ nach unten, der Teil der Schnur, an dem die bewegliche Rolle hängt, verkürzt sich also einerseits um den gleichen Betrag, andererseits verlängert er sich um den Betrag $2\pi r_2$. Daher beträgt seine Verkürzung $2\pi(r_1 - r_2)$. Infolgedessen hebt sich die bewegliche Rolle und damit der Angriffspunkt der Kraft k_1 um die Hälfte dieses Betrages. Dann folgt aus dem Energieprinzip wie oben

$$\pi k_1 (r_1 - r_2) = 2\pi k_2 r_1, \quad \text{also} \quad k_2 = k_1 \frac{r_1 - r_2}{2 r_1}.$$

73. **Zahnräder.** Hebel sind auch die Zahnräder. Im Falle der Abb. 55 erzeugt die an der 35 cm langen Kurbelwelle wirkende Kraft von 15 kg* ein Drehmoment von der Größe $15 \cdot 35 = 525$ kg* · cm. Infolgedessen entsteht an der Berührungsstelle der beiden Zahnräder eine Kraft k_1, welche am kleinen Zahnrad vom Radius 5 cm ein gleich großes aber entgegengesetztes Drehmoment erzeugt. Es ist also $5 k_1 = 525$ kg* oder $k_1 = 105$ kg*. Die gleiche Kraft wirkt auf das große Zahnrad vom Radius 20 cm und erzeugt an ihm ein Drehmoment von der Größe $20 \cdot 105 = 2100$ kg* · cm. Diesem wird durch das Drehmoment der an der Welle vom Radius 7 cm wirkenden Kraft von 300 kg* das Gleichgewicht gehalten, da $7 \cdot 300 = 2100$.

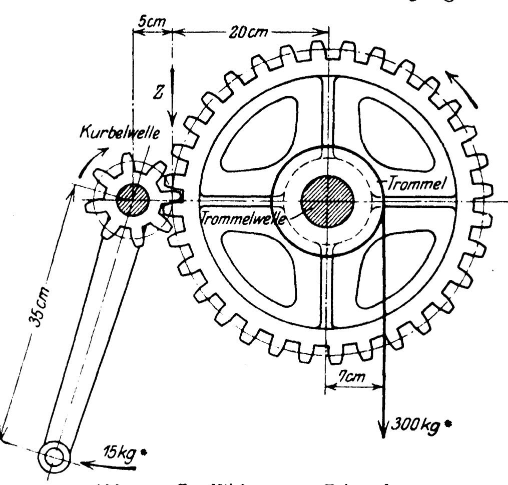


Abb. 55. Zur Wirkung von Zahnrädern.

Die an der Kurbelwelle wirkende Kraft von 15 kg* vermag also der an der Welle des großen Zahnrades wirkenden Kraft von 300 kg* das Gleichgewicht zu halten, d. h. man kann mit Aufwendung der Kraft von 15 kg* eine zwanzigmal so große Kraft überwinden. Eine einfache Rechnung zeigt, daß bei einer Bewegung des Systems das Produkt aus Kraft · Weg an beiden Enden des Systems gleich groß ist, wie es das Energieprinzip verlangt. Wir hätten auch das Gleichgewicht unter Zugrundelegung des Energieprinzips berechnen können (goldene Regel, s. § 70).

74. **Keil und Schraube.** Einfache Maschinen vom Typus der schiefen Ebene sind der Keil und die Schraube. Die Wirkung des Keils ist aus Abb. 56 ersichtlich. Die Kraft k_1 hält den beiden Kräften k_2 das Gleichgewicht, wenn $k_1 = 2 k_2 \sin \varphi/2$. Die beiden seitlichen Kräfte sind also bei spitzem Winkel φ sehr viel größer als die den Keil treibende Kraft. Daher die Benutzung des Keils z. B. zum Spalten von Holz. Auf dem gleichen Prinzip beruht die schneidende Wirkung von Messern.

Eine Schraube kann man als eine spiralig aufgewickelte schiefe Ebene ansehen (vgl. Wendeltreppe). Im allgemeinen findet bei der praktischen Verwendung von Schrauben gleichzeitig eine Anwendung des Hebelgesetzes statt (Flügelschraube, breiter Schraubenkopf mit Nut zum Ansetzen des Schraubenziehers usw.). An der Peripherie des Schraubenkopfes vom Radius r wirke tangential

eine Kraft k_1. Hat die Schraube unter der Wirkung dieser Kraft eine volle Umdrehung ausgeführt, so ist die dabei geleistete Arbeit gleich $k_1 \cdot 2\pi r$. Diese Arbeit wird von dem Schraubenende oder den Schraubenwindungen auf das zu überwindende Hindernis übertragen. Die Verschiebung der Schraube bei einer Umdrehung ist gleich der Ganghöhe s (Abstand zweier Schraubengänge) der Schraube. Ist die Kraft, mit der das Schraubenende gegen das Hindernis drückt, gleich k_2, so ist die geleistete Arbeit gleich $k_2 s$. Nach dem Energieprinzip muß dies gleich der am Schraubenkopf geleisteten Arbeit sein. Es ist daher $k_1 \cdot 2\pi r = k_2 s$ oder

$$k_2 = k_1 \frac{2\pi r}{s}.$$

Die Kraft, die mit einer Schraube ausgeübt werden kann, ist also um so größer, je geringer die Ganghöhe s und je größer der Arm r der am Schraubenkopf angreifenden drehenden Kraft ist (Anwendung bei Schraubenpressen aller Art).

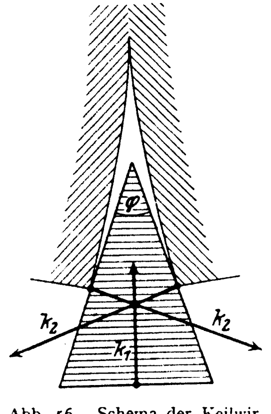


Abb. 56. Schema der Keilwirkung.

Bei manchen Schrauben, insbesondere Holzschrauben und Holzbohrern, tritt neben der eigentlichen Schraubenwirkung auch noch eine Keilwirkung auf, indem der Durchmesser der Schraube von der Spitze an allmählich zunimmt. Bei den Holzbohrern wirkt hauptsächlich nur der vorderste Teil als Schraube, mittels derer der Bohrer in das Holz eindringt. Die Kanten der sehr steilen oberen Windungen wirken als Messer, die das durch die Spitze vorgebohrte Loch durch Schneiden vergrößern.

75. **Präzisionswagen.** Hebel sind auch die meisten Wagen. Eine Wägung ergibt zwar zunächst das Gewicht eines Körpers, bezweckt aber durchweg die Ermittelung der Menge der gewogenen Substanz, d. h. ihrer Masse, die ja dem Gewicht maßzahlgleich ist, wenn wir das Gewicht in g* oder einer der davon abgeleiteten Einheiten ausdrücken. Von den vielen verschiedenen Wagentypen wollen wir hier nur die physikalisch wichtigste betrachten, die Präzisionswage (Abb. 57a) — oft auch Analysenwage oder chemische Wage genannt, weil sie besonders bei chemischen Wägungen benutzt wird. Eine solche besteht aus einem gleicharmigen Wagebalken, welcher in seiner Mitte eine sehr feingeschliffene Schneide aus Stahl trägt, die auf einer horizontalen Platte aus Stahl oder Achat ruht und als Drehachse dient. Jede Wage hat eine Arretierung, d. h. eine Vorrichtung, mittels derer der Wagebalken, wenn die Wage nicht benutzt wird, von der Unterlage zwecks Schonung abgehoben werden kann. An den Wagebalken hängen, meist ebenfalls auf Schneiden, die sich in möglichst genau gleichem Abstande von der Mittelschneide und in der gleichen Geraden mit ihr befinden, zwei Wagschalen zum Aufnehmen des zu wägenden Körpers einerseits und der Gewichtsstücke andererseits. In der Mitte des Balkens ist ein längerer Zeiger befestigt, der über einer Skala spielt. Der Wagebalken ist zwecks möglichster Leichtigkeit bei großem Widerstand gegen Durchbiegungen meist nach dem Prinzip der Brückenträger konstruiert. Er besitzt eine Vorrichtung, um durch Verstellen zweier kleiner, an ihm angebrachter Massen seinen Schwerpunkt sowohl vertikal wie horizontal zu verschieben. Ersteres dient zur Änderung der Empfindlichkeit, letzteres zur Einstellung des Zeigers auf die Mitte der Skala. Am Wagebalken ist ferner eine Vorrichtung angebracht (die in Abb. 57a am Wagebalken sichtbare Skala), welche es erlaubt, eine kleine Masse von meist 10 mg*-Gewicht, den Reiter

Abb. 57a oben rechts), in beliebigem Abstande von der Mitte auf ihn aufzusetzen (s. u.).

Eine Wägung besteht im Prinzip darin, daß man nach Auflegen des zu wägenden Körpers auf die eine Wagschale auf die andere so viele Gewichtsstücke legt, bis die Wage wieder möglichst genau so einsteht wie in unbelastetem Zustande. Kleinere Gewichtsstücke als solche von 10 mg* werden aber in der Regel nicht hergestellt. Zur Ermittelung der Milligramm dient der Reiter. Ist der Abstand der Aufhängungen der Wagschalen von der Balkenmitte l, und wird der Reiter im Abstande r von der Balkenmitte (Drehachse) aufgesetzt, so wirkt er nach dem Hebelgesetz ebenso, als sei auf die Wagschale eine Masse von $10r/l$ mg* Gewicht aufgelegt. Da die zum Aufsetzen des Reiters bestimmte Vorrichtung in 10 gleiche Teile geteilt ist (eine oft vorhandene feinere Einteilung wird meist nicht benutzt), so kann man durch die verschiedenen Stellungen des 10 mg* schweren Reiters Gewichte von 1 bis 10 mg* auf der Wagschale ersetzen. Empfindliche Wagen sind aber noch im-

Abb. 57a. Präzisionswage.

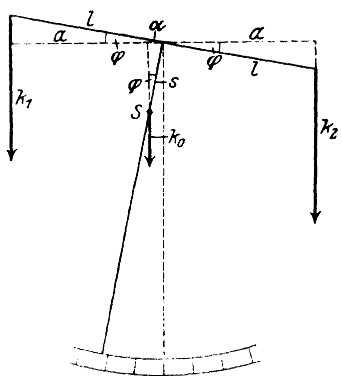


Abb. 57b. Zur Empfindlichkeit einer Wage.

stande, weitere Dezimalen des Gewichtes anzugeben. Sie lassen sich im allgemeinen auf die geschilderte Weise noch nicht zum Einstehen auf ihren Nullpunkt (= Ruhelage ohne Belastung) bringen. Man verfährt nun weiter so. Man schließt das Gewicht des Körpers zwischen zwei um 1 mg* verschiedene Grenzen ein, indem man feststellt, daß z. B. 51,235 g* zu wenig, aber 51,236 g* bereits zu viel ist. Im ersten Falle schlage der Zeiger noch um x Skalenteile (auf Zehntel geschätzt) von der Nullage nach rechts, im zweiten Falle um y Skalenteile nach links aus. Dann sind zum Gewicht von 51,235 g* noch $x/(x+y)$ mg* hinzuzuzählen. Ist z. B. $x = 2{,}5$, $y = 1{,}9$, so ist das Gewicht des Körpers 51,23557 g*. Natürlich ist die genaue Nullage, die leicht etwas vom Nullpunkt der Skala abweicht — was der Genauigkeit der Wägung keinen Abbruch tut — vor und nach jeder Wägung genau zu bestimmen.

Genaue Wägungen werden stets bei schwingender Wage angestellt. Jede Wage gerät bei Aufhebung der Arretierung in leichte Schwingung. Man liest

eine ungerade Zahl von aufeinander folgenden Umkehrpunkten des Zeigers ab, z. B. 4 rechts, 3 links, nimmt zunächst das Mittel aus den Ablesungen auf jeder Seite für sich, und aus diesen Mittelwerten wird das Mittel genommen. Dies ist der Punkt, auf den sich die Wage einstellen würde, wenn sie zur Ruhe kommt.

Man beachte, daß die Wage ein dreiarmiger Hebel ist, und daß daher auf den Wagebalken drei Drehmomente wirken. Zwei einander ganz oder nahezu gleiche Drehmomente werden von den Wagschalen mit den aufgelegten Gewichten geliefert, das dritte von dem im Schwerpunkt S des Wagebalkens angreifenden Eigengewicht des Wagebalkens (Abb. 57b).

Eine Wage ist um so empfindlicher, je größere Ausschläge sie bei einer bestimmten Gewichtsdifferenz der beiden Wagschalen zeigt. Die Empfindlichkeit hängt von der Lage des Schwerpunktes des Wagebalkens ab. Der Wagebalken befindet sich im stabilen Gleichgewicht, sein Schwerpunkt liegt unterhalb der Drehachse (Schneide). Abb. 57b gibt ein Schema eines Wagebalkens. S ist der Schwerpunkt, s der Abstand des Schwerpunktes von der Drehachse. Der Balken, dessen Länge $2\,l$ sei, befindet sich infolge ungleicher Belastung in der gezeichneten Lage (Ablenkungswinkel φ) im Gleichgewicht. k_0 sei die infolge des Eigengewichtes des Wagebalkens in S angreifende Kraft. Dann folgt aus dem Hebelgesetz

$$k_1 a + k_0 x = k_2 a \quad \text{oder} \quad k_1 l \cos\varphi + k_0 s \sin\varphi = k_2 l \cos\varphi.$$

Es ist also $\operatorname{tg}\varphi$ oder bei kleinem Ausschlag $\varphi = \frac{k_2 - k_1}{k_0}\,\frac{l}{s} = \frac{\Delta k}{k_0}\,\frac{l}{s}$, wenn Δk die Differenz der Gewichte auf den beiden Wagschalen bedeutet. Die Empfindlichkeit ist also um so größer, je länger die Wagebalken sind, je kleiner die Kraft k_0, d. h. das Gewicht des Wagebalkens ist, und je dichter der Schwerpunkt des Wagebalkens an der Schneide liegt.

Es könnte hiernach zunächst scheinen, daß man einer Wage eine beliebig große Empfindlichkeit erteilen könne, indem man die Wagebalken möglichst lang und den Schwerpunktsabstand s möglichst klein macht. Dieser an sich vorhandenen Möglichkeit ist aber durch praktische Rücksichten eine Grenze gesetzt. Jede Vergrößerung der Empfindlichkeit bringt nämlich unvermeidlich eine Vergrößerung der Schwingungsdauer der Wage und eine Abnahme ihrer Stabilität mit sich. Die Schwingungsdauer darf aber eine gewisse Grenze nicht überschreiten, wenn das Arbeiten mit der Wage nicht zu zeitraubend und schwierig werden soll. Da der Wagebalken (mit den angehängten Gewichten) um eine Achse drehbar und in stabilem Gleichgewicht ist, so kann man ihn als ein Pendel auffassen, das um seine stabile Gleichgewichtslage schwingen kann. Es gilt daher auch hier die Gleichung

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}}$$

(Gl. 27, § 60). Es sei J_0 das Trägheitsmoment des Wagebalkens selbst (einschließlich der Wagschalen), m die auf jeder Seite aufgelegte Masse. Dann ist das gesamte Trägheitsmoment des schwingenden Systems $J = J_0 + 2ml^2$. Die Direktionskraft D des schwingenden Systems wird durch das im Schwerpunkt des Wagebalkens angreifende Gewicht k_0 des Wagebalkens geliefert. Es beträgt demnach $D = k_0 s$. Vergrößert man die Länge l der Wagenarme, so vergrößert man dadurch nicht nur den Ausdruck $2m\,l^2$, sondern auch das Trägheitsmoment J_0 des Wagebalkens. Hierdurch wird die Schwingungsdauer τ vergrößert. Im gleichen Sinne wirkt eine Verkleinerung des Drehmoments D durch Verkleinerung des Schwerpunktabstandes s.

Wie man aus der obigen Gleichung für τ nach Einsetzung des Wertes für J sieht, wächst die Schwingungsdauer einer Wage auch mit der Größe von m, also mit dem Gewicht der aufgelegten Massen.

Voraussetzung für die strenge Gültigkeit der vorstehenden Überlegungen ist, daß die Aufhängepunkte der Wagschalen mit der Mittelschneide des Wagebalkens genau in einer Geraden liegen. Ist dies nicht genau der Fall, so werden die Verhältnisse komplizierter. Insbesondere wird dann die Empfindlichkeit von der Belastung abhängig. Eine geringe Abhängigkeit der Empfindlichkeit von der Belastung zeigt sich bei jeder Wage schon deshalb, weil jeder Wagebalken sich unter der Wirkung der Gewichte ein wenig durchbiegt, so daß die drei genannten Punkte, wenn sie bei unbelasteter Wage etwa genau in einer Geraden liegen, dies bei belasteter Wage nicht mehr tun, und um so weniger, je größer die Belastung ist.

76. **Absolute Wägung.** Eine einzige, mit aller Sorgfalt ausgeführte Wägung gibt noch nicht die Gewähr dafür, daß — auch absolute Richtigkeit der benutzten Gewichtsstücke vorausgesetzt — das Gewicht eines Körpers richtig bestimmt ist, denn nie sind die beiden Wagearme genau gleich lang. Schon die fast nie ganz zu vermeidenden Temperaturdifferenzen bedingen durch die Wärmeausdehnung (§ 160) stets kleine Ungleichmäßigkeiten, welche bei der außerordentlichen Genauigkeit, mit der eine gute Wage arbeitet, durchaus ins Gewicht fallen. Es sei die Länge des einen Wagebalkens l, die des andern $l + \delta$. Das Gewicht des zu wägenden Körpers sei k. Die Wägung ergebe das scheinbare Gewicht k_1. Dann ist nach dem Hebelgesetz $kl = k_1(l + \delta)$. Jetzt vertauscht man die Wagearme, d. h. man legt nunmehr den zu wägenden Körper und die Gewichtsstücke je auf die andere Seite. Dann ergibt sich ein anderes scheinbares Gewicht k_2, und es ist $k(l + \delta) = k_2 l$. Aus diesen Gleichungen folgt einerseits das wahre Gewicht $k = \sqrt{k_1 k_2}$, andererseits das Verhältnis der Wagearme $\frac{l + \delta}{l} = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}$. Das wahre Gewicht ist also das geometrische Mittel aus den beiden scheinbaren Gewichten. Wegen des geringen Unterschiedes kann man es auch durch das arithmetische Mittel $(k_1 + k_2)/2$ ersetzen. Aus dem gleichen Grunde kann man für das Verhältnis der Wagebalken setzen $1 + \frac{k_2 - k_1}{2k_1}$.

Die Anstellung einer derartigen Doppelwägung ist immer dann nötig, wenn man das absolute Gewicht eines Körpers ermitteln will. In sehr zahlreichen Fällen, z. B. bei fast allen chemischen Wägungen, dienen Wägungen aber nur zur Bestimmung des Massenverhältnisses von verschiedenen Körpern. Dieses ergeben auch Wägungen mit einer nicht genau gleicharmigen Wage richtig, vorausgesetzt, daß die zu wägenden Körper stets auf der gleichen Seite der Wage liegen. Die Einzelgewichte werden zwar im Verhältnis der Längen der Wagebalken zu groß oder zu klein bestimmt, aber da dadurch alle Massen — vorausgesetzt, daß sie stets auf der gleichen Seite der Wage liegen — im gleichen Verhältnis zu groß oder zu klein bestimmt werden, so fällt der Fehler bei der Verhältnisbildung wieder heraus.

Über die Korrektionen des Gewichtes, die noch wegen des Auftriebs des Körpers und der Gewichtsstücke in der Luft anzubringen sind, s. § 107.

77. **Verwandlung von hin- und hergehender in drehende Bewegung.** Ein in der Technik häufig auftretendes Problem ist die Umwandlung von hin- und hergehender Bewegung in drehende. Technisch besonders wichtig ist dies bei den Dampfmaschinen (§ 202), bei denen die Hin- und Herbewegung des Kolbens meist in Rotation von Rädern umgesetzt werden soll (Kurbeltrieb). Das Schema einer solchen Vorrichtung zeigt Abb. 58. Die durch die bewegliche Stange

übertragene Kraft k bewirkt ein Drehmoment von der Größe $k'r$, welches das um seine Achse drehbare Rad (Radius r) in Bewegung setzt. Das Drehmoment ist 0 für $\varphi = 0$ und $\varphi = 180^0$ (sog. tote Punkte).

Um trotz des veränderlichen Drehmoments einen möglichst gleichmäßigen Gang der Maschine zu gewährleisten, verbindet man die rotierenden Teile mit Schwungrädern, d. h. Rädern von großer Masse, welche durch ihre Trägheit größere Schwankungen der Umlaufsgeschwindigkeit verhindern und die Maschine über die toten Punkte hinwegtreiben. Man kann diese Schwungräder als Energiespeicher betrachten, welche Rotationsenergie bei großem Drehmoment aufspeichern und bei kleinem Drehmoment abgeben.

Bei Maschinen mit schweren hin- und hergehenden Teilen findet eine dauernde Hin- und Herverlagerung des Schwerpunktes statt. Das führt zum Auftreten großer Kräfte in den Fundamenten der Maschine und damit zu starker Beanspruchung der Gebäude oder Fahrzeuge. Man ist daher bei großen Maschinen stets bemüht, möglichst weitgehenden Massenausgleich zu erzielen, d. h. die Maschine so zu bauen, daß die hin- und hergehenden Bewegungen ihrer einzelnen Teile so abgeglichen sind, daß der Schwerpunkt der Maschine als Ganzes möglichst in Ruhe bleibt.

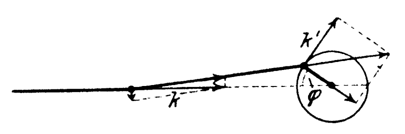
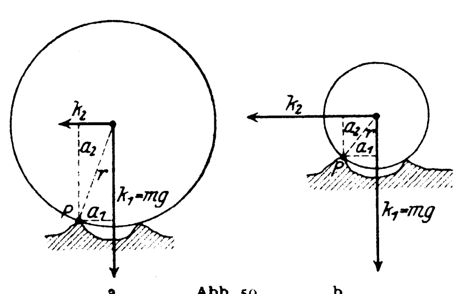


Abb. 58. Verwandlung von hin- und hergehender in drehende Bewegung.

78. **Wagenräder.** Eine der wichtigsten menschlichen Erfindungen ist das Wagenrad, welches den Transport von Lasten über längere, insbesondere ch echte Wegstrecken erst möglich gemacht hat. Der Vorzug des Wagenrades gegenüber der primitiven Schlittenkufe beruht vor allem darin, daß bei ihm eine viel geringere Reibung auftritt als bei letzterer. Die durch einen schlechten, holprigen Weg auftretenden Hindernisse werden von einem Wagen um so leichter überwunden, je größer seine Räder sind, wie aus Abb. 59 ersichtlich ist. Damit sich das Rad weiter nach links bewegt, muß es sich um den Punkt P drehen, und damit das möglich ist, muß die Zugkraft k_2 ein mindestens ebenso großes Drehmoment $k_2 a_2$ um diesen Punkt ausüben wie die Schwerkraft $k_1 = mg$, deren Drehmoment $mg\,a_1$ ist. Aus der Abb. 59 ergibt sich $k_2 a_2 = k_2 \sqrt{r^2 - a_1^2} = mg\,a_1$, also $k_2 = mg \frac{a_1}{\sqrt{r^2 - a_1^2}}$. Die Zugkraft k_2 kann also bei gleichem a_1 und gleicher auf der Achse befindlicher Masse m um so kleiner sein, je größer der Radius r des Rades ist.



a Abb. 59. b
Wirkung des Wagenrades. a großes, b kleines Rad.

Die Verwendung von Gummireifen hat den Vorteil, daß kleine Hindernisse den Reifen eindrücken, statt daß das Fahrzeug über jedes derartige Hindernis hinweggehoben werden muß. Der Arbeitsaufwand ist also geringer als bei festen Reifen.

79. **Trägheitswirkungen bei gekrümmten Bahnen (Zentrifugalkraft).** In der Praxis spielen Trägheitswirkungen bei der Bewegung von Körpern auf gekrümmten Bahnen eine bedeutende Rolle. Ein geläufiges Beispiel hierfür ist das Fahren einer Kurve mit dem Fahrrade. Bekanntlich genügt hierfür die Schrägstellung des Steuerrades allein nicht. Es muß vielmehr noch eine Zentripetalkraft hinzukommen, die diejenige Größe hat, welche der Krümmung der Bahn (Radius r), der Winkelgeschwindigkeit $\omega = v/r$ und der im Schwerpunkt

des Systems Fahrrad + Fahrer vereinigt gedachten Masse m entspricht. Sie muß nach Gl. 20, § 37, mv^2/r betragen. Diese Kraft wird von der Schwerkraft geliefert, indem der Schwerpunkt des Systems durch seitliche Neigung nach derjenigen Richtung verlagert wird, in der die Kurve gefahren werden soll. (Es wäre also auch für einen geübten Radfahrer schwierig, an der Oberfläche des Mondes Kurven zu fahren, weil dort nur eine geringe Schwerkraft herrscht!). In Abb. 60 sei das Fahrrad nebst Fahrer durch die Gerade AB schematisiert. S sei der Schwerpunkt, der wegen der geringen Masse des Fahrrades nahezu mit dem Schwerpunkt des Fahrers zusammenfällt. In S greift die Schwerkraft mg an. Wir zerlegen sie in zwei Komponenten, eine horizontale k_1 und eine in Richtung AB gelegene k_2. Auf S wirkt ferner in der Richtung BA die durch die Kraftkomponente k_2 hervorgerufene Zwangskraft k_3, welche gleich k_2 und ihr entgegengerichtet ist, k_2 also aufhebt. Es bleibt demnach nur die Kraft k_1 übrig, und diese liefert die zum Zustandekommen der kreisförmigen Bewegung, d. h. zum Fahren einer Kurve erforderliche Zentripetalkraft. Aus der Abb. 60 liest man ab, daß der Neigungswinkel φ des Fahrrades durch die Bedingung

$$k_1 = mg \operatorname{tg} \varphi = \frac{m v^2}{r} \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{v^2}{r g}$$

gegeben ist. Die Neigung φ muß also um so größer sein, je größer die Geschwindigkeit v und je kleiner der Krümmungsradius r ist. Im Fußpunkte B wirkt eine Kraft, die gleich k_2 ist, schräge gegen den Erdboden. Wir zerlegen sie wieder in zwei Komponenten, k_2' parallel und $k_2'' = mg$ senkrecht zum Erdboden. (Senkrecht zum Erdboden wirkt also nur das Gewicht des Fahrrades nebst Fahrer, sofern die Bahn horizontal ist.) Letztere wird durch die Gegenwirkung des Erdbodens aufgehoben, erstere wenn sie nicht zu groß ist, also bei kleinem Winkel φ, durch die Reibung. Bei großer Neigung, also insbesondere bei großer Geschwindigkeit v, genügt die Reibung nicht (Ausgleiten auf nassem Asphalt!), und es muß dafür gesorgt werden, daß k_2 senkrecht zur Bahnfläche liegt. Das geschieht bekanntlich bei den Radrennbahnen dadurch, daß man sie in den Kurven schräge legt (Überhöhung). (In diesem Falle wirkt bei einer bestimmten Geschwindigkeit die volle Kraft k_2, die größer als mg ist, senkrecht zur Bahn.)

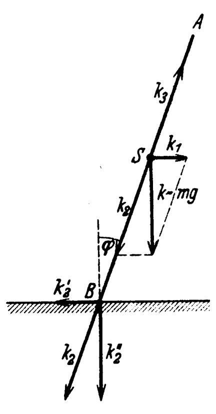


Abb. 60. Schema des Radfahrers in einer Kurve.

Die Kunst des Radfahrens besteht darin, daß man stets Neigung und Bahnkrümmung durch Nachstellen des Vorderrades miteinander in Einklang bringt. Die Bahnkrümmung ist eindeutig durch die Stellung des Vorderrades bestimmt. Bei gegebener Bahnkrümmung und Geschwindigkeit übt die Reibung am Boden — die Gegenwirkung (§ 29) gegen die Kraft k_2', Abb. 60 — eine horizontal gerichtete Kraft auf das Fahrrad aus, die gleich mv^2/r, also um so größer ist, je kleiner der Krümmungsradius ist. Da diese Kraft nach innen gerichtet ist und unterhalb des Schwerpunktes angreift, so sucht sie das Fahrrad nach außen umzukippen. Durch Ausnutzung dieser Tatsache hat man es in der Hand, die unvermeidlichen kleinen, wechselnden Neigungen des Fahrrades zu kompensieren. Ist dadurch eine Abweichung aus der gewünschten Richtung eingetreten, so muß erst überkompensiert werden. Will man also z. B. plötzlich aus der geraden Richtung abbiegen, etwa nach links, so muß erst eine passende Linksneigung hergestellt werden, was dadurch geschieht, daß man die Lenkstange zuerst ein wenig nach r e c h t s zieht. Will man aus einer gekrümmten Bahn wieder geradeaus fahren, so muß die Lenkstange zuerst noch mehr herumgezogen

werden, damit die vorhandene Neigung vernichtet wird. Die Richtigkeit dieser Behauptungen kann man beim Radfahren leicht nachweisen, wenn man die Änderungen plötzlich erfolgen läßt. Da die Zentripetalkraft mit v^2 wächst, so bedarf es bei großer Geschwindigkeit viel kleinerer Lenkstangenbewegungen, um Gleichgewicht zu halten, als bei kleiner Geschwindigkeit. Darum ist es leichter, schnell zu fahren, als langsam. Die Vordergabel der Fahrräder ist gewöhnlich so gebaut, daß eine leichte Körperbewegung genügt, um die Lenkstange ein wenig herumzuziehen. Bei nicht zu kleiner Geschwindigkeit genügen diese kleinen Bewegungen der Lenkstange, um kleine zufällige Neigungen zu kompensieren, so daß man dann freihändig fahren kann.

Bei größeren Geschwindigkeiten spielt beim Fahrrade auch die Achsenstabilität der rotierenden Räder, also eine Kreiselwirkung (§ 48), eine gewisse Rolle.

Ein weiteres Beispiel für die Trägheitswirkungen rotierender Körper ist das sog. Teufelsrad, das man oft in Vergnügungsparks findet, eine glatte Scheibe, die in schnelle Rotation versetzt werden kann. Personen, welche sich auf der Scheibe befinden, können sich auf ihr nicht halten, sondern werden durch die Zentrifugalkraft (Standpunkt des mitrotierenden Beobachters, § 38) nach außen geschleudert. Es ist lehrreich, den Vorgang im einzelnen zu verfolgen. Beim Inbetriebsetzen der Scheibe genügt die geringe vorhandene Reibung, um den auf ihr befindlichen Massen eine gewisse Geschwindigkeit zu erteilen. Die Massen suchen infolge ihrer Trägheit ihre Geschwindigkeit nach Größe und Richtung aufrechtzuerhalten. Die Reibung an der Scheibe, die die Massen auszunehmen sucht, bewirkt eine Verzerrung der geraden Bahn in eine mehr oder weniger gekrümmte Spirale, die schließlich über den Scheibenrand hinausführt.

Auf einer Trägheitswirkung beruht auch das bekannte Zirkuskunststück „Looping the Loop", die Schleifenfahrt, bei der ein Radfahrer oder

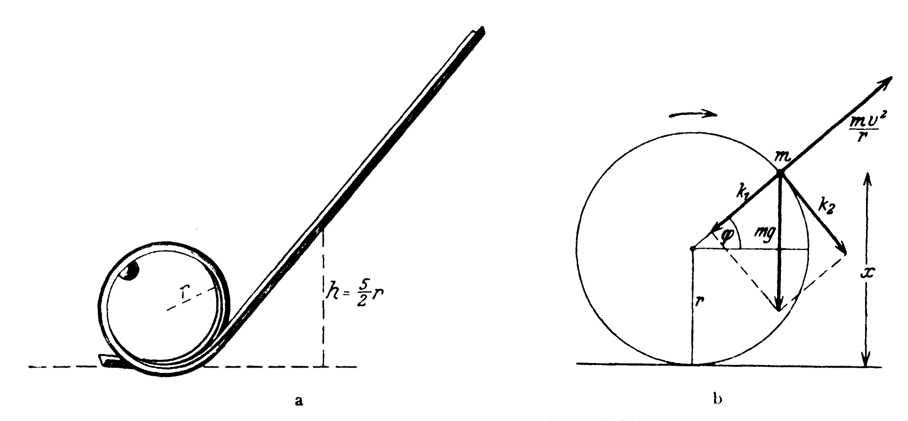


Abb. 61. Schleifenfahrt. a Modell, b zur Erklärung.

ein kleiner bemannter Wagen aus größerer Höhe eine Schleife der in Abb. 61a dargestellten Form durchfährt. Man kann den Versuch leicht im kleinen mit einer Kugel nachahmen. Das Gelingen hängt natürlich davon ab, daß die auf den die Schleife durchlaufenden Körper wirkende Zentrifugalkraft genügt, um die Wirkung der Schwerkraft aufzuheben.

Die umlaufende Masse m befinde sich in dem in Abb. 61b bezeichneten Punkte. Wir zerlegen die an ihr angreifende Schwerkraft $k = mg$ in ihre radiale und ihre tangentiale Komponente k_1 und k_2. Die Zentrifugalkraft mv^2/r muß mindestens ebenso groß sein, wie die erstere, damit noch eine senkrecht gegen die Bahn gerichtete Kraftkomponente vorhanden ist. x sei die Höhe vom m

über dem tiefsten Punkt der Bahn. Man liest aus der Abb. 61b ab $k_1 = k \sin\varphi = mg\,(x - r)/r$. Die Abfahrtshöhe des Körpers sei h, gemessen vom tiefsten Punkt der Bahn. Dann ist seine kinetische Energie in der Höhe x gleich $mv^2/2 = mg\,(h - x)$. Es ist also $mv^2/r = 2mg\,(h - x)/r$. Die Bedingung für das sichere Durchlaufen der Kreisschleife ist daher

$$2mg\frac{h-x}{r} \geqq mg\frac{x-r}{r} \qquad \text{oder} \qquad h \geqq \frac{3}{2}x - \frac{r}{2}.$$

Damit dieser Bedingung auch im höchsten Punkte der Bahn genügt ist ($x = 2r$), muß also die Abfahrthöhe mindestens $h = 5r/2$ betragen, wobei von Reibungsverlusten abgesehen ist. Andernfalls fällt der Körper aus der Höhe $x = (2h + r)/3$ herab.

80. **Uhren.** Die Pendeluhr ist eine Erfindung des Physikers HUYGENS (1658). Zu ihrem Betriebe dienen fallende Gewichte oder die Kraft einer Feder, welche die beim Gange der Uhr durch Reibung auftretenden Energieverluste aus der in ihnen aufgespeicherten potentiellen bzw. elastischen Energie ersetzen. Der Ablauf des Ganges wird durch die Schwingung des Pendels geregelt, welches mittels der Ankerhemmung (Abb. 62), einem mit den Zeigern und den Gewichten durch weitere Zahnräder gekoppelten Zahnrade, das Fortrücken um je einen Zahn nur in Zeitabständen von einer vollen Pendelschwingung gestattet, und das gleichzeitig dem Pendel die durch die Reibung verursachten Energieverluste durch kleine Stöße ständig ersetzt. Das Pendel ist an seinem unteren Ende mit einer (wegen der Luftreibung) linsenförmigen Masse versehen, welche zwecks Regulierung der Schwingungszeit auf der Pendelstange verschoben werden kann.

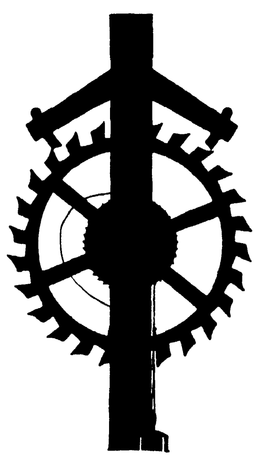


Abb. 62. Ankerhemmung.

Bei den Taschenuhren tritt an die Stelle des Pendels die Unruhe, d. h. ein Rad, welches infolge der elastischen Kraft einer an seiner Achse angreifenden feinen Spiralfeder Schwingungen um seine Ruhelage ausführen kann. Die Schwingungsdauer der Unruhe kann durch Änderung ihrer Direktionskraft (Änderung der wirksamen Länge der Feder durch Verstellen des Zeigers im Innern der Uhr) reguliert werden. Die Einwirkung auf den Gang der Uhr erfolgt auch hier durch eine Ankerhemmung oder durch die ihr prinzipiell ähnliche Zylinderhemmung.

Wegen der Abhängigkeit der Schwingungszeit des Pendels von der Schwerebeschleunigung g und demnach von der Höhe, hängt der Gang einer Pendeluhr ein wenig von der Höhe ab, derjenige einer Taschenuhr aber nicht.

Zur Beseitigung der Längenänderungen des Uhrpendels durch die Schwankungen der Temperatur benutzt man für gute Pendeluhren sog. Rostpendel, deren Länge von der Temperatur unabhängig ist. Ähnliche Vorrichtungen besitzen auch die Unruhen (§ 160).

III. Mechanik deformierbarer Körper.

8. Kapitel.

Die elastischen Eigenschaften fester Körper.

81. Begriff der Elastizität und allgemeine Tatsachen. Den Überlegungen in den bisherigen Kapiteln dieses Buches haben wir stets einen idealisierten Körperbegriff zugrunde gelegt. Die betrachteten Körper sollten vollkommen starr sein, d. h. ihre Gestalt und ihr Volumen sollten durch äußere Kräfte in keiner Weise verändert werden. In sehr zahlreichen Fällen ist das bei festen Körpern auch mit einem hohen Grade von Annäherung an die Wirklichkeit zulässig. Tatsächlich aber erfahren alle Körper durch Kräfte, die in verschiedenen Richtungen von außen her auf sie wirken, Änderungen ihrer Gestalt und ihres Volumens, alle wirklichen Körper sind elastisch, d. h. mehr oder weniger deformierbar.

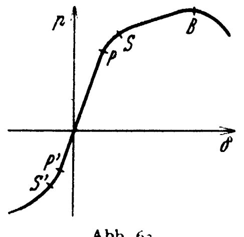


Abb. 63. Zusammenhang zwischen Deformation δ und Spannung p beim Gußstahl.

Gestalt und Volumen eines festen Körpers sind durch die zwischen seinen molekularen Bestandteilen wirkenden Kräfte bestimmt. Im natürlichen Zustande des Körpers stehen diese Kräfte miteinander im Gleichgewicht. Jede deformierende Kraft stört dieses Gleichgewicht und bewirkt das Auftreten einer Zwangskraft (§ 30), einer Spannung im Innern des Körpers. Bei konstanter wirkender Kraft tritt ein Gleichgewicht zwischen diesen zusätzlichen Kräften ein.

Die verschiedenen festen Stoffe zeigen bei Deformationen ein sehr unterschiedliches Verhalten. Von besonderer Wichtigkeit ist das elastische Verhalten der Metalle, die aber unter sich erhebliche Unterschiede aufweisen. Gewisse allgemeine Verhältnisse liegen jedoch bei ihnen allen in gleicher Weise vor. Insbesondere hat man bei ihnen stets verschiedene Bereiche der Deformation wohl zu unterscheiden. In Abb. 63 ist die Abhängigkeit der Spannung p im deformierten Material von der erzwungenen Deformation δ für einen speziellen Fall dargestellt. Dabei ist die innere Spannung definiert als die auf 1 cm² des Körperquerschnitts entfallende elastische Zwangskraft, die Deformation als das Verhältnis der Änderung der linearen Dimensionen des Körpers senkrecht zu diesem Querschnitt zur ursprünglichen Größe dieser Dimensionen.

Solange die Deformation eine gewisse Grenze, die Proportionalitätsgrenze des Materials, nicht überschreitet, ist die innere Spannung der Deformation proportional, und zur Erzeugung einer bestimmten Deformation ist eine der Deformation proportionale äußere Kraft erforderlich. Dieser Proportionalitätsbereich ist in Abb. 63 für den Fall einer Dehnung durch das Kurvenstück OP, für den Fall einer Zusammendrückung durch das Kurvenstück OP' dargestellt. Überschreitet die Deformation die genannte Grenze, so zeigt sich eine Abweichung von der Proportionalität. Die innere Spannung steigt langsamer an, als die

Deformation, d. h. der Widerstand des Materials gegen die aufgezwungene Deformation beginnt nachzulassen. Etwa vom Punkte S, bzw. S', der Fließgrenze oder Streckgrenze, ab nehmen die inneren Spannungen mit wachsender Deformation nur noch sehr wenig zu, das Material wird plastisch. In manchen Fällen nehmen sie bei Dehnung vom Punkt B ab mit weiterwachsender Deformation sogar wieder ab. Es beginnt die Bildung von Einschnürungen. Schließlich zerreißt der Körper. Bei der Zusammendrückung hingegen findet im allgemeinen bei größeren Deformationen schließlich wieder eine Zunahme der inneren Spannungen statt. Auf dem geschilderten Verhalten beruht die Möglichkeit der Bearbeitung der Metalle durch Hämmern, Walzen, Ziehen usw.

Bei kleinen Deformationen bildet sich unter der Wirkung der inneren Spannungen die ursprüngliche Gestalt des Körpers nach Aufhören der deformierenden Ursache restlos und sofort wieder zurück. Wird jedoch die sog. Elastizitätsgrenze des Materials überschritten, so erfolgt die Rückbildung, soweit überhaupt, erst im Laufe einer mehr oder weniger langen Zeit (elastische Nachwirkung). Die Elastizitätsgrenze liegt meist der Proportionalitätsgrenze nahe, ist aber nicht prinzipiell mit ihr identisch.

Mit jeder elastischen Änderung der in der Richtung der wirkenden Kraft liegenden Lineardimensionen ist stets auch eine Änderung der dazu senkrechten Dimensionen verbunden. Der Querschnitt eines Körpers wird bei Dehnung kleiner, bei Zusammendrückung größer. Das Verhältnis der relativen Änderung der Längsdimensionen zur relativen Änderung der linearen Querdimensionen heißt die POISSONsche Zahl. Ihr höchster theoretischer Wert beträgt 2. In diesem Falle bleibt bei der Deformation das Volumen konstant. Im allgemeinen wächst es bei Dehnung und wird kleiner bei Zusammendrückung.

Besonders interessante Erscheinungen zeigen sich bei Einkristalldrähten. Das sind Drähte, die aus einem einzigen Kristall bestehen, während Metalle in ihrem gewöhnlichen Zustande ein Konglomerat aus sehr vielen Mikrokristallen bilden. Solche Einkristalldrähte zeigen eine außerordentliche Dehnbarkeit, so daß man sie oft schon mit den Händen leicht auf das Doppelte ihrer ursprünglichen Länge und mehr dehnen kann. Dabei erhält ihre Oberfläche ein schuppiges, gewelltes Aussehen. Die Erscheinung beruht darauf, daß bei der Dehnung des Kristalls die einzelnen Teile des Kristalls sich längs Kristallgitterebenen gegeneinander verschieben, aufeinander gleiten.

Wissenschaftlich noch wenig erforscht ist die Härte der festen Körper, die mit der Elastizität in einem gewissen Zusammenhang steht. Man nennt einen Körper härter als einen andern, wenn man diesen mit jenem ritzen kann. Die Härte, die allerdings nur ungefähr zu definieren ist, ist technisch von großer Bedeutung, und es gibt verschiedene Verfahren, um sie zu messen, z. B. Druck- und Schlagproben. Manche Substanzen, z. B. der Stahl, können durch besondere Verfahren gehärtet werden. Die härteste von allen Substanzen ist der Diamant.

82. Kleine Deformationen. HOOKEsches Gesetz. Biegung. Wir betrachten ein Stück eines homogenen Materials von der Länge l und dem Querschnitt q. Es werde nunmehr einer deformierenden Kraft k unterworfen, die seine Länge in $l + \Delta l$ verwandelt. Dann ist die Deformation $\delta = \Delta l / l$. Von der Kraft k entfällt auf die Flächeneinheit des Querschnitts q der Betrag k/q, und ebenso groß ist also die im Material auftretende Spannung p. Solange die Deformation innerhalb der Proportionalitätsgrenze bleibt, ist δ proportional p. Daraus folgt

$$\delta = \frac{p}{E} \quad \text{oder} \quad \frac{\Delta l}{l} = \frac{k}{qE} \,. \tag{1}$$

Das ist das HOOKEsche Gesetz (1660) für kleine Deformationen. Die in Gl. 1 auftretende Größe E ist eine Materialkonstante, der Elastizitätsmodul der Substanz. Ihren reziproken Wert $1/E$ nennt man auch die Elastizitätszahl. Je größer E ist, um so kleiner ist bei sonst gleichen Verhältnissen die Deformation. Demnach hat z. B. Stahl einen sehr großen, Kautschuk einen sehr kleinen Elastizitätsmodul. Tab. 3 gibt einige Zahlen. Wie man aus Gl. 1 leicht erkennt, hat E im CGS-System die Einheit dyn/cm². Es ist aber üblich, in Tabellen die Einheit kg*/mm² zu benutzen. In anisotropen Körpern, insbesondere in den meisten Kristallen, ist der Elastizitätsmodul von der Richtung im Körper abhängig.

Tabelle 3. Elastizitätsmoduln in kg*/mm².

Aluminium	6300— 7200	Iridium	53000
Blei	1500— 1700	Kupfer	10000—13000
Schmiedeeisen und Stahl	20000—22000	Messing	8000—10000
Gußeisen	7500—13000	Holzfaser	500— 1200

Eine besondere Art der elastischen Deformation ist die Biegung. Ein an einem Ende befestigter und am andern Ende von einer Kraft angegriffener Stab (Abb. 64a) ändert seine Form, indem seine vorher parallelen

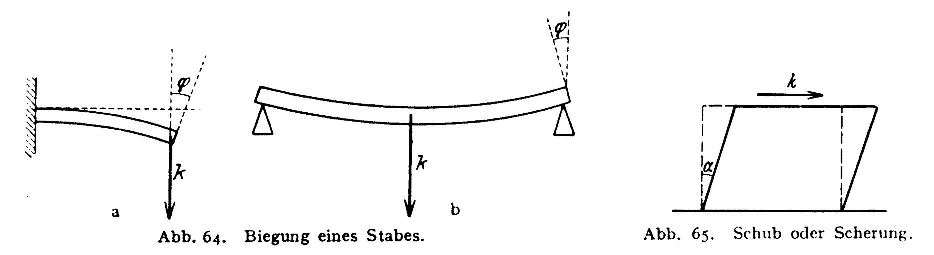


Abb. 64. Biegung eines Stabes.

Abb. 65. Schub oder Scherung.

Enden nunmehr einen Winkel φ miteinander bilden. Das gleiche gilt für einen an beiden Enden aufgelegten Stab, auf den in seiner Mitte eine Kraft wirkt (Abb. 64b).

Für einen einseitig befestigten, rechteckigen Stab gilt

$$\operatorname{tg}\varphi = 6\,\frac{l^2}{a^3 b}\,\frac{k}{E}\,, \tag{2}$$

(l Länge, a Höhe, b Breite, alle Größen im CGS-System gemessen), für einen an seinen beiden Enden lose aufliegenden, rechteckigen Stab bei Angriff der Kraft in der Mitte

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{3}{4}\,\frac{l^2}{a^3 b}\,\frac{k}{E}\,. \tag{3}$$

Man kann daher den Elastizitätsmodul E auch durch Biegungsversuche bestimmen.

Ein gebogener Körper unterliegt sowohl Druck- wie Zugwirkungen. Seine Teile werden an der nach innen gekrümmten Seite zusammengedrückt, an der nach außen gebogenen Seite auseinandergezogen. Zwischen diesen beiden Bereichen liegt eine Fläche, deren Dimensionen sich bei der Biegung nicht ändern, die sog. neutrale Zone.

83. **Scherung.** Während die Dehnung oder Biegung eines elastischen Körpers durch seinen Elastizitätsmodul E bedingt sind, ist für eine andere Art von elastischen Deformationen, den sog. Schub oder die Scherung, eine andere elastische Konstante maßgebend, der Schub- oder Scherungsmodul, auch Torsionsmodul genannt. Das Wesen des Schubes zeigt Abb. 65. Ein in seiner

einen Fläche festliegender parallelepipedischer Körper werde in der dieser Fläche gegenüberliegenden Fläche von einer über alle ihre Flächenelemente gleichmäßig verteilten und parallel zur Fläche gerichteten Kraft k beansprucht. Infolgedessen verwandelt sich das Parallelepiped in einen Körper, dessen Querschnitt ein Parallelogramm ist, und der rechte Winkel zwischen den Seitenflächen wird um den kleinen Betrag α deformiert. Der Betrag von α ist der Kraft k proportional und der Größe F der Fläche, auf welche k wirkt, umgekehrt proportional. Wir können demnach setzen

$$\alpha = \frac{k}{FG}\,. \tag{4}$$

Die Materialkonstante G ist der obengenannte Schub- oder Scherungsmodul.

Wird ein Körper, z. B. ein zylindrischer Stab, tordiert, d. h. wird sein eines Ende festgehalten, sein anderes Ende um den Winkel φ um die Körperachse gedreht, so besteht die elastische Deformation in einer reinen Scherung. Der Drehungswinkel φ hängt bei einem zylindrischen Stab vom Radius r und der Länge l mit dem tordierenden Drehmoment N durch die Gleichung

$$\varphi = \frac{2l}{\pi r^2 G}\,N \tag{5}$$

zusammen. Der Körper besitzt demnach nach § 47 eine Direktionskraft $D = \frac{\pi r^2 G}{2l}$. Wird ein Draht, an dessen unterem Ende ein Körper vom Trägheitsmoment J hängt, aus seiner Ruhelage gedreht, so führt er nach § 47 Torsionsschwingungen von der Schwingungsdauer $\tau = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}}$ aus. Hieraus kann D und daraus der Schubmodul G bestimmt werden. Wegen seines Einflusses auf die Torsion heißt G auch der Torsionsmodul.

Die Gültigkeit der Gl. 4 und 5 ist wie diejenige des HOOKEschen Gesetzes, Gl. 1, auf kleine Deformationen α beschränkt. Bei Überschreitung einer gewissen Grenze treten Verhältnisse ein, die denjenigen bei Überschreitung der Proportionalitätsgrenze (§ 81) entsprechen, also Abweichung von der Proportionalität, elastische Nachwirkung und schließlich Bruch durch Zerreißen des Gefüges.

Der Schubmodul G hat, wie der Elastizitätsmodul E, die Dimension Kraft/Fläche und wird in Tabellen auch in kg*/mm² angegeben.

Eine durch Aufwickeln eines Drahtes auf einen zylindrischen Körper hergestellte Spiralfeder verhält sich bei einseitigem Zug oder Druck wie ein einer Längsdilatation oder Längszusammendrückung unterworfener zylindrischer Körper und gehorcht in sehr weiten Grenzen dem einfachen HOOKEschen Gesetz. Die tatsächliche elastische Änderung des Drahtes selbst besteht aber in einer Torsion.

Wegen der weitgehenden Gültigkeit des HOOKEschen Gesetzes für solche Spiralfedern kann man die Dehnung oder Zusammendrückung von Spiralfedern zur Messung der diese Änderung bewirkenden Kräfte benutzen. Auf diesem Prinzip beruhen die Federwagen, bei denen die Längenänderungen einer Feder durch das Gewicht einer angehängten oder aufgelegten Masse an einer Skala abgelesen werden können, ferner die für Demonstrationszwecke oder als grobe Wagen benutzten Federdynamometer.

Die flach gewickelten Bandfedern aus Stahlbändern, wie sie z. B. als Uhrfedern und zum Betriebe sonstiger mechanischer Werke und auch bei den Unruhen der Taschenuhren benutzt werden, verhalten sich als Ganzes, wenn sie gespannt sind, wie ein tordierter Körper. Der tatsächliche Vorgang bei der Spannung besteht aber in einer Biegung des Metallbandes.

84. Druck. Es ist nunmehr erforderlich, daß wir den Begriff Druck in seiner physikalischen Bedeutung genauer definieren. Der tägliche Sprachgebrauch macht oft keinen strengen Unterschied zwischen den Begriffen Druck und Kraft. In der Physik muß zwischen ihnen genau unterschieden werden. Wir sagen, daß auf eine Fläche ein Druck wirkt, wenn senkrecht zu einer Fläche eine so große Zahl kleiner Einzelkräfte wirkt, daß wir uns die gesamte auf die Fläche ausgeübte Kraft kontinuierlich über sie verteilt denken dürfen. Auf jedes Quadratzentimeter der Fläche wirkt eine bestimmte Kraftsumme, und diese bezeichnen wir als den Druck p auf die Fläche. Wirkt also auf eine Fläche von F cm² gleichmäßig verteilt die Kraft k dyn, so beträgt der Druck auf die Fläche

$$p = \frac{k}{F} \text{ dyn} \cdot \text{cm}^{-2}. \tag{5}$$

In der Praxis benutzt man meist nicht die CGS-Einheit des Druckes, dyn/cm², sondern andere Einheiten, die wir in § 103 kennenlernen werden.

85. Elastische Energie. Bei einer elastischen Längenänderung eines Körpers wird gegen die elastische Gegenkraft Arbeit geleistet. Sei $\Delta l = x$ die bestehende Längenänderung, so besteht nach Gl. 1 zwischen x und der diese Änderung bewirkenden Kraft k die Beziehung

$$k = \frac{qE}{l} x.$$

Vergrößert sich die Verlängerung von x auf $x + dx$, so ist dazu die Arbeit (= Kraft · Weg)

$$dA = k \cdot dx = \frac{qE}{l} x\,dx$$

erforderlich. (Dabei ist die Längenänderung x als sehr klein gegen die Länge l angenommen). Es ergibt sich daher die gesamte, zu einer Verlängerung Δl erforderliche Arbeit durch Integration zu

$$A = \int_0^{\Delta l} \frac{qE}{l} x\,dx = \frac{1}{2} \frac{qE}{l} (\Delta l)^2.$$

Diese Arbeit steckt nunmehr als potentielle Energie in dem deformierten Körper und kann aus ihm bei Aufhören der deformierenden Kraft wiedergewonnen werden. Entsprechendes gilt für alle andern Arten von elastischen Deformationen. Auf dieser Tatsache beruht es, daß gespannte Federn die zum Betriebe von Werken nötige Energie liefern können. In ihnen ist elastische Energie aufgespeichert.

Ein fester Körper, den wir uns der Einfachheit als ein Parallelepiped mit den Kanten a, b, c vorstellen wollen (wir können uns jeden beliebig geformten Körper als aus sehr kleinen derartigen Parallelepipeden zusammengesetzt denken), erfahre durch einen allseitigen, senkrecht zu seinen Flächen wirkenden Druck p eine kleine Änderung ΔV seines Volumens $V = abc$. Dann wirken dabei auf seine drei Flächen die Kräfte pab, pac, pbc. Die dabei eintretenden Änderungen seiner Kantenlängen seien Δa, Δb, Δc. Die bei der Formänderung geleistete Arbeit beträgt daher

$$\Delta A = p(ab\Delta c + ac\Delta b + bc\Delta a) = p\Delta(abc) = p\Delta V. \tag{6}$$

Vom atomistischen Standpunkt aus betrachtet, stellt sich die bei der elastischen Deformation eines festen (und auch eines flüssigen, aber im allgemeinen nicht eines gasförmigen) Körpers geleistete Arbeit als das Äquivalent für die

Änderung der gegenseitigen potentiellen Energie der atomistischen Bestandteile des Körpers dar. Jede Änderung ihrer natürlichen Abstände, welche ihren Gleichgewichtslagen im ungestörten Zustande entsprechen, ist mit einer Zunahme dieser Energie verbunden (stabiles Gleichgewicht = Minimum der potentiellen Energie, § 62), die dem Körper in Form von Arbeit zugeführt werden muß. Hören die deformierenden Kräfte wieder auf zu wirken, so kehren die Teilchen wieder in ihre natürlichen gegenseitigen Lagen zurück, es sei denn, daß die Deformation so groß war, daß dauernde innere Umlagerungen stattgefunden haben.

9. Kapitel.

Mechanik ruhender Flüssigkeiten.

86. Druck im Innern einer Flüssigkeit unter Vernachlässigung der Schwerkraft. In dem in Abb. 66 dargestellten Gefäß befinde sich eine Flüssigkeit, die wir uns zunächst der Wirkung der Schwerkraft entzogen denken. S_1 und S_2 seien zwei verschiebbare Stempel von den Querschnitten q_1 und q_2. Auf S_1 wirke eine Kraft k_1, die durch den Stempel auf die Flüssigkeit übertragen wird. Es wirkt dann auf die Flüssigkeitsoberfläche ein Druck $p = k_1/q_1$ (§ 84). Wird der Stempel S_1 durch die Kraft k_1 um die Strecke a_1 verschoben, so muß sich dafür der Stempel S_2 um eine Strecke a_2 nach außen verschieben. Auf den Stempel S_2 wirkt daher eine Kraft k_2. Die bei der Verschiebung des Stempels S_1 geleistete Arbeit ist $k_1 a_1 = p\, q_1 a_1$. Diese Arbeit muß sich in der am Stempel S_2 geleisteten Arbeit $k_2 a_2$ wiederfinden, so daß $k_2 a_2 = p\, q_1\, a_1$. (Dabei ist vorausgesetzt, daß die Verschiebung der Flüssigkeit zwischen S_1 und S_2 reibungslos, also ohne Energieverlust, stattfindet.) Nun muß aber das bei S_2 bei der Verschiebung neu auftretende Flüssigkeitsvolumen $q_2 a_2$ gleich dem bei S_1 verdrängten Flüssigkeitsvolumen $q_1 a_1$ sein. Es folgt daher

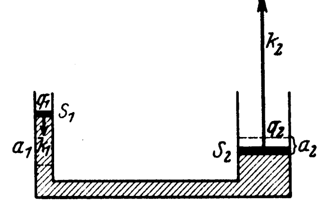


Abb. 66. Druck in einer der Schwere entzogenen Flüssigkeit.

$$k_2 = p q_2\,, \quad \text{bzw.}\ \frac{k_2}{q_2} = p\,, \quad \text{und}\quad k_1 : k_2 = q_1 : q_2\,. \tag{1}$$

Nun ist k_2/q_2 der von der Flüssigkeit gegen S_2 ausgeübte Druck. Andererseits ist aber p auch der Druck, den die Flüssigkeit gemäß dem dritten NEWTONschen Axiom gegen S_1 ausübt. Es ist demnach der Druck gegen S_1 und S_2 der gleiche. Was aber hier für die beiden beweglich gedachten Teile der Gefäßwandung nachgewiesen ist, gilt natürlich auch für jedes andere Stück derselben; der Druck, den die Flüssigkeit auf die einzelnen Teile der Gefäßwandung ausübt, ist, — abgesehen von der hier vernachlässigten Wirkung der Schwerkraft —, überall der gleiche.

Nun kann man sich überall in das Innere der Flüssigkeit Körper gebracht denken, deren Oberflächen nunmehr auch Grenzflächen der Flüssigkeit wären, und auf die auch der gleiche Druck wirken würde. Man spricht daher auch von dem Druck im Innern einer Flüssigkeit und kann den eben ausgesprochenen Satz dahin erweitern, daß überall in einer der Schwere entzogenen ruhenden Flüssigkeit der gleiche Druck herrscht. Den Druck in einer ruhenden Flüssigkeit nennt man ihren hydrostatischen Druck.

Eine Anwendung des eben besprochenen Satzes finden wir in der hydraulischen Presse, welche zur Umwandlung kleiner Kräfte in große dient.

Indem man das Verhältnis $q_2 : q_1$ (Gl. 1) hinreichend groß wählt, ist man imstande, mit einer kleinen Kraft k_1 eine sehr große Kraft k_2 zu erzeugen. Dabei sind dann die Wege des Stempels S_2 sehr klein gegen die Wege des Stempels S_1. S_1 ist daher bei der praktischen Ausführung (Abb. 67) der Kolben einer Wasserpumpe, welche Wasser von außen her in das Gefäß drückt, so daß der Vorgang zur Erzielung großer Wirkung beliebig oft wiederholt werden kann.

87. Wirkung der Schwerkraft. Bei einer der Schwerkraft unterworfenen Flüssigkeit wirkt im Innern nicht nur der etwa auf ihre Oberfläche ausgeübte Druck, z. B. der Luftdruck (§ 108), sondern auch der Druck, den die über einem Punkte im Innern liegenden Flüssigkeitsschichten infolge ihres Gewichtes ausüben. Es sei AB (Abb. 68) ein horizontaler Querschnitt von der Größe q durch eine Flüssigkeit in der Tiefe x unter der Oberfläche. Ist das spezifische Gewicht der Flüssigkeit σ bzw. ihre Dichte ϱ, so ist das Gewicht der auf dem Querschnitt AB lastenden Flüssigkeit $k = \sigma q x g^*$, bzw. $\varrho g q x$ dyn (§ 56). Da sich dieses Gewicht aber auf die Fläche q gleichmäßig verteilt, so ist der Druck p, d. h. die auf 1 qcm des Querschnittes wirkende Kraft

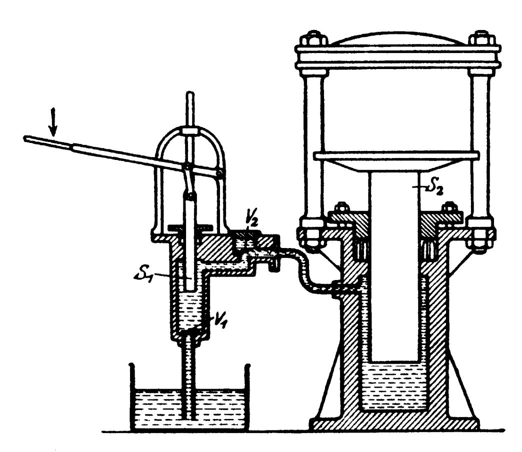


Abb. 67. Hydraulische Presse. V_1 und V_2 sind Ventile.

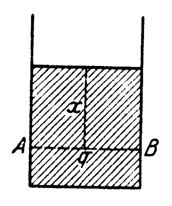


Abb. 68. Zur Zunahme des Drucks mit der Tiefe.

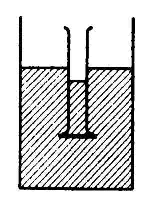


Abb. 69. Zum Nachweis der Zunahme des Drucks mit der Tiefe.

$$p = \frac{k}{q} = \sigma x g^*/\text{cm}^2 \text{ bzw. } \varrho g x \,\text{dyn/cm}^2. \tag{2}$$

Wirkt außerdem noch auf die Oberfläche von außen der Druck p_0, so ist $p = p_0 + \sigma x$. Der hydrostatische Druck im Innern einer der Schwerkraft unterworfenen Flüssigkeit nimmt also proportional der Tiefe zu. Es ist dabei vorausgesetzt, daß sich die Dichte der Flüssigkeit mit der Tiefe nicht ändert, d. h. daß die Flüssigkeit nicht merklich zusammendrückbar ist. Das ist bei nicht sehr großen Tiefen stets mit großer Annäherung erfüllt.

Zur Demonstration der Änderung des Druckes mit der Tiefe kann z. B. folgender Versuch dienen (Abb. 69). An einem in eine Flüssigkeit getauchten Zylinder befindet sich unten eine dicht anschließende, aufgeschliffene Glasplatte. Ist der Zylinder leer, so wird die Platte durch den Druck der Flüssigkeit fest gegen den Zylinder gepreßt. Man kann sogar den Zylinder noch fast bis zur Höhe der Flüssigkeit im Gefäß mit der gleichen Flüssigkeit anfüllen, ohne daß die Platte abfällt. Sie fällt erst ab, wenn der Druck der über ihr befindlichen Flüssigkeit zuzüglich des eigenen Gewichtes der Platte einen Druck erzeugt, der gleich dem Druck an derjenigen Stelle der Flüssigkeit ist, an der sich die Platte befindet.

Die durch Gl. 2 ausgedrückte Gesetzmäßigkeit ist von der Form des Gefäßes unabhängig. Es ist daher auch der Druck auf den Boden eines bis zur Höhe h mit Flüssigkeit gefüllten Gefäßes unabhängig von der Form des Ge-

fäßes stets gleich σh g*/cm². Dies erklärt sich z. B. bei einem Gefäß von der in Abb. 70a dargestellten Form so, daß der Druck der seitlich der beiden punktierten Linien gelegenen Flüssigkeit von den Seitenwänden des Gefäßes getragen wird, bei dem in Abb. 70b dargestellten Gefäß aber auf folgende Weise. Es sei df_1 ein ringförmiges Flächenelement der Seitenwand in der Tiefe x unter der Oberfläche, df_2 dessen Projektion auf die Bodenfläche (df_1 ist der Übersichtlichkeit halber nur auf der linken Seite angedeutet). In der Tiefe x herrsche der Druck p_x; dann wirkt auf df_1 die Kraft $k = p_x\, df_1$. Da aber Gleichgewicht herrscht, so wirkt von df_1 aus eine gleich große Kraft auf die Flüssigkeit. Wir zerlegen diese in eine horizontale und eine vertikale Komponente. Die horizontalen Komponenten aller einzelnen, auf die ganze ringförmige Fläche df_1 wirkenden Einzelkräfte heben sich gegenseitig aus Symmetriegründen auf. Es bleibt nur eine nach unten gerichtete Komponente von der Größe $df_1 \cdot p_x \cdot \cos\varphi$ übrig, wenn φ den Winkel bedeutet, den die Seitenwand mit dem Boden bildet. Diese Kraft überträgt sich durch die Flüssigkeit auf das zugehörige Flächenelement df_2 des Bodens und erzeugt hier einen Druck $p' = p_x \cdot \cos\varphi \cdot df_1/df_2$ oder, da $df_1/df_2 = 1/\cos\varphi$, $p' = p_x$. Zu diesem Druck kommt aber noch der Druck der über df_2 befindlichen Flüssigkeit, $p'' = (h - x)\,\sigma$, hinzu, so daß der Gesamtdruck $p = p_x + \sigma(h - x)$. Nun muß aber der Druck an allen Punkten der Bodenfläche der gleiche sein, da sonst horizontale Strömungen der Flüssigkeit eintreten würden; p muß also von x unabhängig sein. Das ist nur dann möglich, wenn $p_x = \sigma x$, also $p = \sigma h$. D. h. der Druck in der Tiefe x bzw. h hängt nur von der Tiefe ab, nicht von der Form des Gefäßes (dem Winkel φ). Zur Demonstration dieser Gesetzmäßigkeit bedient man sich eines Apparates, bei dem verschieden geformte Gefäße mit einem Boden versehen werden können, welcher durch eine bestimmte Kraft angedrückt wird (Abb. 71). Es zeigt sich, daß, unabhängig von der Form des Gefäßes, bei gleicher andrückender Kraft das Gefäß stets bis zur gleichen Höhe mit Flüssigkeit gefüllt werden muß, damit der Bodendruck den Boden gegen die wirkende Kraft löst. Füllt man zunächst die Gefäße bei fest angedrücktem Boden bis oben und läßt dann erst die konstante andrückende Kraft wirken, so entleeren sich die Gefäße sämtlich bis zur gleichen Höhe (sog. hydrostatisches Paradoxon, PASCAL 1660).

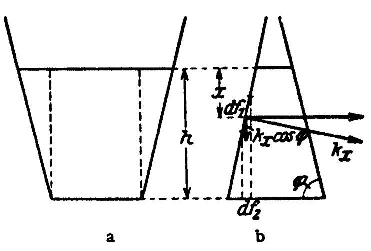
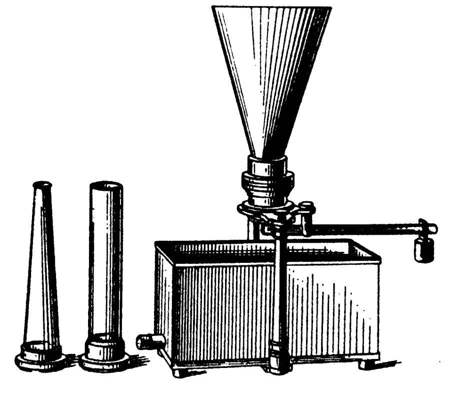


Abb. 70. Zum Bodendruck.


Abb. 71. Bodendruckapparat.

Stehen zwei mit der gleichen Flüssigkeit gefüllte Räume miteinander so in Verbindung, daß die Flüssigkeit von dem einen zum andern strömen kann, so steht bei Gleichgewicht die Flüssigkeit in beiden Räumen (vorausgesetzt, daß sie nicht sehr eng sind, vgl. § 93) gleich hoch, und der Druck ist in gleichen Tiefen in beiden Räumen der gleiche. Die Form der Räume spielt dabei keine Rolle (Abb. 72). Das folgt aus den vorstehenden Überlegungen über den Bodendruck. Die Drucke in den zusammenhängenden Räumen müssen in allen Horizontalebenen gleich

sein, weil sonst in dem Teil, in dem die Räume verbunden sind, eine Flüssigkeitsströmung eintreten würde, welche schließlich Druckgleichheit herstellen würde. Damit der Druck in allen Horizontalebenen der gleiche sei, müssen aber die Flüssigkeitshöhen über ihnen überall gleich sein, d. h. die Oberflächen in den kommunizierenden Räumen liegen in gleicher Höhe.

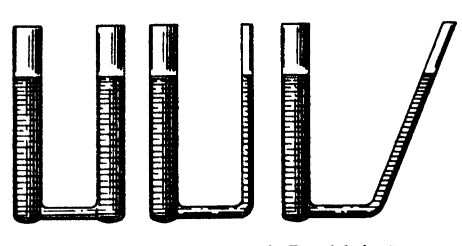


Abb. 72. Zusammenhängende Flüssigkeitsräume (kommunizierende Röhren).

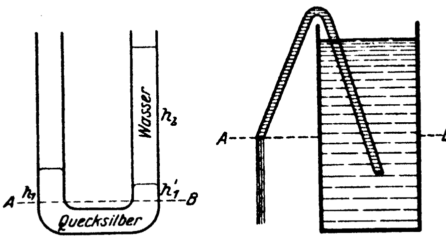


Abb. 73. Kommunizierende Röhren mit zwei verschiedenen Flüssigkeiten.

Abb. 74. Flüssigkeitsheber.

In den beiden Schenkeln eines zusammenhängenden (kommunizierenden) Röhrensystems (Abb. 73) befinden sich zwei verschieden schwere, nicht miteinander mischbare Flüssigkeiten, z. B. Quecksilber und Wasser. Innerhalb der schwereren Flüssigkeit muß der Druck in jeder Horizontalebene AB auf beiden Seiten der gleiche sein. Ist σ_1 das spezifische Gewicht der schwereren, σ_2 das der leichteren Flüssigkeit, so ist im Niveau AB links $p = \sigma_1 h_1$, rechts $p = \sigma_1 h_1' + \sigma_2 h_2 \, g^*/\mathrm{cm}^2$, so daß

$$\sigma_1 (h_1 - h_1') = \sigma_2 h_2 .$$

Kennt man z. B. σ_2, so kann man durch Messung der Höhen $h_1 - h_1'$ und h_2 das spezifische Gewicht σ_1 bestimmen.

Besteht in einer zusammenhängenden Flüssigkeit zu irgendeinem Zeitpunkt keine Druckgleichheit in gleichen Niveaus, so tritt eine Strömung ein, die diesen Zustand herzustellen sucht. Ein Beispiel hierfür ist der Flüssigkeitsheber (Abb. 74). Ein gebogenes, mit Flüssigkeit gefülltes Rohr taucht in ein Gefäß mit der gleichen Flüssigkeit derart, daß seine äußere Öffnung tiefer liegt als der Flüssigkeitsspiegel. An diesem wie an der äußeren Rohröffnung herrscht der Druck der äußeren Luft, und daher besteht im Niveau AB keine Druckgleichheit, der Druck ist im Innern der Flüssigkeit höher als an der Rohröffnung. Infolgedessen strömt die Flüssigkeit so lange aus dem Rohr aus, bis der Spiegel sich bis in die Höhe der äußeren Rohröffnung gesenkt hat. Um den Heber in Betrieb zu setzen, saugt man die Flüssigkeit zunächst in das Rohr hinein.

Die in diesem Paragraphen besprochenen Gesetzmäßigkeiten spielen eine wichtige Rolle in den Wasserleitungsnetzen, ferner in der Natur bei den Bodenwässern (Grundwasser, sonstige wasserführende Schichten, Quellen).

88. Freie Flüssigkeitsoberflächen. Wir betrachten ein Flüssigkeitsteilchen an der freien, d. h. nicht an Gefäßwände grenzenden Oberfläche einer Flüssigkeit. Da die einzelnen Teile einer Flüssigkeit beliebig leicht gegeneinander verschiebbar sind, also beliebig kleinen verschiebenden Kräften folgen können, so müssen sich die auf ein solches Teilchen wirkenden Kräfte bei einer im Gleichgewicht befindlichen Flüssigkeit aufheben. Auf ein an der Oberfläche befindliches Flüssigkeitsteilchen wirkt erstens die Schwere, zweitens von unten her, senkrecht zur Oberfläche, der Druck der Flüssigkeit, den es selbst durch die zur Oberfläche senkrechte Komponente seines eigenen Gewichtes hervorruft (Zwangskraft). Damit sich diese beiden Kräfte das Gleichgewicht halten, müssen sie einander gleich und entgegengesetzt gerichtet sein. Daher muß eine freie Flüssigkeitsoberfläche bei alleiniger Wirkung der Schwere (also insbesondere

wenn die Kapillarwirkungen an der Begrenzung der Flüssigkeit außer Betracht gelassen werden, § 93), zur Richtung der Schwerkraft senkrecht, d. h. horizontal liegen. Andernfalls würde die Schwerkraft eine zur Flüssigkeitsoberfläche parallele Komponente haben, welche das Teilchen seitlich verschiebt. Das gleiche gilt für die Trennungsfläche zweier sich nicht mischender Flüssigkeiten von verschiedenem spezifischen Gewicht, z. B. Wasser und Quecksilber oder Wasser und Öl.

Wirkt außer der Schwere noch eine andere Kraft auf die Flüssigkeit, so muß die freie Oberfläche zur Resultierenden aller wirkenden Kräfte senkrecht stehen.

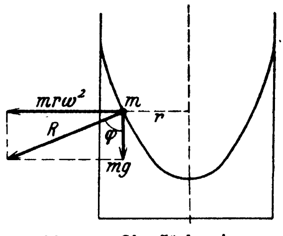


Abb. 75. Oberfläche einer rotierenden Flüssigkeit.

Von Interesse ist der Fall einer in einem zylindrischen Gefäß rotierenden Flüssigkeit. Wir stellen uns auf den Standpunkt eines mit der Flüssigkeit rotierenden Beobachters (§ 38). Auf jedes Flüssigkeitsteilchen m an der Flüssigkeitsoberfläche wirkt erstens vertikal die Schwerkraft mg, zweitens horizontal die Zentrifugalkraft $mr\omega^2$ (r Abstand des Teilchens von der Rotationsachse, ω Winkelgeschwindigkeit). Die Resultierende dieser beiden Kräfte muß senkrecht zur Flüssigkeitsoberfläche stehen. Letztere stellt sich so ein, daß das der Fall ist. Aus der Abb. 75 liest man als Gleichgewichtsbedingung ab, daß $\operatorname{tg}\varphi = \frac{m r \omega^2}{m g} = \frac{r \omega^2}{g}$ sein muß (φ = Neigungswinkel der Flüssigkeitsoberfläche). Der Flüssigkeitsquerschnitt, der sich daraus berechnet, ist eine Parabel.

89. **Auftrieb. Archimedisches Prinzip.** Befindet sich ein räumlich ausgedehnter Körper in einer der Schwerkraft unterworfenen Flüssigkeit, so ist der auf die einzelnen Teile seiner Oberfläche wirkende Druck von der Tiefe abhängig. Es sei K ein in eine Flüssigkeit von spezifischem Gewicht σ eingetauchter Körper von der Länge l und dem Querschnitt q (Abb. 76). Seine obere Fläche befinde sich in der Tiefe x unter der Flüssigkeitsoberfläche, seine untere Fläche also in der Tiefe $l + x$. Die Wirkung der auf seine Seitenflächen wirkenden horizontalen Drucke heben sich gegenseitig auf, nicht aber die Drucke auf die obere und die untere Fläche. Auf die obere Fläche wirkt nach Gl. 2 eine Kraft $k_1 = \sigma q x g^*$ nach unten, auf seine untere Fläche eine Kraft $k_2 = \sigma q (l + x) g^*$ nach oben. Die Resultierende dieser beiden parallelen, aber entgegengesetzt gerichteten Kräfte ist

$$k = k_2 - k_1 = \sigma q l = \sigma V g^* \text{ bzw. } V \varrho g \text{ dyn} \qquad (3)$$

(V = Volumen des Körpers). Diese Kraft ist nach oben gerichtet. Man nennt sie den Auftrieb, das durch Gl. 3 dargestellte Gesetz nach seinem angeblichen Entdecker (250 v. Chr.) das Archimedische Prinzip.

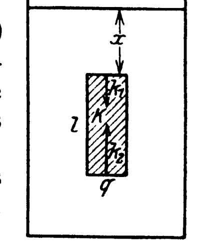


Abb. 76. Auftrieb.

Der Auftrieb wirkt dem Gewicht des eingetauchten Körpers entgegen, dieser erleidet also in der Flüssigkeit einen scheinbaren Gewichtsverlust, der, wie Gl. 3 zeigt, gleich dem Gewicht $\sigma V g^*$ der Flüssigkeitsmenge ist, welche das gleiche Volumen einnimmt wie der eingetauchte Körper, denn V ist dieses Volumen, σ das spezifische Gewicht der Flüssigkeit. Man drückt daher das Archimedische Prinzip auch so aus: Der Gewichtsverlust eines Körpers in einer Flüssigkeit ist gleich dem Gewicht der von ihm verdrängten Flüssigkeit. Dieses Gesetz gilt unabhängig von der besonderen Form des eingetauchten Körpers.

Man beachte, daß der Auftrieb eine Schwerewirkung ist und in einem der Schwerkraft entzogenen Raum nicht stattfinden würde.

Ist die Flüssigkeit, in die der Körper eingetaucht wird, Wasser (genau: Wasser von 4^0, § 23), also vom spezifischen Gewicht $\sigma = 1\ g^*/cm^3$, so ist die Maßzahl des in g* ausgedrückten Gewichts der verdrängten Flüssigkeit gleich der Maßzahl ihres Volumens in ccm, also auch gleich der Maßzahl des Volumens des eingetauchten Körpers. Es kann daher die Bestimmung des Gewichtsverlustes eines Körpers in Wasser unmittelbar zur Bestimmung seines Volumens dienen.

Hierauf gründet sich eine sehr bequeme, angeblich schon von Archimedes benutzte Methode zur Bestimmung des spezifischen Gewichtes, die besonders bei solchen Körpern wichtig ist, deren Volumen man z. B. wegen unregelmäßiger Form schwer anderweitig bestimmen kann. Ist k das wahre Gewicht des Körpers, k' sein scheinbares Gewicht, wenn er in Wasser getaucht ist, so ist sein Auftrieb gleich $k - k'$. Nun ist aber die Maßzahl von $k - k'$ gleich der Maßzahl des Volumens V des eingetauchten Körpers, bzw. gleich dem Gewicht des gleichen Volumens Wasser. Das Verhältnis $k/(k-k')$ gibt also an, wievielmal schwerer der Körper ist als das gleiche Volumen Wasser, d. h. es ist unmittelbar gleich der Maßzahl des spezifischen Gewichts. Besonders bequem bei dieser Methode ist es, daß man nicht die Absolutwerte von k und k' benötigt, sondern nur das Verhältnis ihrer Maßzahlen. Es genügt daher die Messung irgendwelcher Größen, welche k und k' proportional sind, z. B. der Verlängerungen einer Spiralfeder unter der Wirkung von k und k'. Man kann sich also einer ungeeichten Federwage bedienen. Man benutzt dazu etwa eine lange Spiralfeder, an welche man den betreffenden Körper anhängt, und zwar so, daß er einmal in Luft, dann in Wasser hängt (Abb. 77). Die Verlängerung der Feder ist im ersten Falle k, im zweiten Falle k' proportional, so daß man aus dem Verhältnis dieser Verlängerungen unmittelbar das Verhältnis k'/k gewinnt. Es ist dann der Zahlenwert $|\sigma|$ des spezifischen Gewichts

Abb. 77. Federwage zur Bestimmung fischer Gewichte.

Abb. 78. Mohrsche Wage.

$$|\sigma| = \frac{k}{k - k'} = \frac{\Delta l}{\Delta l - \Delta l'}, \qquad (4)$$

wenn Δl und $\Delta l'$ die betreffenden Längenänderungen der Feder sind.

Da der Auftrieb eines Körpers in einer Flüssigkeit von deren spezifischem Gewicht abhängt, so kann man ihn auch dazu benutzen, um dieses zu bestimmen. Hierzu dient u. a. die sog. Mohrsche Wage (Abb. 78). Sie besteht aus einem um eine Schneide drehbaren Hebel, an dessen einem Ende ein Glaskörper K hängt, der meist gleichzeitig als Thermometer ausgebildet ist. Der Hebel trägt an seinem andern Ende ein Gewicht G, welches einen an ihm

angebrachten Zeiger zum Einstehen auf eine Marke bringt, wenn sich der Glaskörper in Luft befindet. Wird der Körper K in eine Flüssigkeit getaucht, so erfährt er einen Auftrieb, der durch Aufsetzen von reiterartigen Gewichten g auf den in 10 gleiche Teile geteilten Hebelarm kompensiert werden kann. Diese Gewichte sollen so bemessen sein, daß das größte von ihnen, an das Ende des Hebelarms gehängt, gerade den Auftrieb in Wasser von 4^0 kompensiert. Die weiteren Gewichte sind dezimale Bruchteile dieser Einheit.

Zur schnellen Bestimmung des spezifischen Gewichtes von Flüssigkeiten dient ferner das Aräometer (Abb. 79). Es ist dies ein unten (b) beschwerter Glaskörper (a), dessen oberes, mit einer Skala (s) versehenes Ende aus einer Flüssigkeit um so weiter herausragt, je spezifisch schwerer diese ist (§ 90). An der Skala kann das spezifische Gewicht unmittelbar abgelesen werden.

s

a

b

Abb. 79. Aräometer.

90. Schwimmen. Ist ein Körper spezifisch leichter als die Flüssigkeit, in die er eintaucht, so ist sein Auftrieb größer als sein Gewicht, falls er vollständig in die Flüssigkeit eingetaucht wird. Es wirkt daher auf ihn eine nach oben gerichtete Kraft, die ihn aus der Flüssigkeit heraustreibt, und zwar so weit, bis der Auftrieb des noch eintauchenden Teils gleich seinem Gewicht ist. Der Körper schwimmt. Es ist dann das Gewicht der verdrängten Flüssigkeitsmenge gleich dem Gesamtgewicht des schwimmenden Körpers. Bei einem Körper vom spezifischen Gewicht σ_2 ergibt sich, wenn $\sigma_1 > \sigma_2$ das spezifische Gewicht der Flüssigkeit bedeutet, der eingetauchte Bruchteil V' seines Volumens V aus der Gleichung

$$\sigma_2 V = \sigma_1 V'. \tag{5}$$

Ein Körper taucht demnach in eine Flüssigkeit um so tiefer ein, je geringer deren spezifisches Gewicht ist. So kommt es, daß ein Schiff im Süßwasser tiefer einsinkt, als im spezifisch schwereren Meerwasser, in dem auch Menschen leichter schwimmen.

(Der menschliche Körper hat im allgemeinen ein spezifisches Gewicht, das etwas größer ist als das des Wassers; er sinkt daher im Wasser unter. Das Schwimmen des Menschen beruht darauf, daß sich ein Schwimmer durch schräge nach unten gerichtete Beinstöße Beschleunigungen nach oben erteilt, indem er sich sozusagen am Wasser abstößt. Dadurch wird seine Fallbewegung aufgehoben. Gleichzeitig bewirkt die Horizontalkomponente dieser Stöße eine Vorwärtsbewegung. Die Armbewegungen dienen neben der Fortbewegung vor allem dem Massenausgleich [§ 77].)

Als spezifisches Gewicht eines kompliziert zusammengesetzten Körpers ist in Gl. 5 sein mittleres oder scheinbares spezifisches Gewicht einzusetzen, d. h. sein Gesamtgewicht dividiert durch sein Volumen bzw. es ist, z. B. bei einem Schiff, die Eintauchtiefe zu berechnen aus der Bedingung, daß sein Gewicht k gleich dem Auftrieb $V'\sigma$ ist, wobei V' das in die Flüssigkeit eintauchende Volumen und σ das spezifische Gewicht der Flüssigkeit ist.

Unter den vielen an sich möglichen Lagen, in denen ein Körper schwimmen könnte, sind nur einige, häufig nur eine einzige, stabile Lagen. Die Schwerkraft greift im Schwerpunkt S_1 des gesamten Körpers an (Abb. 80). Den Auftrieb kann man sich auf Grund einer Überlegung, welche der in § 34 bezüglich des Schwerpunktes angestellten völlig analog ist, in demjenigen Punkte im Körper angreifend denken, in dem der Schwerpunkt S_2 der verdrängten Flüssigkeit liegen würde. Diese beiden Kräfte erzeugen im allgemeinen ein Drehmoment, welches den Körper in eine andere Lage zu drehen sucht. Gleichgewicht ist nur dann vorhanden,

wenn die Gerade, die S_1 und S_2 verbindet, vertikal gerichtet ist. Es kann aber noch stabil oder labil sein. Bei Bewegungen des schwimmenden Körpers um seine jeweilige Schwimmlage ändert die verdrängte Flüssigkeitsmenge ihre Form bei konstant bleibendem Volumen. Daher verschiebt sich auch im allgemeinen ihr Schwerpunkt S_2 bei einer solchen Bewegung. Die genaue Theorie ergibt folgendes: Man zeichne in dem schwimmenden Körper die Gerade, welche bei Gleichgewicht die beiden Schwerpunkte S_1 und S_2 verbindet. Der Punkt M, in dem die Resultierende des Auftriebs diese Gerade schneidet, heißt das **Metazentrum**. Der schwimmende Körper ist im stabilen Gleichgewicht, wenn das

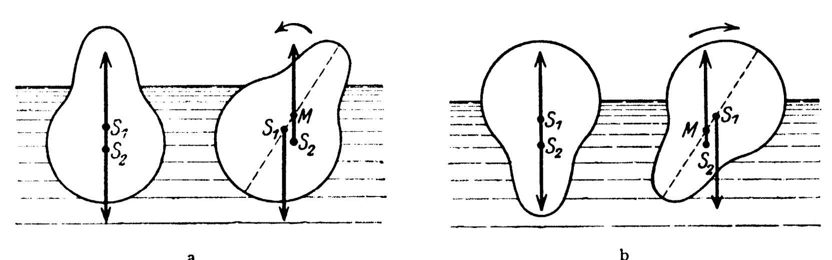


Abb. 80. Zur Theorie des Schwimmens.

Metazentrum über dem Schwerpunkt S_1 des Körpers liegt (Abb. 80a), im labilen Gleichgewicht, wenn es unter diesem liegt (Abb. 80b). Im ersteren Falle kehrt der Körper, aus seiner Gleichgewichtslage gebracht, von selbst in diese wieder zurück. Im letzteren aber bewirkt eine noch so geringe Verschiebung aus der Gleichgewichtslage ein Umkippen in die stabile Lage. Diese Behauptungen lassen sich aus der Abb. 80 ohne weiteres ablesen.

Die stabilen Schwimmlagen sind natürlich unter allen sonst möglichen Lagen diejenigen, welche die im § 62 formulierte Bedingung des stabilen Gleichgewichts erfüllen, also diejenigen kleinster potentieller Energie. Dabei ist aber die Flüssigkeit mit in Rechnung zu setzen. Stabil ist also jede Schwimmlage, bei der die potentielle Energie des Systems (Flüssigkeit + schwimmender Körper) ein Minimum ist.

91. **Die elastischen Eigenschaften der Flüssigkeiten.** Die Flüssigkeiten setzen einer reinen Änderung ihrer Gestalt, also scherenden Kräften (§ 83), keinen dauernden Widerstand entgegen, wohl aber einer Änderung ihres Volumens. Man denke sich eine Flüssigkeit in einem zylindrischen Gefäß von der Länge l und dem Querschnitt q befindlich, das durch einen beweglichen Stempel verschlossen ist. Wird der Stempel durch eine Kraft k um die Strecke Δl nach innen verschoben, so ändert sich das Volumen um den Betrag $\Delta V = q \Delta l$. Die durch den auf die Flüssigkeit ausgeübten Druck $p = k/q$ verursachte relative Volumänderung $-dV/V$ ist dem ausgeübten Druck proportional. Es ist daher

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{\Delta l}{l} = \frac{p}{\chi} = \frac{k}{q \cdot \chi}. \tag{6}$$

Man sieht durch Vergleich mit § 82, Gl. 1, daß diese Gleichung prinzipiell mit dem HOOKEschen Gesetz für feste Körper identisch ist, wobei die Konstante χ, die **Kompressibilität**, die gleiche Rolle spielt, wie im HOOKEschen Gesetz der Elastizitätsmodul E der festen Körper. (Das negative Vorzeichen in Gl. 6 rührt daher, daß wir hier die Kompressibilität aus der Zusammendrückung definieren, während wir den Elastizitätsmodul aus der Dehnung definierten.)

Will man die Kompressibilität einer Flüssigkeit messen, so muß man dafür Sorge tragen, daß der auf die Flüssigkeit wirkende Druck nicht auch die

Wände des sie einschließenden Gefäßes deformiert, d. h. das Gefäßvolumen verändert. Man bedient sich dazu eines sog. Piezometers (Abb. 81, ØRSTED), bei dem auf das die Flüssigkeit enthaltende Gefäß von außen der gleiche Druck wirkt, wie im Innern auf die Flüssigkeit, so daß sich die Druckwirkungen auf das Gefäß, von der sehr kleinen Zusammendrückung des Gefäßmaterials abgesehen, aufheben. Die zu untersuchende Flüssigkeit befindet sich im Gefäß A und ist unten durch Quecksilber abgeschlossen. Im übrigen ist das äußere Gefäß mit Wasser gefüllt. Das Ganze kann unter erhöhten Druck gebracht werden. Die Zusammendrückung der in A befindlichen Flüssigkeit kann am Stande des Quecksilbers im Steigrohr abgelesen werden.

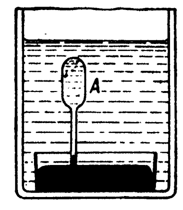


Abb. 81. Zur Messung der Kompressibilität von Flüssigkeiten.

Die Flüssigkeiten sind der Größenordnung nach etwa zehnmal so stark zusammendrückbar, wie die festen Körper.

92. **Oberflächenspannung.** Eine freie Flüssigkeitsoberfläche erweckt den Eindruck, als bestehe sie aus einer dünnen Haut. Die sog. Oberflächenspannung hat ihre Ursache in den zwischen den Flüssigkeitsmolekülen wirkenden anziehenden Kräften. Bei einem im Innern der Flüssigkeit befindlichen, also rings von anderen Molekülen umgebenen Molekül heben sich diese allseitig gerichteten Kräfte im Durchschnitt gegenseitig auf, aber nicht bei einem an der Oberfläche befindlichen. Ein solches steht unter der Wirkung von Molekularkräften, deren Resultierende R (Abb. 82) senkrecht in das Innere der Flüssigkeit gerichtet ist. Es hat gegenüber dem Innern der Flüssigkeit eine gewisse potentielle Energie. Die Bedingung für das Gleichgewicht ist aber, wie in jedem Falle von stabilem Gleichgewicht, daß die potentielle Energie der Flüssigkeit ein Minimum sei (§ 62). Das ist dann der Fall, wenn möglichst wenige Moleküle sich an der Oberfläche befinden, diese also möglichst klein ist. Daher ist, sofern keine anderen als innere Kräfte auf sie wirken, eine freie Flüssigkeitsoberfläche stets die kleinste Fläche, die mit den gegebenen Bedingungen (z. B. der Form der Begrenzung) verträglich ist (Minimalfläche). Aus diesem Grunde sind freie Tropfen kugelförmig.

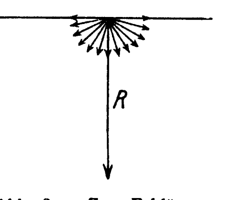


Abb. 82. Zur Erklärung der Oberflächenspannung.

Dünne Flüssigkeitshäutchen, z. B. Seifenlamellen, welche einen Drahtrahmen bedecken, setzen einer Vergrößerung ihrer Oberflächen einen Widerstand entgegen, denn es ist ein Aufwand an Arbeit erforderlich, um den neu an die Oberfläche tretenden Molekülen ihre potentielle Energie zu erteilen, d. h. sie gegen die anziehenden Kräfte der sie umgebenden Moleküle an die Oberfläche zu befördern. Es verhält sich also eine Flüssigkeitsoberfläche etwa wie eine elastische Gummimembran, wenngleich die Ursache der auftretenden Kräfte eine ganz andere ist. Abb. 83 stelle eine in einen rechteckigen Drahtrahmen eingespannte Flüssigkeitslamelle dar. Die eine Rechteckseite, deren Länge a sei, sei verschiebbar, so daß die Größe der Oberfläche verändert werden kann. Diese Seite werde um die Strecke dx verschoben, so daß sich die Größe der Flüssigkeitsoberfläche (beide Seiten der Lamelle!) um den Betrag $dF = 2a \cdot dx$ vergrößert. In 1 qcm der Oberfläche sollen sich n Moleküle befinden, und die potentielle Energie jedes an der Oberfläche befindlichen Moleküls soll ε betragen. Dann ist mit der Vergrößerung der Oberfläche ein Zuwachs an potentieller Energie, also ein Aufwand von Arbeit

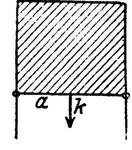


Abb. 83. Zur Oberflächenspannung.

$$dA = n\varepsilon\, dF = n\varepsilon \cdot 2a\,dx \text{ erg}$$

verbunden. Diese Arbeit leistet die an der Seite a angreifende und sie um dx verschiebende Kraft k. Nun ist aber Arbeit gleich Kraft · Weg. Setzen wir $dA = k \cdot dx$, so ergibt sich die Kraft, die zur Vergrößerung der Lamelle nötig ist, bzw. mit der die Lamelle der Vergrößerung widerstrebt, zu

$$k = n\varepsilon \cdot 2a = 2a\vartheta \,\text{dyn}. \tag{7}$$

Die für die betreffende Flüssigkeit charakteristische Konstante $\vartheta = n\varepsilon$ heißt die Konstante der Oberflächenspannung. Sie hat die Dimension dyn/cm und ist gleich der auf 1 cm der Berandung entfallenden Kraft.

Von besonderem Interesse sind die Flüssigkeitshäute von der Art der Seifenblasen. Bei diesen wirkt der Druck eines eingeschlossenen Gases der Tendenz der Flüssigkeit, eine möglichst kleine Oberfläche zu bilden, entgegen. Zur Berechnung des Gleichgewichts betrachten wir irgendeinen größten Kreis auf einer Seifenblase und berechnen die Kraft, mit der die hier zusammenstoßenden beiden Hälften der kugelförmigen Blase infolge ihrer Oberflächenspannung aneinander haften. Die Länge ihrer Berührungsstrecke ist gleich $2\pi r$ (r = Radius der Blase). Da wir die innere und äußere Oberfläche der Blase zu berücksichtigen haben, so ist die Kraft nach Gl. 7 $k = 4\pi r\vartheta$. Andererseits sucht die Druckdifferenz p zwischen dem inneren und äußeren Gasdruck die beiden Blasenhälften auseinanderzutreiben. Man kann leicht berechnen, daß die vom Überdruck in dieser Richtung hervorgebrachte Kraftkomponente den Wert $k = \pi r^2 p$ hat. Diese beiden Kräfte müssen einander das Gleichgewicht halten; es ist also

$$4\pi r\vartheta = \pi r^2 p \quad \text{oder} \quad p = \frac{4\vartheta}{r}.$$

Aus dieser Gleichung folgt das zunächst überraschende Resultat, daß der Druck in einer Seifenblase bei Gleichgewicht um so größer ist, je kleiner der Radius der Blase ist. Das scheint der Erfahrung zu widersprechen, daß man eine Seifenblase durch Hineindrücken von Luft vergrößern kann. Tatsächlich wird dabei aber nur das eingeschlossene Luftvolumen vermehrt, der innere Druck sinkt. Das dem so ist, zeigt leicht der folgende Versuch. Sind zwei Seifenblasen von verschiedenem Radius durch ein Rohr miteinander verbunden (Abb. 84), so wächst die größere auf Kosten der kleineren, bis die kleinere nur noch eine kleine Kuppe auf dem Rohrende bildet, deren Krümmung gleich der Krümmung der großen Blase ist. Erst dann herrscht im Innern Druckgleichgewicht, während anfänglich der Druck in der kleineren Blase größer war als in der größeren, so daß Luft von jener in diese strömte.

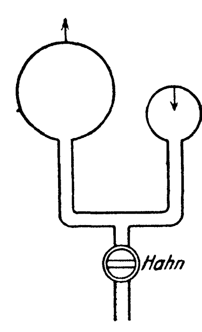


Abb. 84. Eine große Seifenblase wächst auf Kosten einer kleinen.

Die Oberflächenspannung hängt davon ab, an was für eine andere Substanz die Flüssigkeit grenzt.

93. **Kapillarität.** Die sog. Kapillarerscheinungen beruhen auf Kraftwirkungen, welche auftreten, wenn eine Flüssigkeit eine feste Wand berührt. In diesem Falle wirken auf die an der Oberfläche der Flüssigkeit befindlichen Moleküle nicht nur die Moleküle im Innern der Flüssigkeit (k_1), sondern auch diejenigen der festen Wand (k_2) (Abb. 85). Dazu kann auch noch eine Wirkung der über der Flüssigkeit befindlichen Substanz (überschichtete Flüssigkeit) kommen und schließlich die Schwerkraft (k_3), die aber in den meisten Fällen sehr klein gegen die übrigen Kräfte ist. Die Flüssigkeitsoberfläche stellt sich senkrecht zur Resultierenden R dieser Kräfte (§ 88). Je nachdem, wie sich die hierbei auftretenden Kräfte zueinander verhalten, steigt die Flüssigkeit am Rande an der

Gefäßwand hoch (Abb. 85a) oder wird an ihr herabgedrückt (Abb. 85b). Eine Folge dieser Erscheinungen ist das Verhalten von Flüssigkeiten in engen Röhren (Kapillaren, daher der Name Kapillarität). Wasser steigt in einer in ein Gefäß mit Wasser getauchten Kapillaren hoch (Abb. 86a), und zwar um so höher, je enger die Röhre ist, Quecksilber wird in ihr herabgedrückt (Abb. 86b).

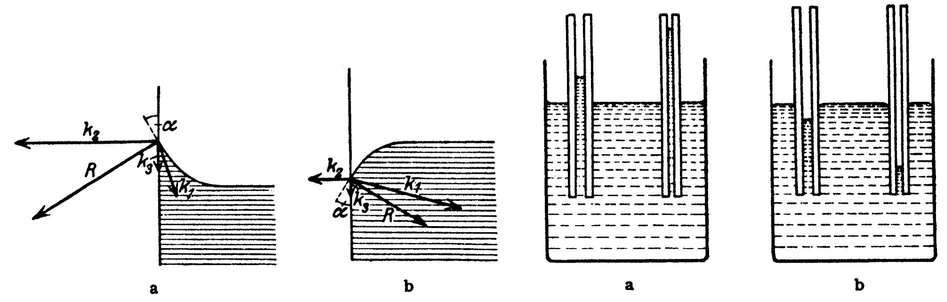


Abb. 85. Zur Theorie der Kapillarerscheinungen. Abb. 86. Wirkung von Kapillaren.

Sind die zwischen den Molekülen einer Flüssigkeit und denjenigen einer angrenzenden festen Substanz wirkenden Kräfte groß gegen die zwischen den Molekülen der Flüssigkeit selbst wirkenden Kräfte, so breitet sich die Flüssigkeit auf der Oberfläche der festen Substanz als dünne Haut aus, sie **benetzt** die Oberfläche und haftet an ihr verhältnismäßig fest (z. B. Wasser auf einer sauberen Glasfläche). Im umgekehrten Falle findet keine Benetzung statt, sondern die Flüssigkeit bildet auf der Oberfläche Tropfen (z. B. Quecksilber auf Glas, Wasser auf einer gefetteten Glasfläche). Der eintretende Gleichgewichtszustand ist, wie stets, dadurch gegeben, daß ein Minimum potentieller Energie eintritt. In diesem Falle handelt es sich um die gegenseitige potentielle Energie der Moleküle an der Oberfläche der beteiligten festen und flüssigen Substanzen.

Wir betrachten den Fall, daß eine Kapillare vom Radius r senkrecht in eine sie vollständig benetzende Flüssigkeit von der Dichte ϱ eingetaucht sei (Abb. 87). Wir wollen den stabilen Gleichgewichtszustand auf Grund der Bedingung berechnen, daß die potentielle Energie ein Minimum sein muß. Die potentielle Energie setzt sich aus zwei Teilen zusammen, der potentiellen Energie der gehobenen Flüssigkeitssäule und derjenigen der Oberflächenmoleküle der Flüssigkeit. Beide Beträge ändern sich bei einer Änderung der Steighöhe. Diese betrage h cm. Dann liegt der Schwerpunkt S der Flüssigkeitssäule $h/2$ cm über dem äußeren Flüssigkeitsniveau. (Hier und im folgenden vernachlässigen wir die kleine Krümmung der Flüssigkeitsoberfläche, die Tatsache, daß sie in der Kapillaren einen sog. Meniskus bildet.) Die potentielle Energie der Säule gegen das äußere Flüssigkeitsniveau beträgt dann $\pi r^2 h \varrho g \cdot h/2 = \pi r^2 h^2 \varrho g/2$. Die Flüssigkeitsoberfläche in der Kapillaren setzt sich aus den Anteilen πr^2 und $2\pi r(l-h)$ zusammen, wenn l die Länge des aus der Flüssigkeit herausragenden Teiles der Kapillaren bedeutet. Da auf 1 cm² der Oberfläche nach § 92 die Molekularenergie $n\varepsilon = \vartheta$ entfällt, so ist die potentielle Oberflächenenergie gleich $\vartheta[2\pi r(l-h) + \pi r^2]$ und die gesamte potentielle Energie

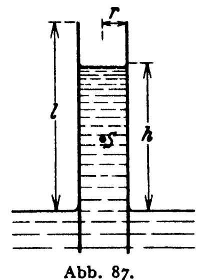


Abb. 87. Zur Kapillaraszension.

$$A = \tfrac{1}{2}\pi r^2 h^2 \varrho g + \vartheta\,[2\pi r\,(l-h) + \pi r^2]\,\text{erg}.$$

Die Bedingung für ihr Minimum finden wir in bekannter Weise durch Differenzieren nach der Steighöhe h und Nullsetzen des Differentialkoeffizienten,

$$\frac{dA}{dh} = \pi r^2 h \varrho g - 2\vartheta\pi r = 0$$

oder

$$h = \frac{2\vartheta}{\varrho r g}. \tag{8}$$

Man kann also aus der Steighöhe h, bei Kenntnis der übrigen Daten, die Konstante ϑ berechnen. Durch eine analoge Überlegung ergibt sich genau der gleiche Ausdruck, aber mit negativem Vorzeichen, für den Fall, daß die Flüssigkeit die Wandung gar nicht benetzt und in der Kapillaren herabgedrückt wird (Kapillardepression).

In den beiden betrachteten Grenzfällen ist der Winkel α (sog. Randwinkel), unter dem die Flüssigkeitsoberfläche die Wandung berührt, gleich 0^0 bzw. 180^0. In allen anderen Fällen liegt er zwischen diesen beiden Grenzwerten (Abb. 85). Der Randwinkel ist charakteristisch für die Größe der zwischen den Molekülen der Flüssigkeit und der Wandung herrschenden Kräfte. Die allgemeine Formel für die Steighöhe lautet

$$h = \frac{2\vartheta}{\varrho r g}\cos\alpha. \tag{9}$$

Da die Konstante der Oberflächenspannung ϑ auch die Kapillarerscheinungen wesentlich beeinflußt, so nennt man sie auch die Kapillaritätskonstante der betreffenden Flüssigkeit.

Kräfte ähnlicher Art, wie sie die Kapillarerscheinungen bedingen, sog. Molekularkräfte, können auch zwischen den Molekülen fester Körper einerseits und fester Körper oder Gase andererseits wirksam sein. Hierauf beruhen z. B. die Erscheinungen der Adhäsion (z. B. das Haften von Kreide an einer Tafel) sowie die Adsorption (§ 191).

Bringt man einen Öltropfen auf Wasser, so breitet er sich auf ihm infolge der zwischen dem Wasser und dem Öl wirkenden Kapillarkräfte zu einer dünnen Schicht aus. Rayleigh, Perrin u. a. haben diese Erscheinung dazu benutzt, um einen Anhalt für die Größe der Moleküle zu gewinnen. Bringt man sehr wenig Öl auf eine große Wasserfläche, so wird das Wasser nicht vollständig von dem Öl überzogen. Die Ausbreitungsfähigkeit des Öls hat eine Grenze. Es liegt nahe, anzunehmen, daß diese dann erreicht ist, wenn die Dicke der Schicht von der gleichen Größenordnung wie der Durchmesser der Moleküle geworden ist. Man findet auf diese Weise, daß dieser Durchmesser bestimmt kleiner als 10^{-6} cm ist. Ähnliche Schlüsse hat man aus der Dicke der schwarzen Flecke von Seifenblasen (§ 439) ziehen können.

Kapillarkräfte sind, neben osmotischen Wirkungen (§ 189) beim Aufsteigen des Safts in den Pflanzen wirksam. Auch bewirken sie die leichte Durchfeuchtung feinporiger und schwammiger Körper, in die Flüssigkeiten durch die Kapillarkräfte hineingezogen werden.

10. Kapitel.

Mechanik ruhender Gase.

94. **Molekulartheorie der Gase (kinetische Gastheorie).** Die Eigenschaften der Gase lassen sich weit einfacher als diejenigen der festen und flüssigen Körper aus dem Verhalten der die Gase zusammensetzenden Moleküle verstehen und quantitativ erklären. Dies bildet den Inhalt der sog. kinetischen Gastheorie.

Ihre Anfänge gehen auf D. BERNOUILLI (1738) zurück. Hiernach befinden sich die Moleküle eines Gases in ständiger, ihrer Geschwindigkeit nach nur von der Temperatur des Gases abhängiger Bewegung (§ 156). Diese Bewegung ist eine vollkommen ungeordnete. Die Moleküle bewegen sich so lange auf geraden Bahnen, bis sie mit der Wandung des das Gas einschließenden Gefäßes oder mit einem andern Molekül zusammenstoßen. Diese Zusammenstöße sind vollkommen elastisch (§ 51), gehen also ohne Energieverlust vonstatten. Jedoch tritt bei einem Zusammenstoß zweier Moleküle in der Regel ein Energie- und Impulsaustausch ein. Bei einem solchen Zusammenstoß erfolgen also Änderungen der Richtung und der Geschwindigkeit jedes Moleküls. Der Zustand des Gases verändert sich „mikroskopisch", d. h. wenn wir seine einzelnen Moleküle betrachten, fortgesetzt. Nun ist aber die Zahl der Moleküle auch in einem sehr kleinen Gasvolumen und bei sehr niedrigem Druck noch immer außerordentlich groß. Und wenn wir ein solches Volumen als Ganzes „makroskopisch" betrachten, so bemerken wir von diesen fortgesetzten Änderungen des Zustandes nichts. Es herrscht ein sog. dynamisches Gleichgewicht, in dem bei der großen Zahl von Molekülen jede an einem Molekül gerade vor sich gehende Änderung der Größe und Richtung seiner Geschwindigkeit durch eine gerade entgegengesetzte, an einem der unzähligen andern Moleküle vor sich gehende Änderung im Durchschnitt ausgeglichen wird.

Es liegt hier ein Fall vor, der dem Zustande der Bevölkerung einer großen Stadt ähnlich ist, welche unter gleichbleibenden Verhältnissen lebt. Betrachtet man eine solche Bevölkerung „mikroskopisch", d. h. fragt man nach den Schicksalen jedes einzelnen Bewohners, so bietet sich einem das Bild eines stets wechselnden Zustandes. Einzelne Einwohner sterben, dafür werden andere geboren, einzelne wandern ab, dafür wandern andere zu. Bei „makroskopischer" Betrachtung aber, wenn man die Bevölkerung als Ganzes ohne Rücksicht auf die verschiedenen Individuen und ihre Einzelschicksale betrachtet, bietet sich stets das gleiche Bild; die Zahl der Einwohner, ihr durchschnittliches Alter wie auch der Durchschnitt aller ihrer Eigenschaften, ändert sich nicht — immer unter Voraussetzung gleichbleibender Verhältnisse. Diese „makroskopische" Betrachtungsweise ist diejenige der Bevölkerungsstatistik. Sie führt in ihrer weiteren Ausnutzung zur Feststellung ganz bestimmter Gesetzmäßigkeiten für das durchschnittliche Verhalten einer Bevölkerung, ohne daß es dabei nötig ist, über das Schicksal des einzelnen Individuums etwas zu wissen.

Es ist nun eine außerordentlich wichtige Tatsache, daß die Betrachtungsweise der Statistik, welche immer anwendbar ist, wenn es sich um eine große Zahl von Einzelindividuen handelt (auf die Einwohner eines einzelnen Hauses sind die obigen Betrachtungen offenbar nicht anwendbar), mit vollem Erfolg auch auf das Verhalten der Gase mit ihren außerordentlich vielen gleichartigen Molekülen Anwendung gefunden hat. Und diese Betrachtungsweise gibt uns ja auch gerade das, was wir in der Regel einzig unmittelbar beobachten können, nämlich das Verhalten einer Gesamtheit von sehr vielen Molekülen in einem nicht allzu kleinen Raume, während sich das Verhalten eines einzelnen Moleküls meist der Beobachtung entzieht und, als rein zufällig, uns ebensowenig interessiert, solange wir uns eben mit ausgedehnten Gasvolumina beschäftigen, wie den Bevölkerungsstatistiker ein Einzelschicksal.

Die mathematischen Methoden, welche in der Statistik Anwendung finden, beruhen auf den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Sie führen im Endergebnis zu Aussagen über das durchschnittliche Verhalten der einzelnen beteiligten Individuen — in unserm Falle der Gasmoleküle — bzw. zu bestimm-

ten Mittelwerten derjenigen Größen, welche ihr Verhalten kennzeichnen. Diese Aussagen gestalten sich besonders einfach, wenn wir es mit einem sog. idealen Gase zu tun haben (§ 101), bei dem von den Kräften, die die Moleküle aufeinander ausüben, abgesehen werden kann. Unter dieser Voraussetzung ergeben sich für eine als Ganzes ruhende und auf konstanter Temperatur gehaltene Gasmenge u. a. die nachstehenden, uns hier zunächst interessierenden Tatsachen (2. und 3. gelten auch für nicht ideale Gase).

1. Der Mittelwert der kinetischen Energie $\frac{1}{2}\mu v^2$ eines Gasmoleküls, genommen über eine ausreichend lange Zeit (zeitlicher Mittelwert), ist für alle Gasmoleküle der gleiche, und zwar ebenso groß, wie der Mittelwert der kinetischen Energie, genommen über sämtliche Moleküle in einem bestimmten Zeitmoment (räumlicher Mittelwert). Daraus folgt, daß die durchschnittliche Geschwindigkeit v eines Moleküls, d. h. ihr zeitlicher Mittelwert, auch für alle Gasmoleküle den gleichen Betrag hat, sofern wir es mit lauter gleichartigen Molekülen (gleiche Masse μ) zu tun haben. Es ist in sehr vielen Fällen zulässig, so zu rechnen, als ob alle Moleküle in jedem Augenblick diese mittlere Geschwindigkeit hätten.

2. Die Bewegungsrichtungen der Moleküle sind bei dynamischem Gleichgewicht stets über alle räumlichen Richtungen im Durchschnitt gleichmäßig verteilt.

3. Ein Gas füllt stets den ganzen ihm zur Verfügung stehenden Raum aus. Sofern man von der Wirkung der Schwere absehen kann, sind die Moleküle über den ganzen verfügbaren Raum im Durchschnitt gleichmäßig verteilt. Es befinden sich also in gleichen Raumteilen gleich viele Moleküle.

4. Bei gleicher Temperatur ist die kinetische Energie der Moleküle verschiedener Gase die gleiche. Gasmoleküle von kleinerer Masse μ sind also schneller als solche von größerer Masse. Denn da $\mu_1 v_1^2/2 = \mu_2 v_2^2/2$, so ist $v_1^2 : v_2^2 = \mu_2 : \mu_1$.

5. Die Geschwindigkeit der Moleküle hängt bei gegebener Temperatur nicht vom Gasdruck ab.

95. **Das Gesetz von AVOGADRO.** Eine von AVOGADRO aufgestellte, weiter unten (§ 156) zu beweisende Behauptung besagt: Die Zahl der Moleküle in 1 ccm eines idealen Gases hängt nur von der Temperatur und dem Druck ab, aber nicht von der Art des Gases. Sie ist also für verschiedene Gase bei gleichem Druck und gleicher Temperatur gleich groß (AVOGADROsches Gesetz, 1811).

Wir betrachten 1 ccm eines Gases bei 0° und 760 mm Druck. Die Dichte des Gases sei ϱ. Die Zahl der in 1 ccm enthaltenen Moleküle sei $\mathfrak{N}$, die Masse eines einzelnen Moleküls μ. Dann ist die Masse von 1 ccm des Gases, also seine Dichte

$$\varrho = \mathfrak{N}\mu . \tag{1}$$

Man bezeichnet die nach dem AVOGADROschen Gesetz für alle idealen Gase gleich große Zahl $\mathfrak{N}$, die Zahl der in 1 ccm eines Gases bei 0° und 760 mm Druck (sog. Normalbedingungen) enthaltenen Moleküle, als die AVOGADROsche Zahl. Es ist

$$\mathfrak{N} = 27{,}0_6 \cdot 10^{18}, \text{ d. h. rund } 27 \text{ Trillionen.} \tag{2}$$

Die Massen verschiedener Gase von gleichem Volumen verhalten sich wie ihre Dichten. Da $\mathfrak{N}$ aber für alle idealen Gase bei gleichem Druck und gleicher Temperatur den gleichen Wert hat, so verhalten sich nach Gl. 1 die Dichten verschiedener idealer Gase bei gleicher Temperatur wie die Massen der einzelnen Moleküle dieser Gase. Aus dem Verhältnis der Dichten zweier idealer Gase kann man also das Verhältnis der Massen ihrer einzelnen Moleküle finden.

96. Molekulargewicht und Atomgewicht. Mol und Grammatom. Unter dem Molekulargewicht eines Stoffes versteht man das Gewicht eines einzelnen Moleküls dieses Stoffes, wenn man als Gewichtseinheit nicht das Gramm, sondern $^1/_{16}$ des Gewichts eines Sauerstoffatoms benutzt. Hiernach beträgt z. B. das Molekulargewicht des Sauerstoffgases O_2 32,00, das des Wasserstoffgases H_2 2,0156, das des Heliums He 4,00 usw. Es muß bemerkt werden, daß der Ausdruck Molekulargewicht auch dann verwendet wird, wenn es sich gar nicht um das Gewicht, sondern um die Masse handelt, und das ist tatsächlich das weitaus häufigere.

Es gibt verschiedene physikalische und chemische Methoden zur Bestimmung von Molekulargewichten. Die einfachste physikalische Methode besteht im Prinzip darin, daß man den zu untersuchenden Stoff in den idealen Gaszustand bringt und seine Dichte ϱ ermittelt. Nach Gl. 1 verhalten sich die Molekulargewichte verschiedener Stoffe im idealen Gaszustand bei gleichem Druck und gleicher Temperatur wie ihre Dichten. Man findet daher das Molekulargewicht aus der Dichte durch Vergleich mit der Dichte des Sauerstoffes bei gleichem Druck und gleicher Temperatur, die man leicht berechnen kann (vgl. § 182).

Ein Mol oder Grammolekül einer Substanz ist diejenige Menge der Substanz, die soviel Gramm von ihr enthält, wie das Molekulargewicht angibt. Es enthält also 1 Mol Sauerstoffgas 32,00 g, 1 Mol Wasserstoffgas 2,0156 g, 1 Mol HCl 36,46 g Substanz. Die in 1 Mol einer beliebigen Substanz enthaltene Masse verhält sich demnach zur Masse eines Moleküls dieser Substanz wie die Masseneinheit 1 g zu $^1/_{16}$ der Masse eines Sauerstoffatoms. D. h. die Masse M eines Mols (das Molekulargewicht in der oben erwähnten, nicht ganz korrekten Ausdrucksweise) steht also zur Masse μ eines Moleküls der betreffenden Substanz in einem konstanten Verhältnis, $M/\mu = N$, und diese Größe N ist offenbar nichts anderes als die Zahl der in 1 Mol enthaltenen Moleküle, denn es ist ja

$$N\mu = M, \tag{3}$$

und beide Seiten bedeuten die in 1 Mol enthaltene Masse M, die sich aus den N Einzelmassen μ zusammensetzt. N ist also eine sog. universelle Konstante. Man nennt sie die LOSCHMIDTsche Zahl. Ihr Zahlenwert beträgt

$$N = 6{,}06_0 \cdot 10^{23}. \tag{4}$$

Die Masse eines Mols Wasserstoffgas (H_2) beträgt 2,0156 g. Daher beträgt die Masse eines Wasserstoffmoleküls nach Gl. 3 $\mu = 2{,}0156/N = 3{,}32_4 \cdot 10^{-24}$ g und diejenige eines Wasserstoffatoms $1{,}66_2 \cdot 10^{-24}$ g.

Da in 1 Mol aller Substanzen stets die gleiche Zahl von Molekülen enthalten ist, so hat auch 1 Mol der verschiedenen Gase nach dem Gesetz von AVOGADRO bei gleichem Druck und gleicher Temperatur im idealen Gaszustande das gleiche Volumen. Dieses Volumen — für 0^0 und 760 mm Druck — können wir z. B. aus den Daten des Sauerstoffs ausrechnen. Die Dichte des Sauerstoffgases beträgt unter den genannten Bedingungen 0,001429; also ist das Volumen von 1 g Sauerstoffgas (sein spezifisches Volumen V_s) 1/0,001429. Das Molekulargewicht des Sauerstoffgases ist 32, also ist das Volumen von 1 Mol, d. h. 32 g Sauerstoffgas bei Normalbedingungen gleich 32/0,001429 oder rund 22400 ccm. Die gleiche Zahl, das Molvolumen, ergibt sich für Helium (4/0,0001787), Stickstoff (28/0,0012507) usw.

Das Atomgewicht eines Elementes ist, analog zum Molekulargewicht, definiert als das Gewicht bzw. die Masse (s. o.) eines Atoms des Elementes, wenn als Einheit $^1/_{16}$ des Gewichtes eines Sauerstoffatoms benutzt wird. Eine Tabelle der Atomgewichte siehe § 501.

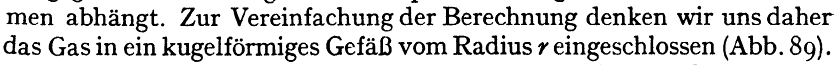
Analog zum Mol oder Grammolekül ist das Grammatom definiert. Es ist diejenige Menge eines Elementes, die soviel Gramm von ihm enthält, wie das Atomgewicht angibt. Die Zahl der Atome in 1 Grammatom ist ebenso groß wie die Zahl der Moleküle in 1 Mol, also gleich N.

(Seitdem man entdeckt hat, daß der Sauerstoff kein einheitliches Element ist, sondern aus drei Isotopen besteht (§ 517), ist die Frage akut geworden, ob man die Molekular- und Atomgewichte auch künftig noch auf den Sauerstoff beziehen soll. Vom physikalischen Standpunkt aus wäre die Masse des Wasserstoffatoms die natürliche Einheit.)

Es ist zu beachten, daß die LOSCHMIDTsche Zahl von Druck und Temperatur unabhängig ist. Die AVOGADROsche Zahl hingegen bezieht sich auf einen ganz bestimmten Druck- und Temperaturzustand und würde einen andern Wert annehmen, wenn man sie auf einen andern Zustand bezöge.

97. **Der Druck der Gase.** Wir sind auf Grund der in § 94 entwickelten Vorstellung nunmehr in der Lage, uns ein anschauliches Bild davon zu machen, wie der Druck eines Gases auf die Wände eines das Gas einschließenden Gefäßes entsteht. Bei ihrer Bewegung stoßen die Gasmoleküle fortgesetzt an die Wände und werden von ihnen wieder zurückgeworfen, und zwar nach den Gesetzen des elastischen Stoßes (§ 51), d. h. es geht hierbei keine kinetische Energie verloren. Da die Gefäßwände fest sind, also Energie auf sie nicht übertragen wird, so wird jedes Molekül mit der gleichen Geschwindigkeit, mit der es ankam, die Wand nach der Reflexion wieder verlassen. Ein Molekül treffe mit der Geschwindigkeit v unter dem Einfallswinkel α_1 (Abb. 88) auf eine glatte Wand und werde von ihr unter dem Winkel α_2 wieder reflektiert. Wir wollen dabei annehmen, daß seine Geschwindigkeit nach dem Stoß mit derjenigen vor dem Stoß und dem Einfallslot in der gleichen Ebene liegt. Seine Geschwindigkeitskomponenten vor dem Stoß sind dann $v_\perp = v \cos\alpha_1$ senkrecht und $v_\parallel = v \sin\alpha_1$ parallel zur Wand, nach dem Stoß $v'_\perp = -v \cos\alpha_2$ und $v'_\parallel = v \sin\alpha_2$. Uns interessiert hier hauptsächlich die zur Wand senkrechte Komponente. Sie erfährt infolge der beim Stoß von der Wand auf das Molekül ausgeübten Kraft eine Umkehr ihrer Richtung und eine Änderung um $v \cos\alpha_1 - (-v \cos\alpha_2) = v(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)$.

Zur Ableitung der Gesetze des Gasdrucks machen wir von der Tatsache Gebrauch, daß dieser Druck, wie die Erfahrung ebenso wie theoretische Überlegungen zeigen, von der Form des das Gas einschließenden Gefäßes unabhängig ist und bei gegebener Gasmenge und Temperatur lediglich von seinem Volu-



men abhängt. Zur Vereinfachung der Berechnung denken wir uns daher das Gas in ein kugelförmiges Gefäß vom Radius r eingeschlossen (Abb. 89). Die in einem solchen Gefäß befindlichen Gasmoleküle werden, außer bei sehr niedrigem Druck, zwischen ihren Zusammenstößen mit der Gefäßwand sehr oft mit andern Gasmolekülen zusammenstoßen und dadurch Ablenkungen erfahren. Trotzdem wollen wir bei der Druckberechnung von diesen Zusammenstößen mit andern Gasmolekülen absehen, denn bei der ungeheuer großen Zahl von Molekülen wird es im Durchschnitt immer so kommen, daß an Stelle eines Moleküls, welches durch einen Zusammenstoß mit einem andern vorerst am Erreichen der Gefäßwand verhindert wird, gleichzeitig irgendein anderes einen derartigen Zusammenstoß erleidet, daß es an Stelle des ersten auf die Gefäßwand, die es ohne diesen Zusammenstoß vorerst nicht erreicht hätte, geworfen wird, so daß wir das letztere Molekül ohne weiteres an die Stelle des ersteren gesetzt denken

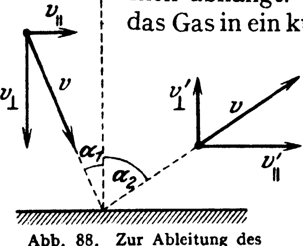


Abb. 88. Zur Ableitung des Gasdrucks.

können. Wir nehmen also an, ohne damit eine Vernachlässigung zu begehen, die das Ergebnis fälscht, daß nur Zusammenstöße der Gasmoleküle mit der Gefäßwand, nicht solche der Moleküle unter sich, vorkommen.

Zwecks größerer Allgemeinheit wollen wir annehmen, daß die Moleküle an der Wandung nicht regulär reflektiert werden, also Auftreff- und Reflexionswinkel bei den einzelnen Stößen in der Regel verschieden groß sind. Wir bezeichnen diese Winkel mit α_1 und α_2 (Abb. 89). Zunächst betrachten wir nur die zur Wand senkrechte Komponente der Bewegungsgröße $\mu v_\perp$. Diese beträgt vor dem Stoß $\mu v \cdot \cos\alpha_1$, nach dem Stoß $-\mu v \cdot \cos\alpha_2$. Daher beträgt die gesamte Änderung dieser Komponente nach dem Stoß

$$\varDelta \mu v_\perp = \mu v (\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)\,.$$

Abb. 89. Zur Ableitung des Gasdrucks.

Sind s_1 und s_2 die zu α_1 und α_2 gehörigen Sehnen, also die Bahnen des Moleküls zwischen dem vorhergehenden und dem betrachteten Stoß, bzw. zwischen diesem und dem folgenden, und sei r der Radius der Kugel, so ist

$$\cos\alpha_1 = \frac{s_1}{2r} \quad \text{und} \quad \cos\alpha_2 = \frac{s_2}{2r}\,.$$

Es folgt

$$\varDelta \mu v_\perp = \mu v \frac{s_1 + s_2}{2r}\,.$$

Wir wollen nunmehr jedem Stoß die Hälften der vorhergehenden und der folgenden freien Bahnstrecken, $s_1/2$ und $s_2/2$, zuordnen. Das Molekül braucht zur Zurücklegung der so dem Stoß zugeordneten Strecke $(s_1 + s_2)/2$ die Zeit

$$\varDelta t = \frac{s_1 + s_2}{2v}\,.$$

Es ist also

$$\frac{\varDelta \mu v_\perp}{\varDelta t} = \frac{\mu v^2}{r}\,.$$

Wir erhalten damit das Ergebnis, daß der Ausdruck $\varDelta \mu v_\perp / \varDelta t$, der die von einem Molekül in der Zeiteinheit durchschnittlich abgegebene Bewegungsgröße darstellt, von der Größe der Auftreff- und Reflexionswinkel unabhängig ist. Sei n die Zahl der Moleküle in 1 ccm des Gases, also die Gesamtzahl der Moleküle in der Kugel $n \cdot 4\pi r^3/3$, so beträgt demnach die gesamte in der Zeiteinheit auf die Gefäßwand übertragene Bewegungsgröße

$$\frac{4\pi r^3 n}{3} \frac{\varDelta \mu v_\perp}{\varDelta t} = \frac{4\pi r^2}{3} n \mu v^2\,.$$

Nach dem 2. Newtonschen Axiom ist aber die in der Zeiteinheit umgesetzte Bewegungsgröße gleich der wirkenden Kraft k. Es wirkt also auf die Gefäßwand infolge der Molekülstöße die Kraft

$$k = \frac{4\pi r^2}{3} n \mu v^2 \text{ dyn}\,. \tag{5}$$

Wir erhalten den auf die Gefäßwand ausgeübten Druck, indem wir die Kraft k durch die Oberfläche $4\pi r^2$ der Kugel dividieren:

$$p = \tfrac{1}{3} n \mu v^2 \text{ dyn} \cdot \text{cm}^{-2} \tag{6}$$

Bisher haben wir die tangentiale Komponente der Bewegungsgröße, $\mu v_\parallel$, außer Betracht gelassen. Sie trägt ja auch, da sie parallel zur Wandung gerichtet ist, zum Druck offenbar nichts bei. Ihre Änderungen bei den einzelnen Stößen erteilen der Kugel lediglich kleine Drehimpulse, die sich wegen ihrer wechselnden Richtung und ihrer großen Zahl im Durchschnitt gegenseitig aufheben.

Wegen der großen Wichtigkeit der Gl. 6 wollen wir sie noch auf eine zweite Weise ableiten. Wir denken uns die Geschwindigkeit jedes Gasmoleküls in seine Komponenten v_x, v_y, v_z in drei zueinander senkrechten Richtungen zerlegt. Dabei ist $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2$. Wenn wir unter $\overline{v_x^2}, \overline{v_y^2}, \overline{v_z^2}$ die Mittelwerte der Quadrate der Geschwindigkeitskomponenten des einzelnen Moleküls verstehen, so gilt natürlich eine entsprechende Gleichung auch für diese Mittelwerte, $\overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} = v^2$. Da sich nun die Geschwindigkeiten der Gasmoleküle über alle Richtungen im Raum gleichmäßig verteilen, so müssen die Mittelwerte $\overline{v_x^2}, \overline{v_y^2}, \overline{v_z^2}$ einander gleich sein. Es ist also $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = v^2/3$. Wir betrachten jetzt ein zur x-Richtung senkrechtes, F cm² großes Flächenstück der Wand eines gasgefüllten Gefäßes und greifen aus der Gesamtheit der Moleküle diejenigen heraus, die eine auf die durch F gehende Ebene hin gerichtete Geschwindigkeitskomponente $+v_x$ haben. Es ist das die Hälfte der Moleküle, die in der x-Richtung eine Geschwindigkeit vom Betrage v_x haben, da sich ja die Hälfte von diesen in umgekehrter Richtung bewegt. Die Zahl der Moleküle in 1 cm³ mit einer Geschwindigkeitskomponente vom Betrage v_x sei n_v^x. Der Einfachheit halber, — es ändert das Ergebnis nicht —, nehmen wir an, daß die Moleküle an F regulär, d. h. unter gleichem Winkel, wieder reflektiert werden, so daß sie nach der Reflexion an F die Geschwindigkeit $-v_x$ in der x-Richtung haben. Dann setzt jedes Molekül an F die Bewegungsgröße $2\mu v_x$ um. Die Fläche F wird in 1 sec von so vielen der herausgegriffenen Moleküle erreicht, wie sich in einem Zylinder von der Grundfläche F und der Höhe v_x befinden, also von $n_v^x F v_x/2$ Molekülen, und die von diesen Molekülen auf F ausgeübte Kraft beträgt demnach $n_v^x \mu v_x^2 F$. Die gesamte auf F wirkende Kraft erhalten wir durch Addition über alle Moleküle, $k = \sum n_v^x \mu v_x^2 F$. Nun ist aber, wenn n die Zahl der Moleküle in 1 cm³ bedeutet, $\sum n_v^x v_x^2/n$ der Mittelwert $\overline{v_x^2}$ der Geschwindigkeitsquadrate v_x^2, also gleich $\overline{v_x^2} = v^2/3$, und wir erhalten, wenn wir noch k durch F dividieren, den Druck auf die Wandung,

$$p = \tfrac{1}{3} n \mu v^2$$

in Übereinstimmung mit Gl. 6.

In einer Mischung verschiedener idealer Gase addieren sich ihre Einzeldrucke, die sog. Partialdrucke, da sich ihre Molekulargeschwindigkeiten gegenseitig nicht beeinflussen, und der Gesamtdruck beträgt

$$p = \tfrac{1}{3} n_1 \mu_1 v_1^2 + \tfrac{1}{3} n_2 \mu_2 v_2^2 + \cdots = p_1 + p_2 + \cdots \tag{7}$$

(DALTONsches Gesetz 1803).

Da n die Zahl der Moleküle in 1 ccm bedeutet, so ist $n\mu$ die in 1 ccm enthaltene Masse. Das aber ist Dichte ϱ des Gases. Es ist also auch

$$p = \tfrac{1}{3} \varrho v^2 \text{ dyn/cm}^{-2}. \tag{8}$$

Man kann daher die Geschwindigkeit v der Gasmoleküle aus dem Druck und dem spezifischen Gewicht eines Gases berechnen.

Das spezifische Gewicht von Wasserstoff beträgt bei 0° C und 760 mm Druck 0,00008985. Ein Druck von 760 mm ist gleich 1013300 dyn/cm² (§ 103). Es ist daher für Wasserstoff, wie man aus obiger Gleichung unter Einsetzung dieser Zahlen berechnet, $v = 1{,}837 \cdot 10^5$ cm/sec $= 1837$ m/sec oder rund 2 km/sec. Für Luft ergibt sich $v = 484$ m/sec, also rund 0,5 km/sec.

98. Das Gesetz von BOYLE-MARIOTTE. Führt man in Gl. 8 statt ϱ das spezifische Volumen $V_s = 1/\varrho$ ein (§ 56), so ergibt sich

$$p V_s = \tfrac{1}{3} v^2.$$

Diese Größe ist für ein Gas bei konstant gehaltener Temperatur konstant. Betrachten wir statt eines ccm eine Gasmenge von der Masse m und dem Volumen V, so ist $V_s = 1/\varrho = V/m$. Es ergibt sich demnach für ein beliebiges Gasvolumen V von der Masse m

$$pV = \tfrac{1}{3} m v^2 \text{ dyn} \cdot \text{cm oder erg}. \tag{9}$$

Die rechte und daher auch die linke Seite dieser Gleichung ist aber für eine bestimmte Gasmenge bei konstanter Temperatur konstant, also

$$pV = \text{const.} \tag{10}$$

Dies ist das Gesetz von BOYLE-MARIOTTE (1660, bzw. 1676, schon vorher von TOWNLEY erkannt). Es besagt, daß, bei konstant gehaltener Temperatur, Druck und Volumen eines Gases einander umgekehrt proportional sind. Ändert man bei konstanter Temperatur den Druck einer abgeschlossenen Gasmenge von p_1 auf p_2, so ändert sich das Volumen von V_1 auf V_2, und zwar ist

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \quad \text{oder} \quad V_2 : V_1 = p_1 : p_2 . \tag{11}$$

Zustandsänderungen, bei denen die Temperatur konstant gehalten wird nennt man isotherme Prozesse.

Da m die Summe der Molekülmassen im Volumen V ist, so ist die gesamte in V enthaltene kinetische Molekularenergie gleich $mv^2/2$. Aus Gl. 9 folgt daher, daß das Produkt pV gleich $^2/_3$ dieser kinetischen Molekularenergie ist.

99. **Freie Weglänge und Stoßzahl.** Unter der mittleren freien Weglänge (kurz: freie Weglänge) in einem Gase versteht man den Mittelwert der Wege, die die einzelnen Gasmoleküle bei ihrer Bewegung zwischen je zwei Zusammenstößen mit andern Molekülen zurücklegen. Wir denken uns eine Schar von z_0 Gasmolekülen, welche sich in der gleichen Richtung bewegen, und nehmen an, die Moleküle seien Kugeln vom Radius r. In jeder Gasschicht, die sie durchlaufen, erleiden einige von ihnen Zusammenstöße mit andern Molekülen und scheiden durch Ablenkung aus ihrer Richtung aus der Schar aus. Wir betrachten eine Gasschicht von der Dicke dx in der Entfernung x vom Ursprung der Molekülschar (Abb. 90). Es seien hier noch z von den z_0 Molekülen in der geradeaus fliegenden Schar vorhanden, d. h. noch nicht durch Zusammenstöße aus ihr ausgeschieden. Der Querschnitt dieser Schicht, die die Schar durchläuft, sei F. Das dazugehörige Schichtvolumen ist also $dV = F\,dx$. In diesem befinden sich $nF\,dx$ Moleküle, wenn in 1 ccm n Moleküle sind. Diese können wir uns als ruhend denken. Wir fragen nun nach der Zahl der Zusammenstöße in dieser Schicht. Man sieht leicht ein, daß es für die Zahl der Zusammenstöße auf das gleiche herauskommt, wenn wir uns alle Moleküle als Kreisscheiben vom Radius r vorstellen, deren Flächen senkrecht zur Bewegungsrichtung der Molekülschar stehen. Es macht ferner für die Zahl der Zusammenstöße nichts aus, wenn wir an die Stelle der bewegten Moleküle vom Radius r Massenpunkte setzen und dafür den Radius der ruhenden Moleküle bzw. der gedachten Kreisscheiben verdoppeln. Die Schicht dx nehmen wir als so dünn an, daß die darin befindlichen Moleküle sich nicht gegenseitig überdecken. Jetzt sieht man, daß von den z Molekülen, welche noch die Schicht ohne Zusammenstoß erreichen, ein Bruchteil dz/z darin Zusam-

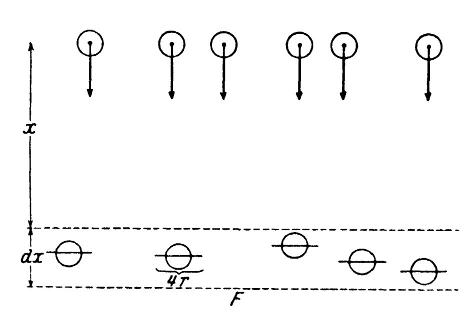


Abb. 90. Zur Ableitung der freien Weglänge.

menstöße erleidet, der gleich dem Verhältnis der Fläche der in der Schicht befindlichen gedachten Scheiben vom Radius $2r$, also $4\pi r^2 n F dx$, zur Fläche F ist, also

$$\frac{dz}{z} = - n \cdot 4\pi r^2\, dx.$$

dz bedeutet die Änderung der Zahl z auf dem Wege dx. Daher ist die rechte Seite negativ zu setzen. Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet, wenn wir für $x = 0$ $z = z_0$ setzen,

$$z = z_0\, e^{-4\pi n r^2 x} = z_0\, e^{-\frac{x}{\lambda}}. \tag{12}$$

Die Größe $\lambda = 1/4\pi n r^2$ ist, wie sich leicht zeigen läßt, der Mittelwert der freien Weglänge. Da die Zahl n der Moleküle im Kubikzentimeter der Dichte und diese nach Gl. 6 dem Druck proportional ist, so ist die freie Weglänge dem Druck umgekehrt proportional, ferner ist sie dem Querschnitt der Moleküle πr^2 umgekehrt proportional.

Es gibt Methoden, um die freie Weglänge zu bestimmen (§ 113). Es hat sich ergeben (bei Atmosphärendruck und 0°): in Luft rund 10^{-5} cm, in Wasserstoff $1{,}8 \cdot 10^{-5}$ cm, in Kohlensäure $0{,}7 \cdot 10^{-5}$ cm. Da die Zahl der Moleküle im Kubikzentimeter bekannt ist (§ 95), so kann man auch den Querschnitt πr^2 der Moleküle berechnen. Der Radius der Moleküle ergibt sich in der Größenordnung von etwa 10^{-8} cm. Der Gesamtquerschnitt aller in 1 ccm bei Normalbedingungen befindlichen Moleküle ergibt sich bei Wasserstoff zu 8500, bei Luft zu 17000, bei Kohlensäure zu 26000 qcm, also von der Größenordnung von 1—3 qm.

Die Molekulargeschwindigkeit haben wir bereits im § 99 berechnet. Aus der mittleren freien Weglänge und der Geschwindigkeit kann man die Zeit zwischen zwei Zusammenstößen berechnen, bzw. deren reziproken Wert, die Zahl der Stöße in der Zeiteinheit, die Stoßzahl. Sie ergibt sich in Luft zu etwa 4700 Millionen, in Wasserstoff zu 9500 Millionen, in Kohlensäure zu 5500 Millionen in der Sekunde.

100. Die Kompressibilität der Gase. Isotherme Volumänderungen. In einem zylindrischen Gefäß vom Querschnitt q (Abb. 91) befinde sich ein ideales Gas. Das Gefäß sei durch einen beweglichen Stempel verschlossen, auf den von außen eine Kraft k wirke und im Gase einen Druck $p = k/q$ aufrechterhalte. Nunmehr werde durch Vergrößerung der Kraft k um den Betrag dk der Stempel um die Strecke dx nach innen verschoben, so daß sich das Volumen des Gases um den Betrag dV ändert.

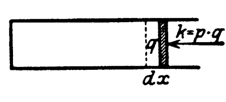


Abb. 91. Isotherme Kompression eines Gases.

Dabei werde die Temperatur des Gases konstant gehalten (isotherme Volumänderung). Dann vergrößert sich der Druck um den Betrag dp, und es ist nach Gl. 10

$$d(pV) = p\,dV + V\,dp = 0 \quad \text{oder} \quad -\frac{dV}{V} = \frac{dp}{p} = \frac{dk}{qp}. \tag{13}$$

Diese Gleichung ist der Gl. 6 (§ 91), durch die die Kompressibilität der Flüssigkeiten definiert wurde, ganz analog. Es ist nämlich die zusätzliche Kraft dk in unserem Falle analog zu der in jener Gleichung vorkommenden Gesamtkraft k. (Der Druck p hat hier eine andere Bedeutung als in § 91, wo er denjenigen Druck bedeutet, der von außen auf die Flüssigkeit ausgeübt werden muß, um die Volumänderung ΔV zu erzeugen.) Man sieht durch Vergleich der beiden Gleichungen, daß bei den Gasen der Druck p die gleiche Rolle spielt wie bei den Flüssigkeiten die Kompressibilität χ. Es ist also die Kompressibilität der idealen Gase gleich ihrem Druck. Das gilt jedoch nur für isotherme Volumänderungen (vgl. § 172).

Beim Hineinschieben des Stempels um die kleine Strecke dx ist gegen die vom Druck des Gases gegen den Stempel ausgeübte Kraft pq Arbeit dA zu leisten, und zwar ist diese gleich dem Produkt aus Kraft und Weg, d. h.

$$dA = p \cdot q \cdot dx = p \cdot dV. \tag{14}$$

Bei einer Volumenvergrößerung wird vom Gasdruck Arbeit im gleichen Betrage geleistet, also äußere Arbeit gewonnen (vgl. Gl. 6, § 85).

101. Ideale und wirkliche Gase. Die wirklichen Gase gehorchen den in den vorstehenden Paragraphen abgeleiteten Gesetzmäßigkeiten vielfach mit sehr großer Annäherung. Ein Gas, welches ihnen streng gehorchen würde, nennt man, wie bereits erwähnt, ein ideales Gas. Luft, Sauerstoff, Stickstoff, Wasserstoff und die Edelgase sind unter gewöhnlichen Bedingungen des Drucks und der Temperatur sehr nahezu im idealen Gaszustand. Bei tiefen Temperaturen und hohem Druck treten Abweichungen ein (§ 164). Diese rühren erstens davon her, daß Wechselwirkungen, insbesondere anziehende Kräfte, zwischen den Molekülen bestehen, die bei den vorstehenden Ableitungen als nicht vorhanden angesehen worden sind. Bei nicht zu hohem Druck ist der durchschnittliche Abstand zwischen den Molekülen eines Gases so groß, daß diese Wechselwirkungen nur äußerst wenig in Erscheinung treten. Bei hohem Druck, also kleinen durchschnittlichen Molekülabständen, ist dies aber der Fall. Abweichungen vom idealen Gaszustand treten ferner ein, wenn das Eigenvolumen der Moleküle nicht mehr gegenüber dem Volumen des Gasraums vernachlässigt werden kann (große Dichte). In den folgenden Paragraphen setzen wir stets voraus, daß wir es mit idealen Gasen zu tun haben.

102. Gase unter der Wirkung der Schwerkraft. Bei den Flüssigkeiten können wir, wegen ihrer sehr geringen Zusammendrückbarkeit, fast stets davon absehen, daß ihre Dichte unter der Wirkung des mit der Tiefe zunehmenden Druckes sich ändert. Bei den Gasen ist dies oft nicht mehr erlaubt. Wir betrachten in einem der Schwerkraft unterworfenen Gase, etwa in der atmosphärischen Luft, zwei zur Richtung der Schwerkraft senkrechte Ebenen von sehr kleinem Abstande dx (Abb. 92). Die positive Richtung von x sei nach oben gerichtet, so daß p mit wachsendem x abnimmt. In der Höhe x betrage der Druck p, in der Höhe $x + dx$ betrage er $p + dp$. Dann ist

Abb. 92. Zur Ableitung der Druckformel der Gase.

$$dp = -\sigma dx \text{ g*/cm}^2 = -\varrho g dx \text{ dyn/cm}^2,$$

wenn σ das spezifische Gewicht bzw. ϱ die Dichte des Gases an jener Stelle und g die Schwerebeschleunigung bedeutet (vgl. § 87). Nun ist nach Gl. 8, § 97, die Dichte eines Gases bei konstanter Temperatur seinem Druck proportional. Es sei p_0 der Druck, ϱ_0 die Dichte des Gases im Niveau $x = 0$. Dann ist $\varrho = \varrho_0 \cdot p/p_0$, so daß $dp = -\varrho_0 g p/p_0 \cdot dx$. Die Lösung dieser Gleichung lautet

$$p = p_0 e^{-\frac{\varrho_0 g}{p_0} x} = p_0 e^{-\beta x} \text{ dyn/cm}^2 \tag{15}$$

wobei $\beta = \varrho_0 g/p_0$. Dies ist die sog. barometrische Höhenformel.

Die Gl. 15 gilt im Gleichgewichtszustand nur für ein einheitliches, d. h. überall gleichmäßig zusammengesetztes Gas. Bei einer Mischung verschiedener Gase gilt im Gleichgewichtszustand die Gl. 15 für die Partialdrucke der einzelnen Gase, und es ist für jedes derselben der für das betreffende Gas zutreffende Wert von β einzusetzen. Der Gesamtdruck ergibt sich dann als die Summe der Partialdrucke.

103. Der Luftdruck. Von besonderem Interesse und von großer Bedeutung für viele auf der Erdoberfläche stattfindenden Vorgänge ist der Druck der irdischen Atmosphäre, der Luftdruck. Er ist zuerst von TORRICELLI (1643) gemessen worden, und zwar durch folgenden Versuch. Man fülle eine am einen Ende zugeschmolzene Glasröhre von etwa 1 m Länge ganz mit gut gereinigtem und getrocknetem Quecksilber, verschließe sie mit dem Daumen und stelle sie mit dem offenen Ende in eine Schale mit Quecksilber. Hebt man jetzt den Daumen ab, so fließt ein Teil des Quecksilbers aus, und über dem Quecksilber entsteht im Rohr ein leerer Raum. Die Höhe der im Rohr verbleibenden Quecksilbersäule beträgt etwa 760 mm, je nach dem äußeren Luftdruck (Abb. 93). Neigt man das Rohr, so steigt das Quecksilber in ihm in die Höhe, so daß der senkrechte Abstand der Quecksilberkuppe im Rohr von der Ebene des Quecksilbers in der Schale stets der gleiche bleibt. (Neigt man das Rohr so weit, daß das Quecksilber an das geschlossene Rohrende anschlägt, so geschieht dies mit einem Knall, ein Beweis dafür, daß die Röhre oben gut luftleer ist.)

Dieser Versuch beweist das Vorhandensein des Luftdrucks. Denn nach § 93 ist in einem horizontalen Niveau einer zusammenhängenden ruhenden Flüssigkeitsmenge der Druck überall der gleiche. Er ist also innerhalb des Rohres in der durch die äußere Quecksilberoberfläche gebildeten Ebene ebenso groß wie in dieser Fläche selbst. Auf die äußere Quecksilberoberfläche wirkt der Luftdruck p, auf das im gleichen Niveau befindliche Flächenstück im Rohr der Druck der darüber befindlichen Quecksilbersäule. Ein Quecksilbervolumen von 1 qcm Querschnitt und 76 cm Länge hat die Masse (Dichte des Quecksilbers 13,6) $76 \cdot 13{,}6 = 1033\,g = 1{,}033\,kg$. Die Kraft, die diese Masse unter der Wirkung der Schwere ausübt, ist (§ 55) $1033 \cdot 981$ dyn $= 1013300$ dyn. Der Druck von 1 Atm. ist also rund gleich 1 Million dyn/cm^2 oder etwas mehr als 1 kg*/qcm. Demnach beträgt das Gewicht der über 1 qcm der Erdoberfläche liegenden Luft rund 1 kg*. Der Druck der Atmosphäre ist so groß, wie wenn er durch eine 10 m hohe Wasserschicht hervorgerufen wäre.

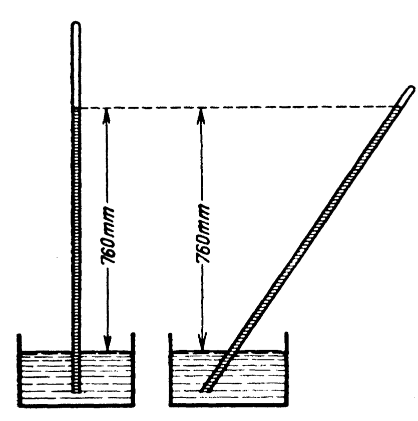


Abb. 93. Versuch von TORRICELLI.

Die Konstante β der Gl. 15 ergibt sich für die atmosphärische Luft, wenn wir die Höhe x in Metern ausdrücken, bei 0° zu $^1/_{7800}$. p_0 ist der Luftdruck im Meeresniveau.

Wie man sieht, sind die Luftdruckunterschiede bei kleinen Höhenunterschieden sehr gering. Für $x = 4$ m beträgt die Druckabnahme rund $^1/_{2000}$. Doch lassen sich auch solche kleinen Druckdifferenzen mit empfindlichen Instrumenten (Luftdruckvariometern) schon auf Strecken von Bruchteilen eines Meters nachweisen. Bei größeren Höhenunterschieden sind die Druckdifferenzen aber sehr beträchtlich. So beträgt in 8 km Höhe der Luftdruck nur noch rund $^1/_4$ des Druckes im Meeresniveau. Die Abhängigkeit des Luftdrucks von der Höhe ist ein wichtiges Mittel

Tabelle 4. Luftdruck in verschiedenen Höhen bei 0° C.

Höhe in m	Druck in mm Hg
0 (Meeresniveau)	760
500	714
1000	671
2000	592
4000	461

zur Höhenmessung in Gebirgen (barometrische Höhenmessung). Aus Gl. 15 ergibt sich mit $\beta = {}^1/_{7800}$ und bei Benutzung BRIGGscher Logarithmen

$$x = 18400 \overset{10}{\log} \frac{p_0}{p} \text{ m} .$$

Hieran ist noch eine kleine Korrektion wegen der Temperatur anzubringen, von der wir aber hier absehen. Die Tabelle 4 gibt den Luftdruck in den verschiedenen Höhen der Atmosphäre.

Da die genaueste Methode zur Messung des Luftdrucks, diejenige mit dem Barometer, auf dem Versuch von TORRICELLI beruht, nämlich auf der Messung der Länge einer Quecksilbersäule, so drückt man den Luftdruck und überhaupt Gasdrucke in der Regel in „mm Quecksilber" (mm Hg oder auch kurz mm) aus. Ein Druck von 760 mm Hg heißt auch 1 Atmosphäre (1 Atm.). In der Technik versteht man unter 1 Atmosphäre (wenn abgek. 1 at) einen Druck von 1 kg*/cm², während 1 Atm. = 1,033 kg*/cm² beträgt. Für die Einheit des Druckes im CGS-System, 1 dyn/cm², ist auch die Bezeichnung 1 bar gebräuchlich. Davon abgeleitet sind 1 Kilobar = 10^3 dyn/cm² und 1 Megabar = 10^6 dyn/cm². Es ist 1 Megabar = 1,019 kg*/cm² = 750,06 mm Hg. also nahezu gleich 1 Atm. (In der Meteorologie jedoch ist die Bezeichnung 10^6 dyn/cm² = 1 bar und 10^3 dyn/cm² = 1 Millibar gebräuchlich. Vgl. § 204.)

Die atmosphärische Luft besteht in ihren unteren Schichten aus 78 % Stickstoff, 21 % Sauerstoff und einem Rest, der zum größten Teil aus dem Edelgas Argon besteht (Volumprozente). Näheres über die Erdatmosphäre, insbesondere ihre Zusammensetzung, s. § 204.

104. **Wirkungen des Luftdrucks.** Die bekannte Tatsache, daß der Druck in den Gasleitungen scheinbar (tatsächlich nur der Überdruck über den Luftdruck) in höheren Stockwerken — im Gegensatz zum Druck in den Wasserleitungen — größer ist als in tieferen, beruht auch auf der Abnahme des Gasdrucks mit der Höhe. Es seien A und B (Abb. 94) zwei Öffnungen in einer vertikalen Gasleitung. Außen ist Luft. Bei den kleinen in Frage kommenden Höhenunterschieden sehen wir von der Änderung der Dichte mit der Höhe ab. Es sei σ_1 das spezifische Gewicht der Luft, σ_2 dasjenige des Gases, der Höhenunterschied zwischen A und B sei x. Der Luftdruck in A sei p_1; der Luftdruck in B ist dann gleich $p_1 - \sigma_1 x$. Entsprechend sei der Gasdruck in A gleich p_2, der in B demnach gleich $p_2 - \sigma_2 x$. Der Überdruck des Gases in A ist dann gleich $p_2 - p_1$, in B gleich $(p_2 - \sigma_2 x) - (p_1 - \sigma_1 x) = p_2 - p_1 + (\sigma_1 - \sigma_2) \cdot x$. Er ist daher, da $\sigma_1 > \sigma_2$, in B größer als in A.

Abb. 94. Zur Theorie des Überdrucks in Gasleitungen.

Diese Tatsache läßt sich gut mit der BEHNschen Röhre (Abb. 95) zeigen. Es ist dies ein Rohr mit zwei feinen Öffnungen, in welches Leuchtgas geleitet wird, das an den beiden Öffnungen entzündet wird. Bei horizontaler Lage brennen beide Flammen gleich hoch. Eine ganz geringe Neigung genügt, damit die eine, obere, Flamme erheblich größer und die andere erheblich kleiner wird. Damit eine starke Wirkung eintritt, muß der Gasdruck im Rohr durch geringes Öffnen des Gashahnes so niedrig gehalten werden, daß er nur wenig größer ist als der Luftdruck (Vorsicht vor Explosionen!).

Ähnliche Verhältnisse wie bei einer Gasleitung liegen bei dem Kamin eines Ofens vor. Der Kamin ist mit warmer Luft gefüllt, die eine kleinere Dichte hat als kalte Luft. An der oberen Öffnung des Kamins herrscht, wenn der Kamin weit und der Ofen unten nahezu geschlossen ist, Atmosphärendruck. Da der Druck in der warmen Luft im Kamin nach unten zu weniger schnell zunimmt als in der äußeren Luft, so herrscht unten im

Ofen ein geringerer Druck als außen vor dem Ofen. Die äußere Luft wird daher in den Ofen gedrückt und bewirkt den „Zug“ im Ofen und die nötige Sauerstoffzufuhr zur Verbrennung. Ein Ofen „zieht“ daher erst dann gut, wenn er einige Zeit gebrannt hat, also der Kamin mit warmer Luft gefüllt ist. Je höher der Kamin ist, desto größer ist die Druckdifferenz in ihm und um so kräftiger zieht er. Deshalb gibt man Fabrikschornsteinen eine so große Höhe.

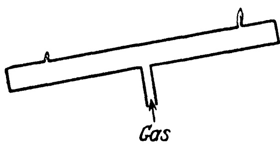
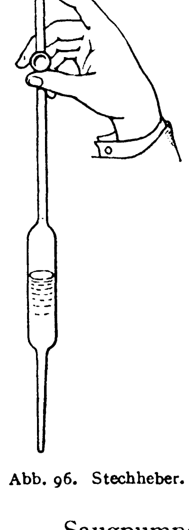
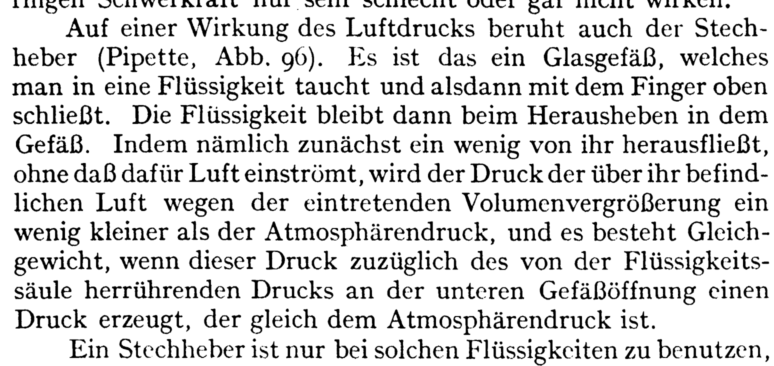


Abb. 95. BEHNsche Röhre.

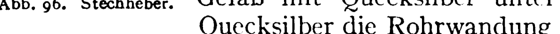
Es ist bemerkenswert, daß alle diese Erscheinungen ohne die Wirkung der Schwerkraft nicht stattfinden würden. Ein auf der Erde gut wirkender Kamin würde also z. B. auf dem Monde unter sonst gleichen Bedingungen wegen der geringen Schwerkraft nur sehr schlecht oder gar nicht wirken.


Abb. 96. Stechheber.



Auf einer Wirkung des Luftdrucks beruht auch der Stechheber (Pipette, Abb. 96). Es ist das ein Glasgefäß, welches man in eine Flüssigkeit taucht und alsdann mit dem Finger oben schließt. Die Flüssigkeit bleibt dann beim Herausheben in dem Gefäß. Indem nämlich zunächst ein wenig von ihr herausfließt, ohne daß dafür Luft einströmt, wird der Druck der über ihr befindlichen Luft wegen der eintretenden Volumenvergrößerung ein wenig kleiner als der Atmosphärendruck, und es besteht Gleichgewicht, wenn dieser Druck zuzüglich des von der Flüssigkeitssäule herrührenden Drucks an der unteren Gefäßöffnung einen Druck erzeugt, der gleich dem Atmosphärendruck ist.

Ein Stechheber ist nur bei solchen Flüssigkeiten zu benutzen, die die Wand des Hebers benetzen, also an ihr haften (§ 93). Andernfalls dringt zwischen Wandung und Flüssigkeit Luft in das Innere des Hebers, und die Flüssigkeit fließt aus. Man könnte den TORRICELLIschen Versuch (§ 103) anstellen, ohne ein Gefäß mit Quecksilber unter das Glasrohr zu setzen, wenn Quecksilber die Rohrwandung benetzte.



Saugpumpen können Wasser nicht höher als etwa 10 m heben. Denn die Hebung ist eine Wirkung des äußeren Luftdrucks, und dieser kann einer Wassersäule von mehr als 10 m nicht das Gleichgewicht halten.

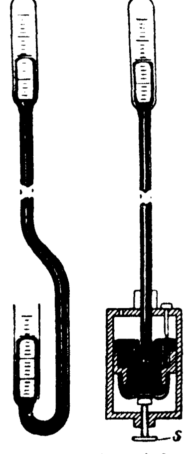
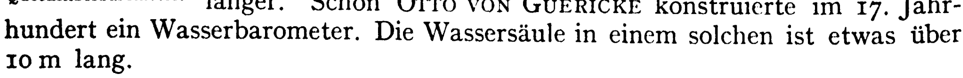


Abb. 97. Verschiedene Quecksilberbarometer.

105. Messung von Gasdrucken. Die Messung des Luftdrucks mittels des Quecksilberbarometers beruht auf dem TORRICELLIschen Versuch (§ 103), nämlich auf der Messung der Länge einer Quecksilbersäule, deren Druck dem Luftdruck das Gleichgewicht hält. In Abb. 97 sind zwei Ausführungsformen von Quecksilberbarometern dargestellt.

Die Ablesungen an einem Quecksilberbarometer bedürfen meist noch einer Korrektion, weil erstens das spezifische Gewicht des Quecksilbers und daher die Länge der Quecksilbersäule von der Temperatur abhängt, und zweitens auch die Länge der meist aus Messing bestehenden Skala, an der die Länge der Säule abgelesen wird, sich mit der Temperatur ändert.

Quecksilber ist wegen seines hohen spezifischen Gewichts und wegen seines geringen Dampfdrucks (§ 180) als Barometerfüllung besonders geeignet. Man kann aber auch andere Flüssigkeiten nehmen, doch sind dann die Säulen entsprechend länger. Schon OTTO VON GUERICKE konstruierte im 17. Jahrhundert ein Wasserbarometer. Die Wassersäule in einem solchen ist etwas über 10 m lang.



Für weniger genaue Messungen benutzt man meistens die Aneroidbarometer (Abb. 98). Ihr Hauptteil ist eine luftdicht verschlossene Metallkapsel D mit biegsamen Wänden. Diese biegen sich auseinander oder zusammen, je nachdem der äußere Luftdruck größer oder kleiner ist als der Druck der in der Kapsel eingeschlossenen Luft. Die Verbiegung der Wände wird durch einen Hebelmechanismus auf einen Zeiger S übertragen, der auf einer Skala den Luftdruck unmittelbar abzulesen gestattet.

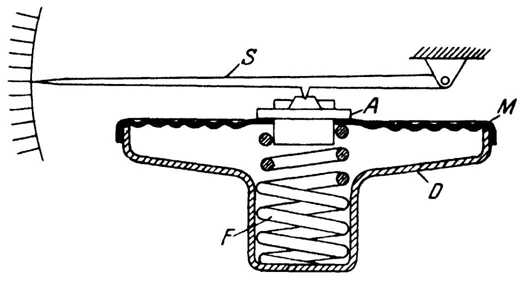


Abb. 98. Aneroidbarometer. D Metallkapsel, F Feder, M Metallmembran, A Lager, S Zeiger.

Eine weitere Methode zur Luftdruckmessung s. § 181.

Für kleine Gasdrucke (etwa 5—50 mm Hg) benutzt man abgekürzte Quecksilberbarometer (Abb. 99), weil solche in den zum Teil luftleer gemachten Gefäßen leichter unterzubringen oder unmittelbar mit ihnen zu verbinden sind und oft nur die Ablesung kleinerer Drucke Interesse hat. Bei sehr kleinen Drucken wird die Ablesung der Höhendifferenz von Quecksilbermenisken zu ungenau und schließlich bei Drucken unter etwa 1 mm unmöglich. Man bedient sich zum Messen solcher kleiner Drucke des MacLeodschen Manometers (Abb. 100). Seine Wirkung besteht darin, daß ein wenig des Gases, dessen Druck man messen will, abgesondert und auf einen bestimmten Bruchteil seines Volumens zusammengedrückt wird, und zwar so weit, daß dabei sein Druck bis zu einer leicht meßbaren Größe steigt. Beträgt z. B. der Druck des Gases $^1/_{1000}$ mm, und wird es auf $^1/_{10000}$ seines ursprünglichen Volumens komprimiert, so steigt dabei nach Gl. 10, § 98, sein Druck auf 10 mm, ist also als Differenz zweier Quecksilberhöhen gut meßbar. Das MacLeodsche Manometer ist durch das Rohr C mit dem Raum, in dem sich das auf seinen Druck zu untersuchende Gas befindet, verbunden. B ist ein mit Quecksilber gefülltes Gefäß, das durch einen starkwandigen Schlauch mit dem Manometer verbunden ist. Im Steigrohr A des Manometers (unterbrochen gezeichnet, es ist etwa 80 cm lang) steht zunächst das Quecksilber um so viel höher, wie es der Druckdifferenz (rund 760 mm) zwischen dem Innern des Manometers und der äußeren Luft entspricht. Hebt man das Gefäß B an, so hebt sich gleichzeitig das Quecksilber im Manometer und schließt das Gefäß D gegen den übrigen Gasraum ab. Bei weiterem Heben wird das in diesem Gefäß befindliche Gas zusammengedrückt und in das enge Rohr a bis E hineingedrückt. Eine Strichmarke zeigt an, bis zu welcher Höhe das Quecksilber gehoben werden muß, damit das abgeschlossene Gas bis auf $^1/_{100}$ oder $^1/_{1000}$ oder $^1/_{10000}$ seines ursprünglichen Volumens zusammengedrückt ist. Den Druck, den das Gas nunmehr hat, kann man aus der Differenz b der Quecksilberniveaus in den Röhren a und C ablesen. (Der sehr niedrige Druck in C kann dabei vernachlässigt werden.) Der Druck des Gases vor der

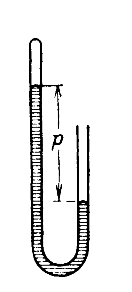


Abb. 99. Abgekürztes Quecksilberbarometer. Die Öffnung ist mit dem Raum verbunden zu denken, in dem der Druck gemessen werden soll.

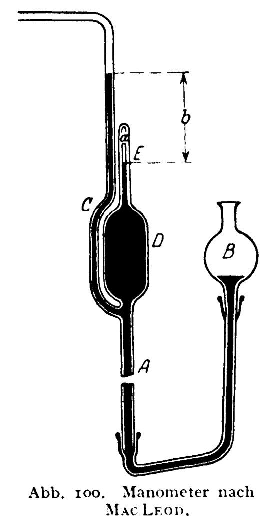


Abb. 100. Manometer nach MacLeod.

Zusammendrückung war dann $^1/_{100}$ bzw. $^1/_{1000}$ bzw. $^1/_{10000}$ dieses Druckes. Mittels derartiger Manometer können noch Drucke bis zu etwa $^1/_{10000}$ mm Hg gut gemessen werden. Das Verfahren ist aber nur auf nahezu ideale Gase anwendbar.

106. Luftpumpen. Luftpumpen dienen dazu, den Druck der Luft oder auch anderer Gase in einem Gefäß zu verändern. Für die Physik sind diejenigen Pumpen besonders wichtig, die zur Herstellung kleiner Drucke dienen. Ein von jeder Substanz freier Raum heißt ein Vakuum. Doch versteht man darunter auch oft einen nur sehr weitgehend von allen Gasen entleerten Raum und spricht wohl von schlechtem und gutem Vakuum (Hochvakuum). Das Entfernen der Luft oder anderer Gase aus einem Raum bezeichnet man als evakuieren, die dazu dienenden Pumpen als Vakuumpumpen.

Die einfachste Form einer Vakuumpumpe ist die sog. Stiefelpumpe. Die erste derartige Luftpumpe wurde von dem während des Dreißigjährigen Krieges lebenden Bürgermeister von Magdeburg Otto von Guericke konstruiert (Original im Deutschen Museum in München). Luftpumpen dieser Konstruktion kommen im modernen Laboratoriumsbetrieb nicht mehr in Betracht.

Eine bequeme und viel verwendete Luftpumpe ist die Wasserstrahlpumpe von Bunsen (Abb. 101). Von der Wasserleitung her strömt Wasser unter Druck in ein sich konisch verengerndes Rohr, aus dessen Düse es in einem kurzen Strahl wieder in ein weiteres Rohr übergeht, an dessen unterem Ende es austritt. Infolge der Querschnittsverengerung im konischen Rohrteil, zum Teil auch noch infolge der weiteren Einschnürung des Strahles nach dem Austritt aus der Düse, hat das Wasser in der Umgebung der Düse einen sehr niedrigen Druck. (Zum genaueren Verständnis vgl. § 110.) Infolgedessen reißt es die umgebende Luft mit sich. Die Pumpe ist durch ein Seitenrohr mit dem zu evakuierenden Raum verbunden, aus dem infolge der Luftverdünnung in der Pumpe die Luft angesaugt wird. Da der Innenraum der Pumpe stets mit gesättigtem Wasserdampf (§ 180) gefüllt ist, so ist die Grenze der Saugwirkung durch dessen Druck (bei Zimmertemperatur 10—20 mm Hg) gegeben. In der Hauptsache dient die Wasserstrahlpumpe als Vorpumpe für Hochvakuumpumpen.

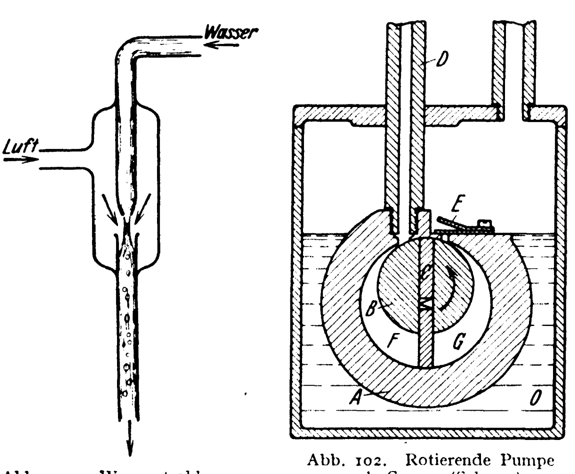


Abb. 101. Wasserstrahlpumpe.

Abb. 102. Rotierende Pumpe nach Gaede (Schema).

Zur Erzeugung von Gasdrucken bis hinunter zu etwa 0,2 mm Hg benutzt man heute durchweg die von Gaede erfundenen rotierenden Pumpen, deren Schema aus Abb. 102 ersichtlich ist. In einem durch Öl *O* abgedichteten zylindrisch ausgebohrten Metallkörper *A* befindet sich ein exzentrischer Zylinder *B*, der um seine Achse rotiert. Der Zylinder besitzt zwei Schieber *C*, die durch eine Feder gasdicht gegen die Wand der Bohrung von *A* gepreßt werden. Von dieser führt ein Rohr *D* nach dem zu evakuierenden Raum und ein nach außen schlagendes Ventil *E* nach außen. Bei der Rotation wird in den sich vergrößernden Raumteil *F* der Bohrung Luft aus *D* angesaugt und der sich verkleinernde Raumteil *G*

durch E nach außen entleert. Nach jeder halben Umdrehung wiederholt sich das Spiel, und das an D angeschlossene Gefäß wird entleert.

Um tiefere Drucke zu erzielen, als sie mit der rotierenden Pumpe erzielt werden können, bedient man sich (nach Vorpumpen mit der rotierenden Pumpe) der Quecksilberdampfstrahlpumpe, die auf dem gleichen Prinzip beruht wie die Wasserstrahlpumpe, und der Quecksilberdiffusionspumpe. Auf eine Besprechung dieser Pumpen muß hier verzichtet werden. Die niedrigsten Drucke erzielt man, indem man nach Verwendung der vorbezeichneten Pumpen die noch vorhandenen Gasreste in Kohle, die durch flüssige Luft oder flüssigen Wasserstoff gekühlt wird, absorbiert (§ 191).

Schon OTTO VON GUERICKE hat eine größere Anzahl von Versuchen mit der Luftpumpe beschrieben. Besonders bekannt ist der Versuch mit den „Magdeburger Halbkugeln", den er 1654 auf dem Reichstage zu Regensburg vorführte. Es waren dies zwei große Halbkugeln aus Kupfer (Original im Deutschen Museum in München), welche dicht schließend aufeinandergesetzt werden konnten, und deren Innenraum dann mit einer Luftpumpe ausgepumpt wurde. Ist dies in ausreichendem Maße geschehen, so werden die beiden Halbkugeln durch den äußeren Luftdruck, dem jetzt nicht mehr durch den Druck der vorher innerhalb der Halbkugel vorhandenen Luft das Gleichgewicht gehalten wird, mit großer Kraft aneinandergepreßt. OTTO VON GUERICKE ließ an jede Halbkugel 8 Pferde spannen und zeigte, daß diese nicht imstande waren, sie auseinanderzureißen. Der Versuch läßt sich leicht mit zwei kleineren, gut gearbeiteten Halbkugeln nachahmen. Nur ist dann die Kraft, mit welcher die Halbkugeln zusammengepreßt sind, entsprechend kleiner, denn sie ist dem Querschnitt proportional. Immerhin beträgt sie bei kreisförmigem Querschnitt von 5 cm Radius, also einer Fläche von rund 80 qcm, etwa 80 kg*, da auf jedes Quadratzentimeter eine Kraft von rund 1 kg* entfällt.

Besonders eindrucksvoll läßt sich die Verdünnung eines Gases mittels einer Luftpumpe durch die Beobachtung elektrischer Entladungen in dem Gase zeigen (§ 290).

107. **Auftrieb in Gasen.** Genau wie in Flüssigkeiten erfahren auch in Gasen die Körper einen Auftrieb, und ebenso wie in jenen ist der Gewichtsverlust in diesen gleich dem Gewicht der verdrängten Gasmenge (§ 89). Da dieses Gewicht sehr klein ist, so ist auch der Auftrieb gering und in den meisten Fällen zu vernachlässigen (in Luft rund 1,2 g* auf ein Volumen von 1000 ccm). Bei genauen absoluten Wägungen (§ 76) ist er jedoch in Rechnung zu setzen. Da in den meisten Fällen die Gewichtsstücke aus Messing, der zu wägende Körper aber aus einer andern Substanz besteht, so sind die Volumina des Körpers und der Gewichtsstücke und daher ihre Auftriebe nicht gleich. Kennt man das spezifische Gewicht des Körpers, so kann man die erforderliche Korrektion an den Wägungen durch eine einfache Rechnung ermitteln. Es sei k_1 das wahre Gewicht, V_1 das Volumen und σ_1 das spezifische Gewicht des zu wägenden Körpers, k_2 das wahre Gewicht der zum Ausgleich der Wage aufgelegten Gewichtsstücke, V_2 ihr Volumen, σ_2 ihr spezifisches Gewicht, σ das spezifische Gewicht der Luft. Dann ist im allgemeinen k_1 nicht gleich k_2, sondern es gilt, wegen des Auftriebes, und da $V_1 = k_1/\sigma_1$, $V_2 = k_2/\sigma_2$,

$$k_1 - V_1\sigma = k_2 - V_2\sigma \quad \text{oder} \quad k_1 = k_2 \frac{1 - \frac{\sigma}{\sigma_2}}{1 - \frac{\sigma}{\sigma_1}}.$$

Die Gewichtsstücke bestehen fast stets aus Messing ($\sigma_2 = 8{,}4$). Für σ genügt

der angenäherte Wert 0,0012. Wegen der Kleinheit von σ kann man auch schreiben

$$k_1 = k_2\left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_2} + \frac{\sigma}{\sigma_1}\right) = k_2\left(1 - 0{,}000143 + \frac{0{,}0012}{\sigma_1}\right).$$

Man bezeichnet diese Berechnung als die Reduktion einer Wägung auf den luftleeren Raum.

Den Auftrieb in Luft zeigt sehr schön ein schon von OTTO VON GUERICKE angestellter Versuch. An einer kleinen, gleicharmigen Wage (aerostatische Wage) sind zwei Körper von in Luft scheinbar gleichem Gewicht, aber von verschiedenem Volumen (etwa eine Messingkugel und eine hohle Glaskugel) angebracht. Tatsächlich muß die Glaskugel schwerer sein, denn sie erfährt in Luft einen größeren Auftrieb als die Messingkugel. Bringt man die Wage in einem evakuierbaren Raum und evakuiert, so sinkt bei abnehmendem Druck die Glaskugel herunter, weil der Auftrieb jetzt geringer wird.

Auf dem Auftrieb in der Luft beruhen die Luftballons und Luftschiffe. Diese sind infolge ihrer Konstruktion, da der größte Teil ihres Volumens mit den sehr leichten Gasen Wasserstoff, Leuchtgas oder Helium gefüllt ist, leichter als die Luft am Erdboden. Sie steigen bis in diejenige Höhe, in welcher die Luftdichte so gering ist, daß das spezifische Gewicht der Luft gleich dem durchschnittlichen spezifischen Gewicht des Luftfahrzeugs ist.

Leichtere Gase erfahren in schwereren einen Auftrieb. Wasserstoff und Leuchtgas steigen in Luft hoch, Kohlensäure und Kohlenoxyd sinken zu Boden. Denn jedes System von Körpern strebt dem Zustande kleinster potentieller Energie zu. Aus diesem Grunde steigt auch warme Luft in kälterer auf, denn jene ist bei gleichem Druck spezifisch leichter als diese. Auf dieser Tatsache beruhen zum großen Teil die meteorologischen Erscheinungen (§ 204 ff.). Der Auftrieb ist eine Wirkung der Schwerkraft und würde an einem schwerkraftfreien Orte nicht auftreten. An einem solchen würde daher auch eine Kerze nicht brennen, denn hierzu ist es nötig, daß die entstehenden heißen Verbrennungsgase fortwährend durch den Auftrieb in der Luft entfernt und durch nachströmende Luft (Sauerstoff) ersetzt werden. Andernfalls erstickt eine Flamme in ihren eigenen Verbrennungsgasen.

Es ist lehrreich, sich den Mechanismus des Auftriebs in den Flüssigkeiten und Gasen seinem Wesen nach klarzumachen. Wir wollen daneben auch noch folgenden ganz groben „Auftriebs"-Versuch betrachten. Bringt man in ein mit kleinen Stahlkugeln (Kugellagerkugeln) gefülltes Gefäß zwischen diese Kugeln eine größere Holzkugel und eine Bleikugel und schüttelt das Gefäß ein wenig hin und her, so steigt die Holzkugel an die Oberfläche und „schwimmt" auf ihr, wie Kork auf Wasser, die Bleikugel sinkt zu Boden. Wir wollen zuerst diesen Versuch erklären. Wären die Kugeln vollkommen reibungslos, so daß sie ohne jeglichen Kraftaufwand aneinander vorbeigleiten könnten, so wäre es gar nicht nötig, das Gefäß zu schütteln, um das Steigen der Holzkugel, das Sinken der Bleikugel, hervorzurufen. Dieser Zustand würde von selbst eintreten als der Zustand kleinster potentieller Energie, also der stabile Gleichgewichtszustand des ganzen Kugelsystems. Das leichte Schütteln dient lediglich dazu, den Kugeln den zur Umlagerung erforderlichen Grad von Bewegungsfreiheit zu geben. Natürlich erleidet auch die Bleikugel innerhalb der Stahlkugeln einen „Auftrieb", denn wegen des Gewichts der über ihnen liegenden Stahlkugeln drücken die unter der Bleikugel befindlichen Stahlkugeln etwas stärker gegen sie als die über ihr liegenden. Dieser Fall ist also vollkommen durchsichtig. Wir betrachten jetzt den ebenso durchsichtigen Fall des Auftriebs in Gasen. Er scheint zunächst ganz ähnlich zu liegen, nämlich als hätten wir nur an die Stelle

der Stahlkugeln die Gasmoleküle zu setzen, statt des Schüttelns die Molekularbewegung. Aber die Dinge liegen hier doch erheblich anders. Der Druck auf einen im Gase befindlichen Körper rührt nicht, wie bei den Stahlkugeln, von einer dauernden körperlichen Berührung mit den Gasmolekülen her, sondern von den Stößen, die die Moleküle auf seine Oberfläche ausüben (§ 97). Die Intensität dieser Stöße ist in allen Teilen des Gases, gleiche Temperatur vorausgesetzt, die gleiche. Der Unterschied des Drucks in den verschiedenen Niveaus, die den Auftrieb hervorruft, hat seine Ursache darin, daß die Dichte des Gases und daher die Zahl der Moleküle, also auch die Zahl der Stöße, mit der Tiefe zunimmt. Es treffen also in 1 sec mehr Moleküle einen im Gase befindlichen Körper von unten her als von oben. Betrachten wir der Einfachheit halber wieder einen zylindrischen Körper vom Querschnitt q, dessen oberes und unteres Niveau durch die Indizes 1 und 2 bezeichnet werden. Dann wirkt auf ihn nach Gl. 6, § 97, der Auftrieb

$$k = q\,(p_2 - p_1) = q\,\tfrac{1}{3}\,\mu v^2\,(n_2 - n_1)\,.$$

(n_1 bzw. n_2 = Zahl der Moleküle in 1 ccm). Betrachten wir ein Gas, welches sich in einem geschlossenen Gefäß befindet, so könnte es zunächst scheinen, als hänge der Auftrieb in dem Gase von der Molekulargeschwindigkeit v ab, die ihrerseits wieder von der Temperatur abhängt (§ 156). Denn die Zahl der Moleküle im Gefäß ändert sich ja bei einer Temperaturerhöhung nicht. Wohl aber ändert sich dabei die Differenz der Molekülzahlen $n_2 - n_1$, in zwei verschiedenen Niveaus. Das läßt sich auch ohne weiteres wenigstens qualitativ verstehen. Je höher die Temperatur ist, um so heftiger ist die thermische Bewegung der Moleküle, um so größer ihre Geschwindigkeit v. Die ungeordnete Bewegung der Moleküle sucht diese im Durchschnitt gleichmäßig im ganzen verfügbaren Raum zu verteilen, die Schwere sucht sie sämtlich in ein möglichst tiefes Niveau zu ziehen, also eine ungleichmäßige Dichteverteilung herzustellen. Je heftiger die Molekularbewegung ist, desto wirksamer tritt sie der Wirkung der Schwere entgegen und um so gleichmäßiger sind die Moleküle im Gefäß verteilt. Es läßt sich ohne Schwierigkeit ableiten, daß $n_2 - n_1$ und v^2 einander umgekehrt proportional sind, und daß unser Ausdruck für k mit der Auftriebsgleichung 3, § 89, vollkommen identisch ist. (Eine grobe Analogie zu dieser Wirkung der Molekularbewegung ist die Verteilung eines Bodensatzes in einer Flüssigkeit beim Umrühren.)

Der Auftrieb in Flüssigkeiten ist ein in seinen Einzelheiten sehr komplizierter Vorgang. Auch er beruht, wie bei den Gasen, unmittelbar auf der Wirkung der Stöße der Flüssigkeitsmoleküle. Wegen der sehr geringen Zusammendrückbarkeit der Flüssigkeiten sind diese Moleküle aber an der unteren Fläche eines eingetauchten Körpers nur unwesentlich dichter vorhanden, als an der oberen Fläche. Jedoch bewirkt der Druck des Körpers eine Vermehrung der Zahl der Stöße des einzelnen Moleküls gegen seine untere Fläche, und dies erzeugt den Auftrieb in der Flüssigkeit.

Dieses Beispiel ist so ausführlich erörtert worden, um einmal zu zeigen, daß man sich sehr davor hüten muß, bei einem äußerlich gleichartigen Verhalten sofort auf Gleichheit des zugrunde liegenden Mechanismus zu schließen. In sehr zahlreichen derartigen Fällen liegt nichts anderes vor als eine Analogie, und Analogien sind keine dem wirklichen Verständnis dienenden Erklärungen.

11. Kapitel.

Mechanik bewegter Flüssigkeiten und Gase.

108. Allgemeines über bewegte Flüssigkeiten und Gase. Die Gesetze bewegter Flüssigkeiten und Gase können unter einem einheitlichen Gesichtspunkt behandelt werden, solange die auftretenden Volumänderungen so klein sind, daß man sie vernachlässigen kann. Bei den Flüssigkeiten ist das wegen ihrer geringen Zusammendrückbarkeit stets der Fall. Läßt man bei den Gasen Volumänderungen bis zu 1% zu, ohne sie zu berücksichtigen, so gelten z. B. für atmosphärische Luft die gleichen Gesetze wie für Flüssigkeiten, solange die Strömungsgeschwindigkeiten den Betrag von etwa 50 m/sec und die vorkommenden Höhenunterschiede den Betrag von etwa 100 m nicht überschreiten. Das trifft in allen normalen Fällen zu. Wir werden daher unter dem Begriff „Flüssigkeit" auch die Gase mit verstehen.

Man bezeichnet die Lehre von den strömenden Flüssigkeiten als Hydrodynamik, in der Anwendung auf Gase auch als Aerodynamik. Bei eindimensionalen Problemen, wie bei der Strömung durch Röhren, spricht man auch von Hydraulik. Wir wollen uns im folgenden auf den Fall stationärer Strömungen beschränken, d. h. solcher Strömungen, bei denen die Richtung und Geschwindigkeit der strömenden Teilchen an jedem festen Ort innerhalb der Strömung zeitlich konstant ist.

Unter den Stromlinien in einer Flüssigkeit verstehen wir Linien, die überall in Richtung der örtlichen Strömung verlaufen. Eine Stromlinie ist also bei stationärer Strömung das Bild der Bahn eines bewegten Flüssigkeitsteilchens. Die durch alle Punkte einer kleinen geschlossenen Kurve gezeichneten Stromlinien bilden eine Stromröhre. Die innerhalb der Stromröhre bewegte Flüssigkeit nennt man einen Stromfaden. Da nirgends aus einer Stromröhre seitlich Flüssigkeit austritt und sich nirgends ständig Flüssigkeit anhäuft, so fließt in der Zeiteinheit durch jeden Querschnitt einer Stromröhre die gleiche Flüssigkeitsmenge (sog. Kontinuitätsbedingung).

Demnach kann eine Stromröhre nirgends innerhalb der Flüssigkeit Anfang oder Ende haben. Entweder beginnt sie an der Begrenzung der Flüssigkeit und verläuft nach einer anderen Stelle der Begrenzung oder sie ist in sich geschlossen, sie bildet einen Wirbel. Man unterscheidet danach wirbelfreie Strömungsfelder und Wirbelfelder. (Vgl. die Übertragung dieser Begriffe auf elektrische und magnetische Felder, § 328 und 349.)

Die in der Zeiteinheit durch jeden Querschnitt q strömende Flüssigkeitsmenge ist dem Querschnitt und der Geschwindigkeit v in diesem proportional. Also ist nach der Kontinuitätsbedingung innerhalb einer Stromröhre

$$q v = \text{const.} \tag{1}$$

Dem entspricht die einfache Tatsache, daß in einem Rohr die Flüssigkeit an den engsten Stellen am schnellsten strömt.

Alle Flüssigkeiten zeigen eine sog. innere Reibung (§ 113), die die Strömungsverhältnisse mehr oder weniger stark beeinflußt. In vielen Fällen ist dieser Einfluß gering, und man kann von ihm absehen, indem man die Fiktion einer reibungsfreien, sog. idealen Flüssigkeit macht. Die wirklichen Flüssigkeiten bezeichnet man demgegenüber als zähe Flüssigkeiten. Wir behandeln zunächst die idealen Flüssigkeiten.

109. Die Bernouillische Gleichung. Wir betrachten ein Element einer Stromröhre von der sehr kleinen Länge Δs. Ihr senkrechter Querschnitt an der Eintrittsstelle sei q, an der Austrittsstelle q' und von q nur sehr wenig ver-

schieden (Abb. 103). Die Koordinate der Stromlinien sei s und die Röhre sei um den Winkel α gegen die Vertikale geneigt. In q herrsche der Druck p, in q' der von p nur wenig verschiedene Druck p'. Die Dichte der Flüssigkeit sei ϱ und daher die in dem Element enthaltene Masse $\Delta m = \varrho q \Delta s$. Auf die Masse Δm wirkt in der Richtung von s infolge des auf ihre Enden wirkenden Druckes die Kraft $pq - p'q'$, ferner die Schwerkraft $-\Delta m g \cos\alpha$, oder wenn wir mit h den senkrechten Abstand des Elements von irgendeiner festen Horizontalebene bezeichnen, wegen $\cos\alpha = \Delta h/\Delta s = dh/ds$ die Kraft $-\Delta m g\, dh/ds$. Da sich $p'q'$ von pq nur äußerst wenig unterscheidet, so können wir nach dem TAYLORschen Satz schreiben $p'q' = pq + \Delta s\, d(pq)/ds$.

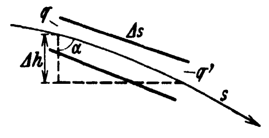


Abb. 103. Zur Ableitung der BERNOUILLIschen Gleichung.

Die gesamte auf die Masse Δm wirkende Kraft ist gleich $\Delta m\, dv/dt$ (v = Strömungsgeschwindigkeit), so daß wir schließlich erhalten

$$\Delta m \frac{dv}{dt} = -\Delta s \frac{d(pq)}{ds} - \Delta m g \frac{dh}{ds}.$$

Setzen wir noch $dv/dt = dv/ds \cdot ds/dt = v\, dv/ds$ und multiplizieren mit ds, so folgt

$$\Delta m \cdot v\, dv + \Delta s \cdot d(pq) + \Delta m \cdot g\, dh = 0.$$

Die Integration dieser Gleichung ergibt

$$\tfrac{1}{2} \Delta m v^2 + \Delta s\, pq + \Delta m g h = \text{const.}$$

oder nach Division durch $\Delta s \cdot q = \Delta m/\varrho$

$$\tfrac{1}{2} \varrho v^2 + p + \varrho g h = \text{const.} \tag{2}$$

(ϱ = Dichte der Flüssigkeit.) Dies ist die BERNOUILLIsche Gleichung (1738). Sie gibt die gegenseitige Abhängigkeit der Geschwindigkeit, des Druckes und der Höhe innerhalb einer Flüssigkeit an.

Dividieren wir die Gl. 2 noch durch ϱg, so folgt

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\varrho g} + h = \text{const.} \tag{3}$$

Die drei Glieder dieser Gleichung haben je die Dimension einer Länge (Höhe). Man nennt $v^2/2g$ die Geschwindigkeitshöhe. Sie ist gleich der Höhe, aus der die Flüssigkeit frei herabgefallen sein müßte, um die Geschwindigkeit v zu erlangen (§ 57, Gl. 18). $p/\varrho g$ heißt die Druckhöhe, denn sie ist gleich der Höhe einer ruhenden Flüssigkeitssäule, die einen hydrostatischen Druck vom Betrage p hervorrufen würde (§ 87, Gl. 2). h heißt die Ortshöhe. Demnach ist die Summe dieser drei Höhen innerhalb einer strömenden Flüssigkeit konstant. Für $v = 0$ ist Gl. 2 und 3 mit dem Gesetz des hydrostatischen Druckes identisch.

Die Differenz des Drucks p gegenüber dem hydrostatischen Druck innerhalb einer strömenden Flüssigkeit nennt man den hydrodynamischen Druck. Er kann größer oder kleiner als Null sein. Die Gesetze des hydrodynamischen Drucks spielen u. a. eine wichtige Rolle in allen Fällen, wo sich im Wege einer Strömung, sei es eines Gases oder einer Flüssigkeit, ein festes Hindernis befindet, das die Strömung in irgendeiner Weise beeinflußt. Dabei kommt es lediglich darauf an, daß sich Gas oder Flüssigkeit und Hindernis relativ zueinander bewegen, und es ist für die auftretenden Druckkräfte ganz gleichgültig, ob das Hindernis in einer Strömung ruht oder ob es sich durch ein ruhendes Medium hindurchbewegt. Die Theorie des in strömender Luft schwe-

benden Drachens und die des durch die Luft hindurchbewegten Flugzeugs ist prinzipiell die gleiche. Die Modellversuche der Flugtechnik werden in der Mehrzahl der Fälle mit ruhenden Modellen in strömender Luft angestellt.

110. Einige Anwendungen der BERNOUILLIschen Gleichung. Wir wollen die Anwendung der BERNOUILLIschen Gleichung an einigen Beispielen betrachten. Ein mit einer Flüssigkeit von der Dichte ϱ gefüllter Behälter habe h cm unterhalb der Flüssigkeitsoberfläche eine Ausflußöffnung, aus der die Flüssigkeit ausströmt (Abb. 104a). Im oberen Flüssigkeitsniveau und an der Öffnung herrscht der äußere Luftdruck $p = b$. Die Ortshöhe der Öffnung sei $x = 0$, diejenige des oberen Flüssigkeitsniveaus also $x = h$. Der Behälter sei so weit, daß die Flüssigkeit in ihm beim Ausströmen nur sehr langsam absinkt, so daß wir im oberen Niveau $v = 0$ setzen dürfen. Dann folgt aus der Gl. 2

$$\frac{b}{\varrho g} + h = \frac{b}{\varrho g} + \frac{v^2}{2g}$$

oder

$$v = \sqrt{2gh}. \tag{4}$$

Dies ist das Theorem von TORRICELLI (1646, aber bereits HERO von Alexandrien um 100 n. Chr. bekannt). Die Ausflußgeschwindigkeit ist so groß, als habe die strömende Flüssigkeit die ganze Höhe h frei durchfallen. Die Geschwindigkeitshöhe beim Ausfluß ist gleich der Ortshöhe im oberen Niveau. Wird das Ausflußrohr senkrecht nach oben geführt, so müßte die Flüssigkeit wieder bis in die Höhe h steigen (Abb. 104b). In Wirklichkeit steigt sie wegen

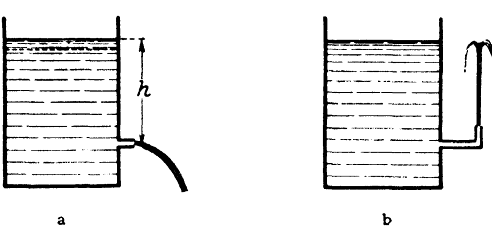


Abb. 104. Zum Theorem von TORRICELLI.

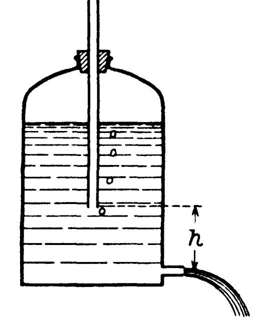


Abb. 105. MARIOTTEsche Flasche.

der Reibung und wegen der zurückfallenden Tropfen nicht ganz so hoch. Mit sinkendem Flüssigkeitsspiegel sinkt auch die Ausflußgeschwindigkeit. Konstante Ausflußgeschwindigkeit erhält man mit der MARIOTTEschen Flasche (Abb. 105). In die verschlossene Flasche ragt ein offenes Rohr, dessen untere Öffnung sich in der Flüssigkeit h cm über der Ausflußöffnung befindet. Infolgedessen herrscht in diesem Niveau stets Atmosphärendruck. (Der Luftdruck oberhalb der Flüssigkeit ist um die Druckhöhe der h überragenden Flüssigkeitsschicht geringer als der Atmosphärendruck, und beim Ausströmen perlt Luft durch das Rohr.) Die Anwendung der Gl. 2 auf das Niveau des unteren Röhrenendes und auf die Ausflußöffnung ergibt wieder die Gl. 4 mit der veränderten Bedeutung von h. Wegen der Konstanz von h ist jetzt auch v konstant.

In einem Behälter, der eine feine Öffnung besitzt, befinde sich ein Gas unter dem Druck p_1. Im Außenraum herrsche der kleinere Druck p_2. Im Innern ruht das Gas, an der Öffnung ströme es mit der Geschwindigkeit v aus (Abb. 106). Die beiden Drucke und ihre Differenz seien so groß, daß wir von etwaigen Unterschieden der Ortshöhe h absehen können (bei nicht horizontaler Ausströmung). Dann folgt aus Gl. 2

$$p_1 = p_2 + \tfrac{1}{2}\varrho v^2 \quad \text{und} \quad v = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\varrho}} \tag{5}$$

Bei gleicher Druckdifferenz $p_1 - p_2$ ist also die Ausströmungsgeschwindigkeit verschiedener Gase den Wurzeln aus ihren Dichten umgekehrt proportional (Ausströmungsgesetz von BUNSEN). Hierauf beruht eine Methode zur Bestimmung der Dichte von Gasen.

Befindet sich in einer strömenden Flüssigkeit ein Hindernis, so wird es von ihr umströmt, und die Flüssigkeit staut sich an der Front des Hindernisses.

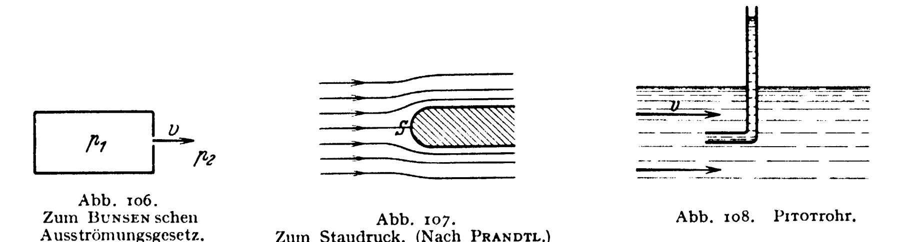


Abb. 106. Zum BUNSENschen Ausströmungsgesetz.

Abb. 107. Zum Staudruck. (Nach PRANDTL.)

Abb. 108. PITOTrohr.

Wo die Strömung sich nach beiden Seiten teilt, im Staupunkt S, ist die Strömungsgeschwindigkeit $v = 0$ (Abb. 107). Die Strömungsgeschwindigkeit und der Druck in der strömenden Flüssigkeit im Niveau des Staupunktes (gleiche Ortshöhe h) in größerer Entfernung vom Hindernis seien v_0 und p_0, der Druck im Staupunkt sei p. Dann folgt aus Gl. 2

$$p_0 + \tfrac{1}{2}\varrho v_0^2 = p \quad \text{oder} \quad p - p_0 = \tfrac{1}{2}\varrho v^2. \tag{6}$$

Die Größe $p - p_0$ heißt der Staudruck. Die Gl. 6 bildet ein wichtiges Mittel, um die Strömungsgeschwindigkeit in beliebigen Punkten einer Strömung, z. B. in Flüssen, aus den Werten von p_0 und p zu bestimmen. Der Staudruck kann mit dem PITOTrohr (Abb. 108) gemessen werden. Es besteht im einfachsten Fall aus einem gebogenen Rohr, das der Strömung entgegengerichtet wird und als Hindernis dient. Das Wasser steigt im Rohr um einen Betrag über das äußere Flüssigkeitsniveau, der dem Staudruck entspricht. PRANDTL hat ein kombiniertes Gerät angegeben, das p_0 und p gleichzeitig zu messen gestattet.

Betrachten wir eine Strömung in horizontaler Richtung ($h = \text{const.}$), so nimmt die Gl. 2 die einfachere Form an

$$\tfrac{1}{2}\varrho v^2 + p = \text{const.} \tag{7}$$

Aus dieser Gleichung folgt, daß der Druck in einer horizontal strömenden Flüssigkeit um so kleiner ist, je größer die Geschwindigkeit ist. In einem horizontalen Rohr ist also der Druck an den engeren Stellen kleiner als an den weiteren. Das gleiche gilt auch für die Stromfäden in einer ausgedehnteren Strömung. Auf dieser Tatsache beruht z. B. der Flüssigkeitszerstäuber. Im Wege eines aus einer engen Öffnung austretenden Luftstrahls steht senkrecht zum Strahl ein in die zu zerstäubende Flüssigkeit tauchendes Rohr, das oben auch eine feine Öffnung hat. Infolge des Umströmens der Rohrspitze ist die Strömungsgeschwindigkeit der Luft in der Umgebung der Spitze größer als in weiterer Entfernung, wo Atmosphärendruck herrscht, der Druck also geringer als dieser. Infolgedessen drückt der auf dem Flüssigkeitsniveau lastende Atmosphärendruck die Flüssigkeit im Rohr in die Höhe, und sie wird in feinen Tröpfchen vom Luftstrahl mitgenommen. Eine weitere Anwendung der Gl. 7 ist die Wasserstrahlpumpe (Abb. 101, § 106). Aus dem gleichen Grunde, der die Saugwirkung beim Zerstäuber hervorbringt, ziehen Schornsteine bei stetigem Wind besser als bei ruhiger Luft.

Einer mit einem Rohr *C* versehenen Platte *B* (Abb. 109) steht in kleinem Abstande eine zweite, bewegliche Platte *A* gegenüber. Bläst man durch *C* einen Luftstrom, so wird *A* nicht etwa abgestoßen, sondern angezogen (aerodynamisches Paradoxon). Es herrscht nämlich an den Außenflächen und am Rande der Platten Atmosphärendruck. Da der Querschnitt des Luftstroms in der Mitte der Platten enger ist als am Rande, die Geschwindigkeit also von der Mitte zum Rande abnimmt, so ist der Druck zwischen den Platten kleiner als der äußere Druck, und dieser preßt die Platte *A* gegen *B*. Im Augenblick der Berührung hört der Luftstrom auf, die Platte fällt ab und das Spiel wiederholt sich. Die Platte *A* tanzt periodisch auf und ab. Auf derartigen periodischen Bewegungen des Gaumensegels beruht auch das Schnarchen. Damit der soeben beschriebene Versuch gelingt, darf der Plattenabstand eine gewisse Größe nicht überschreiten, da sonst der Druckunterschied zu gering wird.

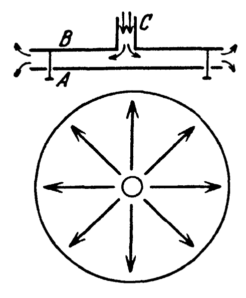


Abb. 109. Zur Demonstration des hydrodynamischen Drucks in einem Gasstrahl.

Man forme eine Papiertüte mit verschlossener Spitze so, daß sie genau in einen Glastrichter hineinpaßt, und lege sie lose in ihn hinein. Bläst man durch das Rohr des Trichters, so wird die Tüte gegen den Luftstrom an die Trichterwand gepreßt. Die Erklärung ist gleiche wie bei Abb. 109.



Abb. 110. Strömung um einen rotierenden Zylinder. (Nach PRANDTL.)

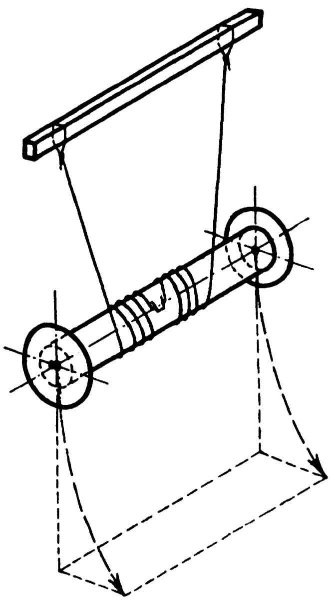


Abb. 111. Zur Demonstration des MAGNUS-Effektes.

Auf der BERNOUILLIschen Gleichung beruht auch der MAGNUS-Effekt (1850). Seine strenge Theorie, die eine Berücksichtigung der Reibung erfordert, können wir hier nicht wiedergeben. Wir beschränken uns deshalb auf das Grundsätzliche. Der MAGNUS-Effekt beruht darauf, daß ein in einer strömenden Flüssigkeit rotierender Zylinder, dessen Achse zur Flüssigkeitsströmung senkrecht steht, eine zur Strömungsrichtung senkrechte Kraft erfährt. Abb. 110 zeigt die Aufnahme eines Modellversuchs in strömendem Wasser. Man sieht, daß unter der Wirkung der Rotation des Zylinders die Stromlinien der Flüssigkeit

rechts zusammengedrängt sind, so daß die Flüssigkeit rechts schneller strömt als links. Infolgedessen ist der Druck der Flüssigkeit rechts kleiner als links (Gl. 7), und der Zylinder wird nach rechts gedrückt. Dieser Effekt wird beim Flettner-Rotor zum Schiffsantrieb benutzt, wobei ein rotierender Zylinder im Winde dem Magnus-Effekt unterliegt und wie ein Segel wirkt.

Abb. 111 zeigt einen einfachen Vorlesungsversuch zur Demonstration des Magnus-Effekts. Der Effekt spielt eine Rolle in der Ballistik, indem die Geschosse infolge ihres Rechtsdralls bei ihrer Bewegung durch die Luft eine Rechtsabweichung erleiden. Geschnittene, also stark rotierende Tennisbälle beschreiben in der Luft gekrümmte Bahnen.

111. Trennungsflächen. Wirbel. Kommen zwei Strömungen von verschiedener Geschwindigkeit miteinander in Berührung, so daß sie nunmehr parallel zueinander weiterlaufen, so herrscht zwar auf beiden Seiten der Trennungsfläche der gleiche Druck, aber es besteht eine Unstetigkeit in der Geschwindigkeit. Dieser Zustand ist mit der Gl. 2 nicht vereinbar und deshalb auch nicht beständig. Vielmehr bilden sich längs der Trennungsfläche Wirbel aus, die von der Strömung mitgenommen werden, und die beiden Strömungen gleiten sozusagen wie auf Rollen aneinander vorbei, indem die Wirbel in dem Sinne rotieren, daß ihre Rotation auf der Seite der größeren Geschwindigkeit in Richtung der Strömung, auf der anderen Seite gegen diese Richtung erfolgt. (Man kann die Erscheinung ganz grob mit dem Verhalten eines Kugellagers vergleichen.)

Überhaupt besteht die Neigung zur Wirbelbildung an allen Unstetigkeitsstellen der Strömung oder ihrer Begrenzung. Abb. 112 zeigt die allmähliche Ausbildung eines solchen Wirbelsystems an einer scharfen Kante. In der Bucht hinter der Kante bildet sich ein Totwasser, das gegen die Strömung durch eine Schicht von Wirbeln abgegrenzt ist.

Abb 112. Ausbildung eines Wirbelsystems an einer scharfen Kante. (Nach Prandtl.)

Strömt eine Flüssigkeit oder ein Gas schnell durch eine scharfkantige Öffnung, so bildet sich an dieser ein ringförmig geschlossener Wirbel (Abb. 113). Diese Erscheinung läßt sich mit einem Kasten mit elastischer Rückwand, der vorn eine Öffnung hat, sehr hübsch zeigen, wenn man der Luft im Kasten ein wenig Rauch beimischt. Schlägt man kurz gegen die Rückwand, so bildet sich der Wirbel und fliegt mit erheblicher Geschwindigkeit mehrere Meter fort, ehe er sich durch Reibung auflöst. Infolge des beigemischten Rauches ist er sichtbar. Die Heftigkeit der Luftzirkulation im Wirbel zeigt die Tatsache, daß eine brennende Kerze, die von dem Wirbel getroffen wird, mit heftigem Zucken erlischt, ausgeblasen wird. Wie man sieht, sind derartige Ringe sehr beständig. Sie werden nur durch Reibung zerstört, und in einer idealen Flüssigkeit wäre ein einmal gebildeter Wirbel überhaupt unzerstörbar. Allerdings gäbe es dann auch kein Mittel, einen Wirbel zu erzeugen.

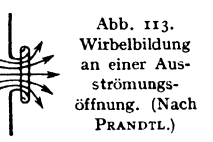


Abb. 113. Wirbelbildung an einer Ausströmungsöffnung. (Nach Prandtl.)

112. Tragflächen. Von der technisch überaus wichtigen Theorie der Tragflächen können wir hier nur das Grundsätzliche anführen. Bewegt sich die Tragfläche eines Flugzeugs durch die Luft oder strömt die Luft an der ruhenden Tragfläche vorbei, wie das bei Modellversuchen geschieht, so bildet sich um die Tragfläche eine Strömung aus, die man als die Überlagerung einer sog. reinen Potentialströmung (Abb. 114a) und einer Zirkulation (Abb. 114b) ansehen kann, so daß die in Abb. 114c dargestellte Strömung entsteht. In dieser sind die Stromlinien oberhalb der Tragfläche zusammengedrängt, unterhalb der

Fläche viel weniger dicht, und daher ist der Luftdruck über dem Flügel nach Gl. 2 geringer als unter dem Flügel. Dieser erfährt also einen Auftrieb, der das Flugzeug zum Fliegen befähigt. Das Steigen der Drachen erklärt sich ebenso, desgleichen die treibende Wirkung von Propellern und die Drehung von Windrädern. Ferner beruht auf der gleichen Ursache die Wirkung der Schiffssegel, der Steuer von Luft- und Wasserfahrzeugen und die Tragwirkung der Vogelschwingen beim Segelflug.

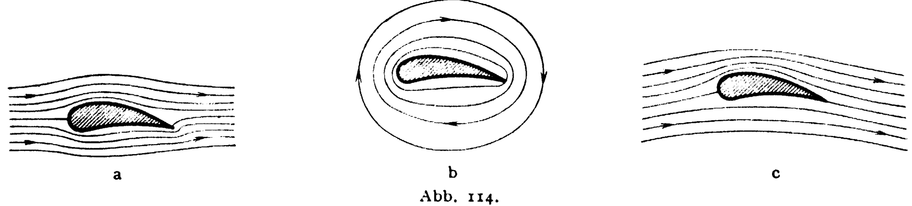


Abb. 114.
Zur Theorie der Tragflügel (nach PRANDTL). a Potentialströmung, b Zirkulation, c kombinierte Strömung.

113. **Zähe Flüssigkeiten. Innere Reibung.** Wie bereits gesagt, ist die Voraussetzung absoluter Reibungsfreiheit eine Idealisierung, die bei den wirklichen Flüssigkeiten und Gasen nie streng zutrifft. Sie besitzen alle eine sog. Zähigkeit oder Viskosität, die das Auftreten von innerer Reibung in einer strömenden Flüssigkeit bzw. einem Gase zur Folge hat. Die innere Reibung äußert sich darin, daß in einer Flüssigkeit, in der senkrecht zur Strömungsrichtung ein Geschwindigkeitsgefälle besteht, in der also benachbarte Stromröhren eine verschiedene Geschwindigkeit haben, zwischen diesen Stromröhren eine Kraft wirkt, die den schnelleren Stromfaden verzögert, den langsameren beschleunigt, also einen Ausgleich der Geschwindigkeiten herbeizuführen versucht. Diese Kraft ist erstens der Fläche, in der sich die beiden Stromröhren berühren, proportional. Zweitens ist sie um so größer, je schneller sich die Geschwindigkeit senkrecht zur Strömungsrichtung ändert, je größer also das Geschwindigkeitsgefälle in der zur Grenzfläche senkrechten Richtung ist. Bezeichnen wir die in dieser Richtung liegende Koordinate mit x, so ist das Geschwindigkeitsgefälle gleich dv/dx. Zwischen zwei Stromröhren, die sich in der Fläche F berühren, besteht also eine Kraft von der Größe

$$k = \eta F \frac{dv}{dx} \text{ dyn}. \tag{8}$$

η ist eine für die betreffende Flüssigkeit oder das Gas charakteristische Konstante, der Koeffizient der inneren Reibung oder seine Viskosität oder Zähigkeit schlechthin. Ihre Einheit ist $1 \text{ dyn} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{sec}$.

Während ein volles Verständnis des Wesens der inneren Reibung bei den Flüssigkeiten heute noch nicht möglich ist, läßt sich ihr Wesen bei den Gasen in allen Einzelheiten auf Grund der kinetischen Gastheorie verstehen. Bei den Gasen hat die innere Reibung mit der Reibung zwischen festen Flächen nichts als den Namen gemein. Es ist ein Vorgang völlig anderer Art. In einem ruhenden, gleichmäßig temperierten Gase haben alle Moleküle im Durchschnitt die gleiche Geschwindigkeit, und die Geschwindigkeiten sind über alle Richtungen gleichmäßig verteilt. In einer mit der Geschwindigkeit v strömenden Flüssigkeit aber überlagert sich der ungeordneten Molekularbewegung die einseitig gerichtete Strömungsgeschwindigkeit. Die Moleküle haben also eine zusätzliche Geschwindigkeit in der Strömungsrichtung. Infolge ihrer ungeordneten Molekularbewegung wechseln nun die Moleküle dauernd zwischen den einzelnen Stromröhren des strömenden Gases hin und her und gelangen dabei aus einer

schneller strömenden Röhre in eine langsamer strömende und umgekehrt. Auf diese Weise wird Bewegungsgröße (Impuls) von einer Stromröhre auf die andere übertragen. Die schneller bewegten Stromröhren verlieren durch Abgabe von schnelleren und Aufnahme langsamerer Moleküle Impuls, und umgekehrt erfahren die langsamer bewegten Stromröhren einen Zuwachs an Impuls. Die Geschwindigkeitsunterschiede im strömenden Gase müssen sich also allmählich ausgleichen, wenn nicht von außen her für Aufrechterhaltung des ursprünglichen Zustandes gesorgt wird. Der Übergang des Impulses eines Moleküls auf eine Stromröhre wird dann als vollzogen anzusehen sein, wenn das Molekül mit einem Molekül der betreffenden Stromröhre zusammenstößt. Das stoßende Molekül wird dabei aus einem Bereich kommen, dessen Entfernung von der Stromröhre von der Größenordnung der mittleren freien Weglänge ist. Je größer diese ist, um so größer ist der Unterschied der Geschwindigkeiten. Sei sie in dem Bereich, von dem das Molekül ausgeht, gleich v und in dem um die freie Weglänge λ entfernten Bereich v', so ist nach dem TAYLORschen Satz $v' = \lambda dv/dx$, und dieser Größe ist demnach der von dem einen Bereich auf den anderen übertragene Impuls proportional. Jeder Impulsänderung aber entspricht eine Kraft (§ 25). Es erfahren also die einzelnen Stromröhren eines strömenden Gases beschleunigende oder verzögernde Kräfte, die ebenfalls $\lambda dv/dx$ proportional sind. Durch Vergleich mit Gl. 8 erkennt man, daß die innere Reibung η eines Gases seiner freien Weglänge λ proportional sein muß. Ist n die Zahl der Moleküle im Kubikzentimeter, μ die Masse eines Moleküls, also $n\mu = \varrho$ die Dichte des Gases, und u die mittlere Geschwindigkeit der Gasmoleküle, so ergibt die Theorie, daß

$$\eta = \tfrac{1}{3} n\mu u\lambda = \tfrac{1}{3} \varrho u\lambda \text{ dyn} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{sec}. \qquad (9)$$

Diese Gleichung liefert das beste Mittel, um die freien Weglängen in Gasen zu bestimmen.

114. Strömung durch Röhren. Unter den Erscheinungen, bei denen die Zähigkeit eine wesentliche Rolle spielt, sind die Strömungen durch enge Röhren von besonderer Wichtigkeit. Wir betrachten eine Strömung in einer kreiszylindrischen Röhre vom Radius r und in dieser einen achsialen zylindrischen Stromfaden vom Radius x (Abb. 115). Am Anfang der Röhre herrsche der Druck p_1, an ihrem Ende der Druck p_2, wobei $p_1 > p_2$. Auf den Stromfaden wirkt infolgedessen in der Strömungsrichtung die Kraft $(p_1 - p_2)\pi x^2$. Zweitens wirkt nach Gl. 8 in der Mantelfläche $F = 2\pi x l$ der Stromröhre die Kraft $\eta 2\pi x l dv/dx$. Da bei einer stationären Strömung bei konstantem Rohrquerschnitt eine Beschleunigung der Flüssigkeit nicht erfolgt, so muß die Summe dieser Kräfte gleich Null sein, also

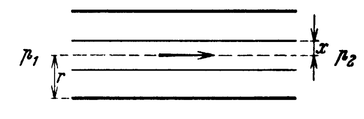


Abb. 115. Zur Ableitung des POISEUILLE schen Gesetzes.

$$(p_1 - p_2)\,\pi x^2 + \eta \cdot 2\pi x l \frac{dv}{dx} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta l}\,x.$$

Bei der Integration dieser Gleichung ist zu beachten, daß die der Rohrwandung anliegende Flüssigkeitsschicht stets an der Wandung haftet, also die Geschwindigkeit $v = 0$ hat. Dann folgt

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l}\,(r^2 - x^2) \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1}. \qquad (9)$$

Durch eine weitere Integration findet man hieraus leicht das in 1 sec durch jeden Rohrquerschnitt fließende Flüssigkeitsvolumen

$$V = \frac{\pi r^4}{8\eta l}\,(p_1 - p_2) \text{ cm}^3. \qquad (10)$$

Dies Gesetz wurde 1839 von HAGEN gefunden, wird aber nach seinem zweiten Entdecker meist das POISEUILLEsche Gesetz genannt.

Die Verteilung der Geschwindigkeiten in einer engen Röhre ist in Abb. 116a dargestellt. Die Geschwindigkeit nimmt vom Rande nach der Mitte zu. Doch gelten die vorstehenden Gleichungen nur in engen, nicht in weiten Röhren.

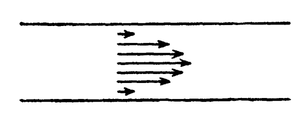


Abb. 116. Strömung einer Flüssigkeit durch ein enges Rohr. Die Pfeile bedeuten die Strömungsgeschwindigkeiten.

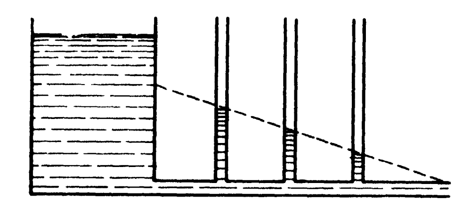


Abb. 117. Druckgefälle in einer Röhre.

Aus Gl. 9 folgt, daß die in 1 sec durch die Röhre fließende Flüssigkeitsmenge der längs der Röhre herrschenden Druckdifferenz proportional ist. Das Druckgefälle in einer Röhre zeigt der in Abb. 117 dargestellte, leicht verständliche Versuch.

Das POISEUILLEsche Gesetz gilt aber nur unter der Voraussetzung, daß die Strömung in der Röhre den von uns vorausgesetzten glatten Verlauf hat, eine sog. laminare Strömung ist. Bei nicht zu hoher Geschwindigkeit ist das auch der Fall. Bei großer Strömungsgeschwindigkeit aber tritt in der Röhre Wirbelbildung ein, die laminare Strömung schlägt in eine turbulente Strömung um, auf die unsere obigen Überlegungen nicht zutreffen. Der Strömungswiderstand der Röhre steigt beträchtlich, und die in 1 sec durch die Röhre strömende Flüssigkeitsmenge ist nunmehr nur etwa der Wurzel aus $p_1 - p_2$ proportional.

Das POISEUILLEsche Gesetz spielt im menschlichen und tierischen Organismus eine wichtige Rolle, weil es für die Strömung des Blutes in den Adern gilt. Ferner spielt es eine Rolle bei der Strömung von Flüssigkeiten durch poröse Körper, z. B. des Grundwassers im Erdboden.

115. **Flüssigkeits- und Gasstrahlen.** Eine turbulente Strömung liegt auch vor, wenn eine Flüssigkeit oder ein Gas mit einer gewissen Geschwindigkeit aus einer engen Öffnung in einen weiteren, mit der gleichen Substanz erfüllten Raum eintritt. Es bildet sich dann ein von der Öffnung ausgehender Strahl. Dabei werden die angrenzenden Schichten von dem Strahl mitgerissen und in den Strahl mit einbezogen (Abb. 118). Der Strahl verbreitert sich also, und zwar nimmt sein Querschnitt proportional der Entfernung von der Öffnung zu. Dadurch wächst die Masse m der im Strahl transportierten Materie, und da nach dem Impulssatz (§ 33) die Bewegungsgröße mv des Strahls erhalten bleibt, so nimmt gleichzeitig die Strahlgeschwindigkeit v ab, je weiter der Strahl sich von der Öffnung entfernt, und wird in großer Entfernung gleich Null. Das umgebende Medium wird von den Seiten in den Strahl hineingerissen, strömt also von allen Seiten her auf ihn zu. Auf dieser Tatsache beruht das Schweben leichter Körper, z. B. eines Zelluloidballes, in einem Luftstrahl. Wird der Ball in den Strahl gebracht, so wird er durch den Druck des Strahles getragen und durch die allseits zuströmende Luft am seitlichen Entweichen gehindert. Der Versuch gelingt nicht nur bei senkrecht aufsteigendem Strahl, sondern auch noch bei einer nicht zu großen Neigung. In diesem Fall führt der Ball eine Rotationsbewegung aus, weil er wegen seiner

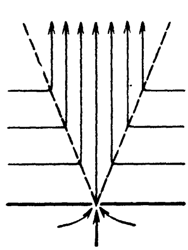


Abb. 118. Stromlinien in einem Flüssigkeits- oder Gasstrahl. (Nach PRANDTL.)

Schwere ein wenig unterhalb der Strahlachse und seine obere Hälfte in einem Bereich größerer Strömungsgeschwindigkeit liegt, als seine untere Hälfte. (Das bekannte Tanzen eines Balles auf einem Wasserstrahl erklärt sich ganz anders als die vorstehende Erscheinung.)

Auf der geschilderten Art der Strahlbildung beruht auch der Bunsenbrenner (Abb. 119). Das aus der Düse A ausströmende Gas reißt von den Seiten her Luft mit sich und mischt sich mit ihr im Rohr B.

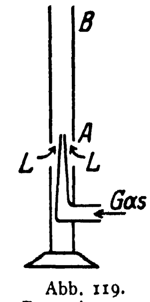


Abb. 119. Bunsenbrenner.

116. **Das STOKESsche Fallgesetz.** Jeder Körper, der sich durch eine Flüssigkeit oder ein Gas hindurchbewegt, erfährt eine hemmende Kraft. Diese rührt nicht von einer unmittelbaren Reibung des Körpers am umgebenden Medium her. Denn wie wir schon gesehen haben, haftet die unmittelbar an den Körper grenzende Schicht an ihm, und der auftretende Widerstand rührt von innerer Reibung im umgebenden Medium her. Er hängt, außer von der Art des Mediums, von der Geschwindigkeit und der Gestalt des bewegten Körpers ab. Für eine mit der Geschwindigkeit v bewegte Kugel vom Radius r gilt unter gewissen Bedingungen in einer Flüssigkeit oder einem Gase von der Viskosität η das STOKESsche Fallgesetz, nach dem die Größe des Widerstandes

$$k = 6\pi\eta v r \text{ dyn} \tag{11}$$

beträgt. An dieser Gleichung ist bei Gasen noch eine Korrektion anzubringen, wenn es sich um Kugeln handelt, deren Radius so klein ist, daß er mit der freien Weglänge im Gase vergleichbar wird.

Allgemein gilt bei nicht zu großer Geschwindigkeit, daß die hemmende Kraft

$$k = \alpha v \text{ dyn}, \tag{12}$$

also der Geschwindigkeit v proportional ist, wobei α eine von der Art der Flüssigkeit oder des Gases und der Gestalt des Körpers abhängige Größe ist. Bei dem Fall eines Körpers in einem reibenden Medium bewirkt im Anfang der Bewegung die Schwerkraft mg, vermindert um den Auftrieb A, eine Beschleunigung, also ein Wachsen der Fallgeschwindigkeit und daher auch ein Anwachsen des Reibungswiderstandes. Es stellt sich aber sehr schnell ein Gleichgewichtszustand derart her, daß die Beschleunigung der um den Auftrieb verminderten Schwerkraft, $mg - A = k'$, durch den Reibungswiderstand kompensiert wird, so daß der Körper nunmehr mit konstanter Geschwindigkeit weiter fällt. Dann ist

$$k = k' = \alpha v \quad \text{oder} \quad v = \frac{k'}{\alpha}.$$

Bei gleichgeformten Körpern wächst das Gewicht mg und der Auftrieb A, also auch die Kraft k', mit der 3. Potenz ihrer Lineardimensionen, der Reibungswiderstand aber nur mit einer kleineren Potenz (s. als Beispiel Gl. 11). Darum fallen kleine Körper langsamer, als gleichgeformte größere Körper aus dem gleichen Material. Das Schweben sehr kleiner Teilchen, wie Staub, Tröpfchen usw., ist ein sehr langsames Fallen unter der Wirkung der obengenannten Kräfte.

IV. Schwingungen und Wellen.

12. Kapitel.

Mechanische Schwingungen und Wellen.

117. Wesen der Schwingungen. Unter einer mechanischen Schwingung verstehen wir eine periodische Bewegung eines Körpers oder seiner Teile um eine durch irgendwelche Kräfte gegebene natürliche Ruhelage. Wird ein Körper oder werden Teile von ihm aus dieser entfernt, und werden sie durch eine Kraft wieder in sie zurückgezogen, so kehren sie im allgemeinen nicht unmittelbar wieder in diese zurück, sondern führen Schwingungen um sie aus. Findet bei dieser Bewegung kein Energieverlust statt, bzw. wird die Schwingungsenergie konstant gehalten, so dauert die Schwingung unbegrenzt an (ungedämpfte Schwingung). Findet dagegen Energieabgabe nach außen statt, so nimmt die Schwingung allmählich an Intensität ab und hört schließlich auf (gedämpfte Schwingung).

Der Vorgang erklärt sich so, daß bei der Entfernung des Körpers aus seiner Ruhelage an ihm Arbeit geleistet wird, er gewinnt potentielle Energie. Wird er wieder losgelassen, so verwandelt sich die potentielle Energie in kinetische. Wenn der Körper seine alte Ruhelage wieder erreicht hat, so ist diese Umwandlung restlos vollzogen. Nunmehr bewegt sich der Körper infolge seiner Trägheit über seine Ruhelage hinaus, die kinetische Energie verwandelt sich, indem Arbeit gegen die zur Ruhelage hintreibende Kraft geleistet wird, wieder in potentielle Energie, und das Spiel wiederholt sich immer wieder, wenn die Dämpfung die Energie nicht allmählich aufzehrt. Eine solche Bewegung haben wir bereits beim Pendel (§ 60) kennengelernt.

Der einfachste Fall einer Schwingung ist die sog. harmonische Schwingung oder Sinusschwingung. Es bedeute ξ die Entfernung eines Körpers oder eines seiner Teile aus seiner Ruhelage. Dann verläuft eine ungedämpfte harmonische Schwingung nach der Gleichung

$$\xi = \xi_0 \sin(\omega t + a). \tag{1}$$

(An Stelle des sin kann man wegen $\sin\alpha = \cos(\alpha - \frac{\pi}{2})$ nach einfacher Umformung ebensogut den cos setzen. Es ändert sich dann nur die Größe a.) Die Entfernung aus der Ruhelage ist eine rein periodische Funktion der Zeit t. ξ ist Amplitude der Schwingung, ξ_0 ist der größte Wert, den ξ während einer Schwingung annimmt, die Schwingungsweite. a ist die Phasenkonstante der Schwingung. Ihre Größe hängt davon ab, wie man den Anfangspunkt der Zeit t wählt. Sie ist deshalb bei einer einzelnen Schwingung physikalisch bedeutungslos und kann dann stets durch geeignete Wahl des Anfangspunktes der Zeit beseitigt werden. Wählt man diesen hingegen so, daß $a = \pi/2$ wird, so wird $\xi = \xi_0 \cos \omega t$. Ob man also eine harmonische Schwingung durch

den sin oder cos darstellt, ist bei einer einzelnen Schwingung gleichgültig. Hingegen kommt es, wenn zwei oder mehrere Schwingungen gleichzeitig erfolgen, auf die Differenz ihrer Phasenkonstanten entscheidend an. Die Konstante ω, deren Größe von den speziellen Bedingungen des Vorganges abhängt, heißt die Kreisfrequenz der Schwingung. Abb. 120a stellt die Abhängigkeit von ξ von der Zeit t nach Gl. 1 für den Fall $a = 0$ dar.

Setzt man $\omega = 2\pi\nu$ oder $\omega = 2\pi/\tau$, so wird, wenn wir $a = 0$ setzen,

$$\xi = \xi_0 \sin 2\pi\nu t = \xi_0 \sin 2\pi \frac{t}{\tau}. \tag{2}$$

Es ist also

$$\tau = 1/\nu = 2\pi/\omega. \tag{3}$$

Die Bedeutung von τ ergibt sich aus der Überlegung, daß ξ alle möglichen Werte einmal in jeder Richtung durchläuft, wenn das Argument $2\pi t/\tau$ des sin von $2\pi \frac{t}{\tau}$ auf $2\pi \frac{t+\tau}{\tau} = 2\pi \frac{t}{\tau} + 2\pi$, also die Zeit von t auf $t + \tau$ wächst (Abb. 120a). Es wiederholt sich also jeweils nach Ablauf der Zeit τ der gleiche Vorgang, sie ist gleich der Dauer einer Hin- und Herschwingung. τ nennt man daher die Schwingungszeit, und es ist $\nu = 1/\tau$ die Zahl der Schwingungen in 1 sec, die sog. Schwingungszahl, auch Frequenz (nicht mit der um den Faktor 2π größeren Kreisfrequenz ω zu verwechseln) genannt. Als Einheit der Schwingungszahl ν benutzt man neuerdings auch 1 Hertz (Hz) (nach HEINRICH HERTZ, dem Entdecker der elektrischen Wellen). Es hat also eine Schwingung eine Schwingungszahl von ν Hz, wenn in 1 sec ν Schwingungen erfolgen.

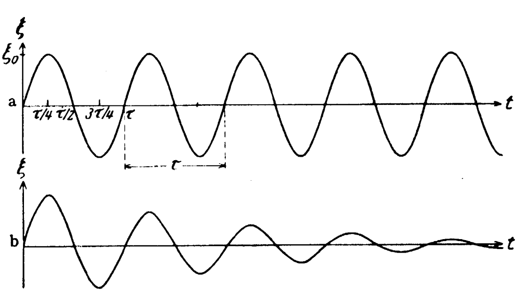


Abb. 120. Harmonische Schwingung. a ungedämpft, b gedämpft.

Die meisten Schwingungen sind nicht harmonisch, sondern gehorchen einer allgemeineren periodischen Funktion $\xi = f(t)$. Nach einem Satze von FOURIER aber kann man eine solche Funktion in allen hier in Betracht kommenden Fällen in eine Reihe von folgender Art entwickeln:

$$\xi = f(t) = A_1 \sin(\omega t + a_1) + A_2 \sin(2\omega t + a_2) + A_3 \sin(3\omega t + a_3) + \cdots\cdots, \tag{4}$$

Man kann also eine beliebige Schwingung als Summe von harmonischen Schwingungen mit den Kreisfrequenzen ω, 2ω, 3ω usw. darstellen. Die Schwingung mit der Kreisfrequenz ω nennt man die Grundschwingung, die folgenden die 1., 2., 3. usw. Oberschwingung.

118. **Schwingungsgleichung. Gedämpfte Schwingung.** Unter den mechanischen Schwingungen sind diejenigen besonders wichtig, die unter der Wirkung einer elastischen Kraft erfolgen. Wird eine Masse m, die sich unter der Wirkung einer solchen Kraft in einer Gleichgewichtslage befindet, aus dieser entfernt, so führt er Schwingungen um diese Lage aus. Ist seine Entfernung aus der Gleichgewichtslage nur klein, so gilt für die Kraft k, die ihn wieder in diese zurücktreibt, das HOOKEsche Gesetz (§ 82), d. h. die Kraft ist der Entfernung ξ aus der Ruhelage proportional. Es ist also

$$k = m \frac{d^2\xi}{dt^2} = -\alpha\xi. \tag{5a}$$

Wir wollen annehmen, daß zur Zeit $t = 0$ die Masse gerade die größere Entfernung ξ_0 aus ihrer Ruhelage hat. Dann lautet die Lösung dieser Gleichung

$$\xi = \xi_0 \cos \omega t, \quad \text{wobei} \quad \omega = \sqrt{\frac{\alpha}{m}}. \tag{6a}$$

Die Masse führt also eine harmonische Schwingung von der Kreisfrequenz ω und der Amplitude ξ_0 aus. Diese ist zeitlich konstant, die Schwingung ist ungedämpft. Die Kreisfrequenz ω heißt die Eigenfrequenz, die Schwingungszahl $\nu = \omega/2\pi$ die Eigenschwingungszahl des betreffenden Systems.

Eine Schwingung stellt einen ständigen Wechsel zwischen kinetischer und potentieller Energie des schwingenden Systems dar. Bei einer ungedämpften Schwingung bleibt die Summe dieser Energien konstant. In Wirklichkeit findet stets, insbesondere durch Reibung, eine Energieabgabe an die Umgebung statt, die Schwingungsenergie nimmt mit der Zeit ab. Die von der Reibung herrührende bewegungshemmende Kraft kann man im allgemeinen der Geschwindigkeit $d\xi/dt$ der schwingenden Masse proportional, also gleich $-\varrho\, d\xi/dt$, setzen (§ 116, Gl. 12), wobei ϱ eine durch die besonderen Verhältnisse des Vorgangs gegebene Konstante ist. Wir erhalten demnach für eine solche gedämpfte Schwingung an Stelle von Gl. 5a

$$k = m\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\alpha\xi - \varrho\frac{d\xi}{dt}. \tag{5b}$$

Unter der Voraussetzung, daß die Dämpfung gering ist, lautet die Lösung dieser Differentialgleichung bei der gleichen Anfangsbedingung wie oben

$$\xi = \xi_0 e^{-\beta t}\left(\cos\omega t + \frac{\beta}{\omega}\sin\omega t\right), \quad \text{wobei } \beta = \frac{\varrho}{2m} \quad \text{und} \quad \omega = \sqrt{\frac{\alpha}{m} - \left(\frac{\varrho}{2m}\right)^2}. \tag{6b}$$

Die Kreisfrequenz der gedämpften Schwingung eines Systems ist also kleiner als ohne Dämpfung. Als Amplitude der Schwingung haben wir die Größe $\xi_0 e^{-\beta t}$ zu betrachten. Diese nimmt mit der Zeit bis zum Wert Null ab (Abb. 120b). Sei τ die Dauer einer Vollschwingung und setzen wir $\beta\tau = \Lambda$, so erhalten wir für die einzelnen Maximalamplituden von $t = 0$ an die Werte $\xi_0 = \xi_0$, $\xi_1 = \xi_0 e^{-\Lambda}$, $\xi_2 = \xi_0 e^{-2\Lambda}$ usw. oder allgemein für die Amplitude nach n Vollschwingungen $\xi_n = \xi_0 e^{-n\Lambda}$. Es ist demnach die Differenz der natürlichen Logarithmen je zweier aufeinanderfolgender Amplituden

$$\log \xi_n - \log \xi_{n+1} = \Lambda$$

also eine konstante Größe. Man nennt daher Λ das logarithmische Dekrement der gedämpften Schwingung.

Dividieren wir Gl. 5b durch m und setzen wir die Kreisfrequenz der ungedämpften Schwingung $\sqrt{\frac{\alpha}{m}} = \omega_0$ und wieder $\frac{\varrho}{2m} = \beta$, so erhalten wir die Gleichung

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + 2\beta\frac{d\xi}{dt} + \omega_0^2\xi = 0. \tag{7}$$

Dies ist die allgemeine Form für jede gedämpfte harmonische Schwingung, sofern die Reibung der Geschwindigkeit proportional ist.

119. **Saitenschwingungen.** Ein oft vorkommender Fall einer elastischen Schwingung ist der, daß ein fester Körper, dessen Länge beträchtlich größer ist als seine Dicke, an seinen beiden Enden fest eingespannt ist, während seine übrigen Teile elastische Schwingungen ausführen. Beispiele hierfür sind die Saiten der Musikinstrumente. Als Modell einer Saite können wir uns eines Gummischlauchs von einigen Metern Länge bedienen, der an seinem einen Ende befestigt ist. Das andere Ende spannen wir mit der Hand. Entfernt man den

Schlauch zwischen Hand und Wand aus seiner Ruhelage, so führt er gedämpfte Schwingungen um diese aus. Wir können ihn in dauernder Schwingung erhalten, wenn wir die Hand im Tempo der Eigenschwingung ein wenig auf und ab bewegen. Die Schwingung ist in Abb. 121a dargestellt. In der Mitte ist ein sog. Schwingungsbauch B, an den Enden sind sog. Schwingungsknoten K. Das in der Hand befindliche Ende ist als ein festes Ende zu betrachten. Die kleine Bewegung der Hand dient nur dazu, den von der Luftreibung herrührenden Energieverlust der Schwingung zu ersetzen. Ändert man bei gleichbleibender Länge die Spannung k, so beobachtet man, daß man mit zunehmender Spannung die Hand schneller bewegen muß: Die Eigenfrequenz, d.h. die Schwingungszahl ν des Schlauches ist in gewissen Grenzen der Spannung proportional. Ändert man bei gleichbleibender Spannung die Länge, so findet man, daß die Schwingungszahl der Länge l umgekehrt proportional ist. Also

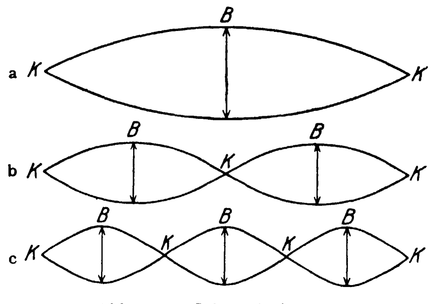


Abb. 121. Saitenschwingungen.

$$\nu = \text{const.}\,\frac{k}{l}. \tag{8}$$

Ferner aber zeigt sich, daß man einen gespannten Schlauch auch dann in Schwingung erhalten kann, wenn man die Hand zwei-, drei-, viermal usw. so schnell bewegt wie bei dem ersten Versuch. In diesen Fällen nimmt die Schwingung des Schlauchs die in Abb. 121b, c dargestellten Formen an. Diese Schwingungen sind Oberschwingungen des Schlauches. Bei der ersten Oberschwingung befindet sich außer an den beiden Enden auch in der Mitte ein Knoten K, und je ein Bauch B in $^1/_4$ und $^3/_4$ der Länge. Der Schlauch schwingt also so, als bestehe er aus zwei gleichen Stücken von je der halben Länge. Bei der zweiten Oberschwingung befinden sich Knoten K an den Enden und in $^1/_3$ und $^2/_3$ der Länge und Bäuche B in $^1/_6$, $^3/_6 = {}^1/_2$ und $^5/_6$ der Länge usw.

Entsprechende Erscheinungen zeigen sich bei elastischen Stäben, welche an einem Ende oder an beiden Enden eingespannt sind. Am freien Ende ist im ersten Fall stets ein Schwingungsbauch, im zweiten Fall in der Mitte stets ein Schwingungsbauch oder ein Schwingungsknoten.

120. Schwingungen von Luftsäulen. Abb. 122 stelle ein an beiden Enden geschlossenes und mit Luft oder einem andern Gase gefülltes Rohr dar. Eine solche Luftsäule ist infolge der elastischen Eigenschaften der Luft schwingungsfähig, und zwar bewegen sich bei einer Schwingung ihre Teilchen in der Richtung der Rohrachse periodisch hin und her, bei der Grundschwingung in der Rohrmitte am stärksten, während sie an den Enden stets in Ruhe sind (Abb. 122a und b). An den Enden der Luftsäule sind Schwingungsknoten, in der Mitte ist ein Schwingungsbauch. Auch hier gibt es Oberschwingungen, deren Schwingungs-

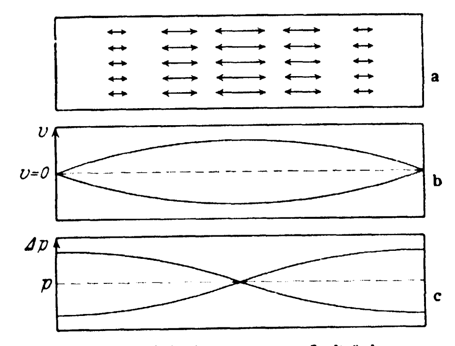


Abb. 122. Schwingungen von Luftsäulen. a Bewegung der Luftteilchen, b graphische Darstellung der Amplituden der Bewegung (diese selbst erfolgt, wie in a dargestellt), c Amplituden des Drucks.

zahlen das 2-, 3-, 4fache usw. der Grundschwingung sind. Die Schwingungszahl ν der Grundschwingung ergibt sich aus der Länge l der Luftsäule und der Schallgeschwindigkeit c (§ 138) zu

$$\nu = \frac{c}{2l}. \tag{9}$$

Mit der Bewegung der Luftteilchen sind periodische Druckänderungen Δp verbunden, und zwar sind diese an den geschlossenen Enden und bei den Oberschwingungen außerdem in den Schwingungsknoten am stärksten, in den

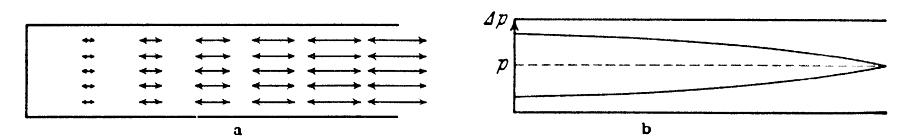


Abb. 123.
Grundschwingung einer einseitig offenen Luftsäule. a Bewegung der Luftteilchen, b Amplituden des Drucks.

Schwingungsbäuchen Null. Man sagt daher, daß mit jedem Schwingungsbauch ein Druckknoten und mit jedem Schwingungsknoten ein Druckbauch zusammenfällt (Abb. 122c).

Eine Luftsäule, welche an ihren beiden Enden offen ist, ist ebenfalls schwingungsfähig. Bei ihr befinden sich an den offenen Enden stets Schwingungsbäuche (Druckknoten). Bei der Grundschwingung befindet sich in der Mitte ein Schwingungsknoten (Druckbauch). Überhaupt liegen die Verhältnisse hier, auch bei den Oberschwingungen, genau umgekehrt, wie bei der beiderseits geschlossenen Luftsäule. Für die Schwingungszahl gilt ebenfalls Gl. 9.

Eine an ihrem einen Ende offene, am andern Ende geschlossene Luftsäule (Abb. 123a und b) hat am geschlossenen Ende stets einen Schwingungsknoten (Druckbauch), am offenen Ende stets einen Schwingungsbauch (Druckknoten). Die Schwingungszahl der Grundschwingung ist

$$\nu = \frac{c}{4l}, \tag{10}$$

also bei gleicher Länge nur halb so groß, wie wenn beide Enden offen oder geschlossen sind. In diesem Falle kommen nur solche Oberschwingungen vor, deren Schwingungszahlen das 3-, 5-, 7fache usw. der Grundschwingung sind.

Der experimentelle Nachweis dieser Gesetzmäßigkeiten wird am besten mit Orgelpfeifen (§ 145 und 150) gegeben.

121. Erzwungene Schwingungen. Resonanz. Auf einen schwingungsfähigen Körper, dessen Eigenschwingung die Schwingungszahl ν_0 habe, wirke eine periodische Kraft $k = k_0 \sin 2\pi\nu t$. Er schwingt dann mit der Periode ν der auf ihn wirkenden Kraft (erzwungene Schwingung). Voraussetzung hierfür ist aber das Vorhandensein einer, wenn auch geringen Dämpfung, da der Körper sonst, außer im Falle der Resonanz (s. u.) überhaupt nicht in gleichmäßige Schwingungen gerät.

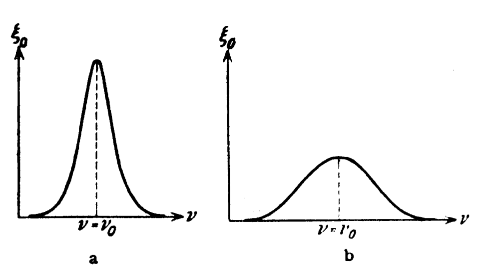


Abb. 124. Amplitude ξ_0 einer erzwungenen Schwingung als Funktion der erregenden Schwingungszahl ν. a Dämpfung klein, b Dämpfung größer.

Die Schwingungsweite ξ_0 der erzwungenen Schwingung ist bei nicht sehr großer Dämpfung am größten, wenn $\nu = \nu_0$. Diesen Fall bezeichnet man als Resonanz. Je mehr sich ν von ν_0 unterscheidet, um so kleiner wird ξ_0 (Abb. 124).

Je geringer die Dämpfung ist, um so schmaler ist der Bereich, in dem der Körper merklich in Mitschwingungen versetzt wird, um so größer ist aber auch im Resonanzbereich seine Schwingungsweite. Zwischen erregender und erzwungener Schwingung besteht eine Phasendifferenz, deren Größe von den Schwingungszahlen und dem Grade der Dämpfung abhängt.

Die Schwingungen eines Körpers können bei Resonanz sehr heftig werden. Man muß bei Maschinen darauf achten, daß nicht in den Gebäuden schwingungsfähige Teile (Träger, Böden) vorhanden sind, deren Eigenschwingung mit der Tourenzahl einer Maschine übereinstimmt, da dadurch Gefahren für das Gebäude entstehen können. Aus diesem Grunde ist auch vielfach das Überschreiten von Brücken durch Kolonnen im Marschschritt verboten, weil das Tempo der gleichmäßigen Schritte vieler Menschen zufällig mit dem Tempo der Eigenschwingung der Brücke übereinstimmen und dadurch die Gefahr einer zu starken Schwingung der Brücke eintreten kann. Weitere Fälle von Resonanz s. § 145.

122. **Fortpflanzung von Störungen.** Wird ein Teilchen eines Körpers durch irgendeine Ursache aus seiner natürlichen Ruhelage gebracht, also das innere Gleichgewicht des Körpers an dieser Stelle gestört, so wirkt diese Störung auf die benachbarten Teilchen ein. Die Störung pflanzt sich als sog. Welle in dem Körper fort. Ist der Körper in allen Richtungen gleich beschaffen, so schreitet die Störung in allen Richtungen mit gleicher Geschwindigkeit c fort. Ist sie zur Zeit $t = 0$ von ihrem Ursprungsort $r = 0$ ausgegangen, so hat sie nach der Zeit t ringsum die Oberfläche einer Kugel vom Radius $r = ct$ erreicht. Sie bildet eine Kugelwelle (Abb. 125).

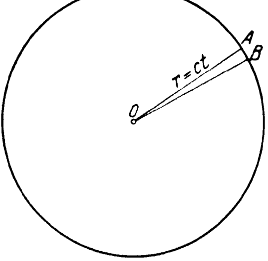


Abb. 125. Kugelwelle.

Betrachten wir ein sehr kleines Stück einer Kugelwelle (OAB in Abb. 125) in großer Entfernung vom Ausgangspunkt O, so können wir das kleine Stück AB der Kugelfläche oft mit ausreichender Annäherung als eben ansehen. Eine Welle, bei der wir dies voraussetzen, heißt eine ebene Welle.

Einen aus einer Kugelwelle herausgeschnittenen sehr schmalen Kegel, dessen Querschnitt wir als außerordentlich klein annehmen, nennt man einen Strahl bzw. ein Strahlenbündel. Man stellt einen Strahl durch eine Linie dar. (Dies kommt hauptsächlich bei den Lichtwellen in Betracht, Lichtstrahl, vgl. § 397). Man kann sich daher eine Kugelwelle auch aus unendlich vielen solchen Strahlen bestehend denken.

123. **Periodische Wellen.** Von besonderem Interesse ist der Fall, daß in einem Punkte eines Mediums eine periodische Störung erfolgt, also an dieser Stelle der Ausgangspunkt einer periodischen Welle liegt. Das kann so geschehen, daß sich an jener Stelle ein schwingender Körper befindet, der die ihm benachbarten Teile des Mediums periodisch in Bewegung setzt. Diese werden dann erzwungene periodische Bewegungen ausführen, welche die gleiche Schwingungszahl ν haben, wie der schwingende Körper. Es habe die Bewegung des schwingenden Körpers die Kreisfrequenz ω. Seine Schwingung erfolge also nach der Gleichung $\xi = \xi_0 \sin \omega t$. Dann führt jedes Teilchen des Mediums eine Schwingung aus nach der Gleichung

$$\eta = \eta_0 \sin (\omega t + a)\,, \tag{11}$$

wobei η seine Entfernung aus seiner Ruhelage, η_0 seine Schwingungsweite bedeutet. Da die Störung die Zeit r/c gebraucht, um von dem Störungszentrum bis in die Entfernung r zu gelangen, wenn c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Stö-

rung ist, so herrscht zur Zeit t in der Entfernung r vom Störungszentrum ein Zustand, der dem Zustand im Zentrum zur Zeit $t - r/c$ entspricht. Es ist also die Phasenkonstante a in Gl. 11 gleich $-\omega r/c$, wenn a im Störungszentrum ($r = 0$) den Wert Null hat, so daß im Abstande r

$$\eta = \eta_0 \sin \omega \left(t - \frac{r}{c}\right). \qquad (12)$$

Die Schwingungsweite η_0 hängt bei einer Kugelwelle von der Entfernung vom Zentrum der Welle ab. Bei einer ebenen Welle können wir sie als konstant ansehen. Befinden sich in einer ebenen Welle zwei Punkte im Abstande x voneinander in Richtung der Fortpflanzung der Welle, so ist ihre Phasendifferenz $\omega \frac{x}{c}$.

Die Gesamtheit der Punkte, in denen die Wirkung der gleichen Ursache — d. h. des gleichen Ereignisses im Störungszentrum — gleichzeitig eintritt, nennt man eine Wellenfläche. Die Wellenflächen sind also bei einer Kugelwelle Kugelflächen, bei einer ebenen Welle Ebenen.

In manchen Fällen ist die Ausbreitung von Wellen auf die Grenzfläche zweier Körper (Flüssigkeiten oder Gase) beschränkt. Dieser Fall liegt bei den Wasserwellen vor und an der Grenze zweier Luftschichten, welche verschiedene Strömungsrichtungen haben. Diese letzteren Wellen sind kenntlich an den wellenartigen Wolkenbildungen, die man an der Grenzfläche beobachtet.

Es sei bemerkt, daß es zwei vollkommen verschiedene Kräfte sind, die die periodischen Wellenbewegungen einer in ihrem Gleichgewicht gestörten Flüssigkeitsoberfläche bewirken. Auf ein aus seiner Gleichgewichtslage gebrachtes Teilchen einer Flüssigkeitsoberfläche wirkt erstens die Schwerkraft, die die Oberfläche horizontal zu stellen sucht, zweitens aber die Oberflächenspannung (§ 92), die dahin wirkt, daß die Oberfläche möglichst klein, also bei einer freien Flüssigkeitsoberfläche eben ist. Bei den großen Wellen, wie man sie als deutliche Wellenbewegung von Wasserflächen beobachtet, überwiegt vollkommen die Wirkung der Schwerkraft (Schwerewellen). Dagegen rühren die winzigen Wellchen, die Kräuselwellen, die beim Hinstreichen leichten Windes über eine Wasserfläche oder beim Anstoßen eines mit Flüssigkeit gefüllten Gefäßes auftreten, ganz überwiegend von der Oberflächenspannung her (Kapillarwellen).

Die Geschwindigkeit c, mit der sich eine Welle in einem Körper fortpflanzt, ist eine für die Beschaffenheit des betreffenden Körpers charakteristische Größe (vgl. § 125). Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Welle ist ebenso definiert wie die Geschwindigkeit eines Körpers (§ 17). Man kann sie messen, indem man die Zeit t bestimmt, die die Störung gebraucht, um von einem Punkte A zu einem in ihrer Fortpflanzungsrichtung in der Entfernung x gelegenen Punkte B zu gelangen, $c = x/t$. Daneben gibt es noch andere Methoden für periodische Wellen (§ 127).

Als Beispiel sei die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Störung in einem gespannten Schlauch (§ 119) erwähnt. Man kann sie z. B. auf folgende Weise messen. Man schlage mit der Hand kurz auf das eine Ende eines gespannten Schlauchs. Dann läuft die Störung an dem Schlauch, unter fortgesetzter Zurückwerfung an den Enden, hin und her. Man mißt die Zeit t, während derer die Störung n mal hin und her gelaufen ist. Der zurückgelegte Weg ist dann, wenn l die Länge des Schlauchs ist, $x = 2nl$, und es ergibt sich $c = 2\,nl/t$. Man findet hierbei, daß c um so größer ist, je stärker der Schlauch gespannt ist.

124. Wellenlänge. Wir betrachten eine ebene periodische Welle. Die Schwingung in einem Punkte $x = 0$ dieser Welle sei gegeben durch die Gleichung

$$\eta = \eta_0 \sin \omega t. \qquad (13)$$

Dann ist sie nach Gl. 12 in der Entfernung x (Abb. 126) dargestellt durch

$$\eta' = \eta_0 \sin \omega \left(t - \frac{x}{c}\right). \tag{14}$$

η' und η sind im allgemeinen zur gleichen Zeit t verschieden. Sie sind nur dann zu jeder Zeit gleich, wenn

$$\sin \omega\,(t - x/c) = \sin \omega t, \quad \text{oder} \quad \omega\,(t - x/c) = \omega t \pm 2\,n\pi,$$

wobei n eine ganze Zahl bedeutet, also wenn

$$x = \pm n \frac{2\pi c}{\omega} = \pm n \frac{c}{\nu} = \pm n\lambda. \tag{15}$$

Der nächste Punkt, in dem dies erfüllt ist, ist gegeben durch $n = 1$, also $x = c/\nu = \lambda$. Man bezeichnet λ als die Wellenlänge. Punkte, in denen jeweils der gleiche Zustand herrscht (Punkte gleicher Phase), haben voneinander, in Richtung der Fortpflanzung der Welle gemessen, einen Abstand von einer, zwei, drei usw. Wellenlängen. Es ist also

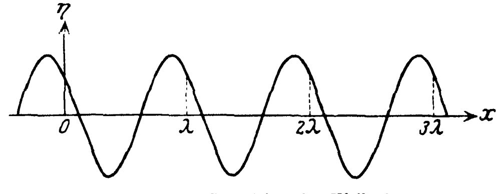


Abb. 126. Zur Definition der Wellenlänge.

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \quad \text{oder} \quad \lambda\nu = c\,. \tag{16}$$

Die Wellenlänge hängt demnach bei gegebenem ν von der Art des Mediums, in dem die Welle fortschreitet, d. h. von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit c in dem Medium, ab.

125. Longitudinale und transversale Wellen. Polarisation. Die Bewegung der gestörten Teilchen in einer Welle kann entweder eine Hin- und Herbewegung sein, welche in derjenigen Richtung erfolgt, in welcher sich die Welle fortpflanzt, oder diese Bewegung kann senkrecht zu dieser Richtung erfolgen. Eine Welle der ersten Art heißt eine longitudinale Welle, eine der zweiten Art eine transversale Welle.

Longitudinale Wellen kommen in allen Körpern vor, transversale mechanische Wellen sind nur in festen Körpern möglich. Wo beide Arten von Wellen vorkommen, haben die transversalen Wellen eine größere Fortpflanzungsgeschwindigkeit als die longitudinalen. Von den Erdbebenherden auf der Erde gehen sowohl longitudinale wie transversale Wellen und außerdem Oberflächenwellen, die längs der Erdoberfläche verlaufen, aus. Diese kommen an den anderen Punkten der Erdoberfläche wegen ihrer verschiedenen Geschwindigkeit zu verschiedenen Zeiten an. Je größer der Abstand des Herdes vom Beobachtungsort ist, um so größer ist diese Zeitdifferenz. Man kann aus ihr den Abstand berechnen und damit die Entfernung eines Erdbebenherdes wenigstens ungefähr angeben.

Bei den mechanischen Wellen kann man meist ohne weiteres unterscheiden, ob es sich um eine longitudinale oder eine transversale Welle handelt. Für die spätere Anwendung in der Optik ist es aber wichtig, hier ein besonders charakteristisches Merkmal hervorzuheben. Eine longitudinale Schwingung ist außer durch ihre Schwingungszahl nur durch ihre Stärke (Amplitude) bestimmt. Eine transversale Schwingung aber kann bei gleicher Schwingungszahl und Amplitude noch in allen verschiedenen zur Fortpflanzungsrichtung senkrechten Richtungen erfolgen. Erfolgt sie nur in einer einzigen Richtung, so heißt eine solche Schwingung linear polarisiert (Abb. 127a). Sie kann aber auch in

zwei zueinander senkrechten Richtungen gleichzeitig erfolgen, sich also aus zwei linear polarisierten Schwingungen von gleicher Kreisfrequenz ω zusammensetzen, die verschiedene Amplitude haben können. Ihre Amplituden seien η und ϑ, ihre Phasendifferenz ist $\pi/2$. Dann sind die beiden Schwingungen gegeben durch die Gleichungen

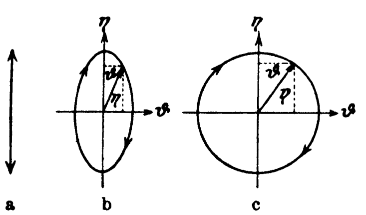


Abb. 127. Polarisierte Schwingungen. a linear, b elliptisch, c zirkular polarisiert.

$$\eta = \eta_0 \sin \omega t \text{ und } \vartheta = \vartheta_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \vartheta_0 \cos \omega t.$$

Eine solche Schwingung ist durch Abb. 127b dargestellt. Man nennt sie elliptisch polarisiert. Sind die beiden Schwingungsweiten η_0 und ϑ_0 gleich, so erhalten wir eine zirkular polarisierte Schwingung (Abb. 127c).

Die schon oben als Beispiel benutzte einfache Hin- und Herschwingung eines gespannten Schlauches ist linear polarisiert. Führen wir den Schlauch durch einen Schlitz hindurch, so kann die Schwingung nur dann ungestört erfolgen, wenn der Schlitz in der Richtung orientiert ist, in der die Schwingungen erfolgen. Andernfalls wird die Schwingung unvollkommen oder gar nicht hindurchgelassen. Man kann die Schwingung durch Drehen des Schlitzes unterdrücken. Es ist eine charakteristische Eigenschaft einer transversalen Schwingung, daß sie polarisiert sein kann und daß man Gebilde konstruieren kann, welche bei einer Drehung um die Fortpflanzungsrichtung einer linear polarisierten Schwingung als Achse je nach ihrer Stellung die Schwingung hindurchlassen oder ganz oder zum Teil aufhalten. Der auf diese Weise geführte Nachweis der Polarisierbarkeit ist ein eindeutiger Beweis für den transversalen Charakter einer Welle.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit longitudinaler Wellen ist in festen und flüssigen Körpern

$$c = \sqrt{\frac{E}{\varrho}} \text{ bzw. } = \sqrt{\frac{\chi}{\varrho}} \text{ cm/sec}, \tag{17}$$

wobei E der Elastizitätsmodul (§ 82) bzw. χ die Kompressibilität (§ 100) und ϱ die Dichte (alle im CGS-System gemessen) der betreffenden Substanz ist. Diese sog. NEWTONsche Gleichung folgt aus der Elastizitätstheorie. Für Gase ist

$$c = \sqrt{\frac{p \cdot \varkappa}{\varrho}} \tag{18}$$

(p = Druck des Gases). $\varkappa$ ist für einatomige Gase gleich 1,67, für zweiatomige Gase, also für die Luft, gleich 1,40, für alle andern Gase gleich 1,33 (vgl. § 172, dort findet sich auch die Erklärung für das Auftreten des Faktors $\varkappa$. Zunächst sollte man $c = \sqrt{\frac{p}{\varrho}}$ erwarten, da nach § 100 die Kompressibilität der idealen Gase gleich p ist).

126. Interferenz. Zwei ebene Wellen von gleicher Schwingungsweite und Schwingungszahl, aber verschiedener Phase, sollen am gleichen Ort zusammentreffen. Die von der ersten erregte Störung sei gegeben durch $\eta_1 = \eta_0 \sin \omega t$, die von der zweiten erregte durch $\eta_2 = \eta_0 \sin(\omega t - \alpha)$. Die gesamte Störung ist dann

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 = \eta_0 [\sin \omega t + \sin(\omega t - \alpha)] = 2\eta_0 \cos\frac{\alpha}{2} \sin\left(\omega t - \frac{\alpha}{2}\right). \tag{19}$$

Da die Phasendifferenz α eine konstante, d. h. nicht von t abhängige Größe ist, so haben wir $2\eta_0 \cos \alpha/2$ als die Schwingungsweite der gesamten Schwingung

zu betrachten. Ist $\cos \alpha/2 = \pm 1$, also $\alpha = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi$ usw. $= 2n\pi$ ($n =$ ganze Zahl), so hat die Schwingungsweite ihren größten möglichen Wert $2\eta_0$. Man sagt dann, daß die Schwingungen „in Phase" sind. Ist aber $\cos \alpha/2 = 0$, also $\alpha = (2n+1)\pi$, so ist die Schwingungsweite gleich Null. Dazwischen liegen Werte zwischen 0 und $2\eta_0$. Bei gleichzeitigem Wirken zweier Schwingungen hängt es also von ihrer Phasendifferenz α ab, ob sie sich verstärken oder schwächen oder sogar gegenseitig aufheben (Abb. 128). Diese Erscheinung heißt Interferenz. Der Nachweis der

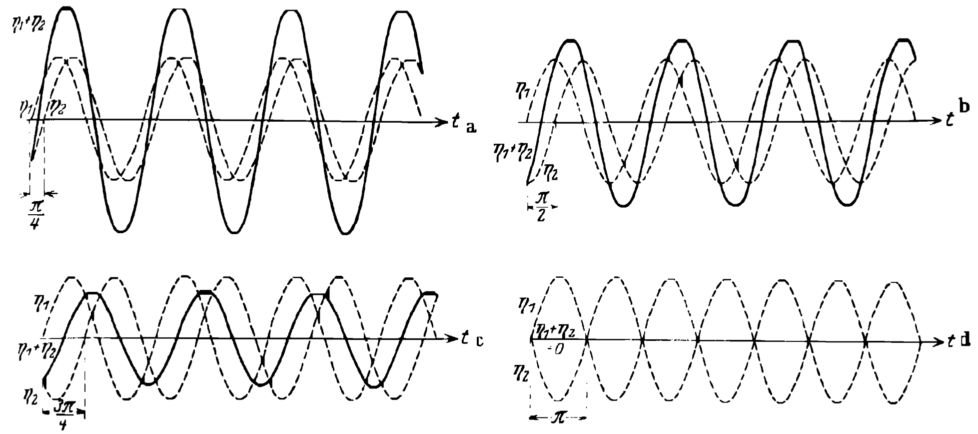
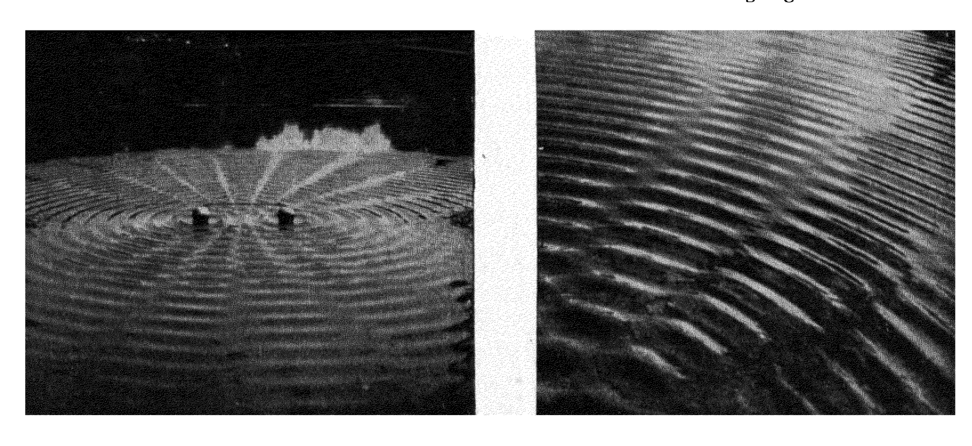


Abb. 128. Interferenz von Wellen. Phasendifferenz a) $\pi/4$, b) $\pi/2$, c) $3\pi/4$, d) π.

Interferenzfähigkeit bei einer Erscheinung ist stets ein eindeutiger Beweis dafür, daß es sich um eine periodische Schwingung handelt.

Abb. 129 zeigt die Interferenz zweier Systeme von Wasserwellen, welche durch zwei periodisch auf und ab bewegte Körper erzeugt wurden. Man erkennt deutlich im Felde der Wellen die Maxima und Minima der Bewegung.



a Abb. 129. b
Interferenz von Wasserwellen (nach Grimsehl). Rechts ein Teil des linken Bildes vergrößert.

127. Stehende Wellen. Zwei ebene Wellen von gleicher Schwingungszahl und Schwingungsweite sollen in genau entgegengesetzter Richtung laufen. Im

Punkte $x = 0$ sollen sie zur Zeit $t = 0$ die Phasendifferenz 0 haben, also beide durch die Gleichung $\eta_1 = \eta_2 = \eta_0 \sin \omega t$ dargestellt sein. Wir betrachten jetzt einen Punkt in der Entfernung x (Abb. 130). Nach § 123 ist die nach rechts laufende Welle in diesem Punkt dargestellt durch die Gleichung $\eta_1 = \eta_0 \sin \omega (t - x/c)$ und die nach links laufende durch die Gleichung $\eta_2 = \eta_0 \sin \omega (t + x/c)$. Die gesamte Störung in diesem Punkte ist also

$$\begin{aligned} \eta = \eta_1 + \eta_2 = \eta_0 \left[\sin \omega \left(t - \frac{x}{c}\right) + \sin \omega \left(t + \frac{x}{c}\right)\right] &= 2\eta_0 \cos \omega \frac{x}{c} \sin \omega t \\ &= 2\eta_0 \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin \omega t. \end{aligned} \tag{20}$$

Der von der Zeit unabhängige Ausdruck $2\eta_0 \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}$ ist als die Schwingungsweite der Schwingung im Punkte x anzusehen. Man erkennt, daß sie von der Entfernung x periodisch abhängt. Sie ist Null für $\cos 2\pi \frac{x}{\lambda} = 0$, also $x = \pm \frac{\lambda}{4}$, $\pm \frac{3\lambda}{4}$ usw. $= \pm \frac{2n+1}{4} \lambda$, und hat ihren größten Wert für $\cos 2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm 1$, also $x = \pm \frac{n}{2} \lambda$, wobei n eine ganze Zahl bedeutet. Längs des Weges der beiden Wellen wechseln also Punkte ab, in denen die Schwingung ein Maximum hat, und solche, in denen sie verschwindet. Erstere nennt man wieder Bäuche, letztere Knoten (vgl. § 130). Die Erscheinung heißt eine *stehende Welle*. Der Abstand zweier Knoten bzw. zweier Bäuche beträgt eine halbe Wellenlänge. Man kann durch Messung des Abstandes zweier Knoten oder Bäuche in einer stehenden Welle also die Wellenlänge λ bestimmen und daraus, wenn die Schwingungszahl ν bekannt ist, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c nach Gl. 5 berechnen. Stehende Wellen bilden sich z. B. bei der Reflexion einer Welle an einer Wand durch Interferenz der ankommenden mit der reflektierten Welle.

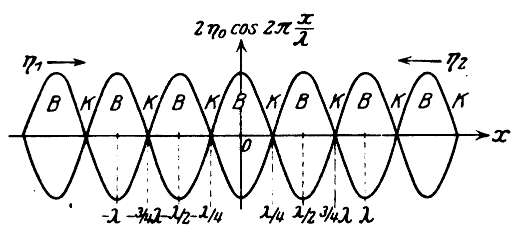


Abb. 130. Stehende Welle. Die beiden Sinuskurven stellen in diesem Fall nicht η_1 und η_2 dar, sondern sie bezeichnen die Werte, zwischen denen $\eta_1 + \eta_2 = \eta$ an den verschiedenen Punkten der Strecke x hin- und herschwankt.

Man kann jede Schwingung eines Körpers (z. B. einer Saite eines Instrumentes) als eine stehende Welle betrachten, die dadurch entsteht, daß in dem Körper zwei einander entgegenlaufende und an den Grenzen immer wieder reflektierte Wellen miteinander interferieren.

128. Schwebungen. Eine weitere Interferenzerscheinung sind die *Schwebungen*. Sie entstehen, wenn ein Punkt von zwei Wellen getroffen wird, welche nicht sehr verschiedene Schwingungsweiten und nicht sehr verschiedene Schwingungszahlen ν_1 und ν_2 haben, so daß $\nu_1 - \nu_2$ klein gegen ν_1 und ν_2 ist. Die gesamte, von den beiden Schwingungen erregte Störung ist dann bei gleichen Schwingungsweiten η_0 gegeben durch

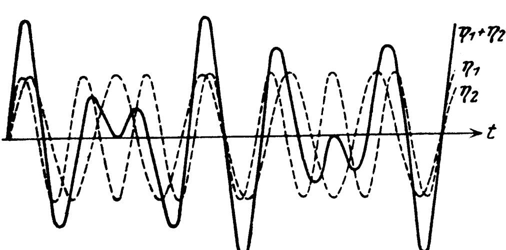


Abb. 131. Schwebung. $\nu_1 : \nu_2 = 6 : 5$.

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 = \eta_0 (\sin 2\pi \nu_1 t + \sin 2\pi \nu_2 t) = 2\eta_0 \cos 2\pi \frac{\nu_1 - \nu_2}{2} t \cdot \sin 2\pi \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} t. \tag{21}$$

Der Faktor $\cos 2\pi \frac{\nu_1 - \nu_2}{2} t$ ist, weil voraussetzungsgemäß $\nu_1 - \nu_2$ klein ist, nur sehr langsam veränderlich. Wir können den Vorgang so auffassen, daß die Störung die Schwingungszahl $\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}$ (Mittelwert von ν_1 und ν_2 und beiden sehr nahezu gleich) hat und eine langsam periodisch veränderliche Schwingungsweite $2\,\eta_0 \cos 2\pi \frac{\nu_1 - \nu_2}{2} t$. Der Verlauf einer solchen Schwebung ist in Abb. 131 dargestellt, aber zwecks größerer Deutlichkeit für ein relativ großes Verhältnis $\nu_1 : \nu_2$.

129. **DOPPLER-Effekt.** Innerhalb eines Mediums bewege sich ein Körper, welcher eine Welle $\eta = \eta_0 \sin 2\pi \nu t$ aussendet, mit der Geschwindigkeit v. Wir fragen nach der in einem Punkte, von dem sich der Körper fortbewegt, auftretenden Schwingung.

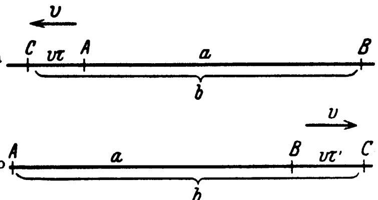


Abb. 132. Zur Ableitung des DOPPLER-Effektes. a Quelle der Schwingung bewegt, Beobachter ruhend; b Quelle der Schwingung ruhend, Beobachter bewegt.

Zur Zeit $t = 0$ befinde sich der mit der Geschwindigkeit v bewegte schwingende Körper in A. Der Beobachter befinde sich ruhend in B (Abb. 132a). Die Dauer einer Schwingung des Körpers ist $\tau = 1/\nu$. Zur Zeit $t = 0$ sende der Körper gerade ein Schwingungsmaximum ($\eta = \eta_0$) aus. Wenn sich die von ihm ausgehende Welle mit der Geschwindigkeit c ausbreitet, so erreicht dieses Schwingungsmaximum den Beobachter nach der Zeit $t_1 = a/c$. Das nächste Schwingungsmaximum wird um die Zeit τ später ausgesandt, und der schwingende Körper befinde sich alsdann im Punkte C. Seine Entfernung vom Beobachter hat sich um die Strecke $v\tau$ auf $b = a + v\tau$ vergrößert. Die Schwingung braucht also jetzt die Zeit b/c, um den Beobachter zu erreichen. Dies erfolgt zur Zeit $t_2 = \tau + b/c$. Zwischen dem Eintreffen der beiden Schwingungsmaxima liegt für den Beobachter also nicht die Zeit τ, sondern die Zeit $\tau' = t_2 - t_1$. Mit Hilfe der vorstehenden Gleichungen erhält man leicht $\tau' = \tau(1 + v/c)$. Die von dem bewegten Körper ausgehende Welle hat also für den ruhenden Beobachter eine vergrößerte Schwingungsdauer und demnach eine kleinere Schwingungszahl $\nu' = 1/\tau'$, nämlich

$$\nu' = \frac{\nu}{1 + \frac{v}{c}}. \qquad (22\,\text{a})$$

Bewegt sich der schwingende Körper nicht von dem Beobachter weg, sondern auf ihn zu, so kehrt sich das Vorzeichen seiner Geschwindigkeit um, und es wird $\nu' = \nu/(1 - v/c)$. Man bezeichnet diese Erscheinung, die in der Akustik (§ 146) und der Optik (§ 451) eine wichtige Rolle spielt, nach ihrem Entdecker als DOPPLER-Effekt.

Etwas anders liegen die Verhältnisse, wenn der schwingende Körper ruht und der Beobachter sich bewegt. Wir nehmen jetzt an, daß dieser sich mit der Geschwindigkeit v von dem schwingenden Körper fortbewege (Abb. 132b). Dieser ruhe im Punkte A. Zur Zeit $t = 0$ sende er wieder gerade ein Schwingungsmaximum aus, und der Beobachter werde von diesem im Punkte B in der Entfernung a von A erreicht. Das geschieht zur Zeit $t_1 = a/c$. Das nächste Maximum wird um die Zeit τ später ausgesandt als das erste. Es erreiche den bewegten Beobachter in C. Er hat sich jetzt von dem schwingenden Körper um eine Strecke BC entfernt, die gleich $v\tau'$ ist, wenn τ' die Zeit bedeutet, die zwischen dem Eintreffen der beiden Maxima bei ihm liegt. Sein Abstand von dem schwingenden Körper beträgt daher jetzt $b = a + v\tau'$. Die Zeit t_2, zu der ihn das zweite Maximum erreicht, können wir auf zwei Weisen berechnen. Sie ist erstens gleich der Zeit t_1

zuzüglich der Zeit, die der Beobachter braucht, um von B nach C zu gelangen, also $t_2 = t_1 + \tau'$. Zweitens ist sie gleich der zwischen der Aussendung der zwei Maxima wirklich verstrichenen Zeit τ, zuzüglich der Zeit, die die Welle braucht, um von A nach C zu gelangen, also $t_2 = \tau + b/c$. Mit Hilfe der vorstehenden Beziehungen erhält man durch einfache Rechnung $\tau' = \tau/(1 - v/c)$ bzw. für die beobachtete Schwingungszahl

$$\nu' = \nu\left(1 - \frac{v}{c}\right). \tag{22b}$$

Bei Umkehrung der Bewegungsrichtung ergibt sich $\nu' = \nu(1 + v/c)$.

Man erhält also in den beiden betrachteten Fällen verschiedene beobachtete Schwingungszahlen, je nachdem ob der schwingende Körper sich bewegt und der Beobachter ruht oder umgekehrt. Sofern aber, wie das in allen wichtigen mechanischen Fällen stets der Fall ist, v klein gegen c ist, also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle groß gegen die Geschwindigkeit des schwingenden Körpers, bzw. des Beobachters, verschwindet dieser Unterschied praktisch. Denn wegen der Kleinheit von v/c können wir im ersten Falle auch schreiben $\tau' = \tau(1 + v/c)$, $\nu' = \nu(1 - v/c)$, und das ist dann mit der für den zweiten Fall geltenden Gleichung identisch. (Vgl. hierzu § 532.)

130. **Energietransport in einer Welle. Entfernungsgesetz.** Setzt eine in einem Medium befindliche Störungsquelle die Teilchen des Mediums in Bewegung, erzeugt sie also eine Welle in ihm, so leistet sie dabei auf Kosten ihrer eigenen Schwingungsenergie Arbeit. Die auf ein Teilchen des Mediums übertragene Energie wird aber — soweit nicht ein Teil davon durch Reibung in Wärme verwandelt wird — immer wieder an die nächstfolgenden Teilchen abgegeben. In einer Welle wandert also Energie durch das Medium. Die Welle überträgt Energie von einer Stelle an eine andere.

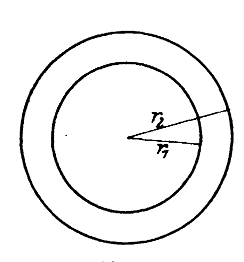


Abb. 133. Zum Energietransport in einer Welle.

Wir setzen jetzt voraus, daß wir es mit einer Kugelwelle zu tun haben und daß im Medium keine Energie verlorengeht. Wir denken uns um die Störungsquelle eine Kugel mit dem Radius r_1 und eine zweite mit dem größeren Radius r_2 geschlagen (Abb. 133). Sei E die Energie, die in 1 sec von der Störungsquelle ausgeht, so wandert davon durch jedes Quadratzentimeter der ersten Kugelfläche die Energie $J_1 = E/4\pi r_1^2$, durch jedes Quadratzentimeter der zweiten die Energie $J_2 = E/4\pi r_2^2$. Man nennt dies die Dichte des Energiestromes in den Entfernungen r_1 und r_2. Es verhält sich also

$$J_1 : J_2 = 1/r_1^2 : 1/r_2^2 = r_2^2 : r_1^2. \tag{23}$$

Die Energiestromdichte J nimmt mit dem Quadrat der Entfernung vom Störungszentrum ab. Das gilt jedoch nur für Wellen, die sich frei im Raum ausbreiten.

131. **Vorgänge an der Grenze zweier Medien.** Trifft eine Welle auf die Grenze zweier verschieden beschaffener Medien, so erleidet sie verschiedene Veränderungen. Ein Teil von ihr tritt nicht in das zweite Medium ein, sondern wird zurückgeworfen (reflektiert), der andere Teil geht in das andere Medium über, aber im allgemeinen unter Änderung seiner Richtung, er wird gebrochen. Es findet also stets eine Teilung der Energie an der Grenzfläche zweier Medien statt. Aber das Verhältnis der beiden Anteile kann sehr verschieden sein, es kann entweder der reflektierte oder der gebrochene Anteil weitaus überwiegen. Das ist sogar das häufigste.

132. Reflexion. Für die Reflexion eines Strahls gilt folgendes Gesetz: Der reflektierte Strahl liegt in derjenigen Ebene, die von dem einfallenden Strahl und dem Einfallslot gebildet wird, und bildet mit dem Einfallslot den gleichen Winkel α wie der einfallende Strahl (Abb. 134). Das Einfallslot ist das im Einfallspunkte eines Strahls auf der reflektierenden Fläche errichtete Lot.

Zwecks späterer Anwendung bei der Brechung sei hier eine Konstruktion von FRESNEL erwähnt, die zum gleichen Ergebnis führt. Es seien AB und CD zwei parallele Strahlen einer ebenen Welle, die unter dem Einfallswinkel $\alpha = ABF$ auf die Ebene HJ fallen (Abb. 135). Ist eine Wellenfläche (§ 123) im Strahl AB in B an dieser Ebene angekommen, so ist sie im Strahle CD erst im Punkte E, hat also im Strahle CD noch den Weg ED bis zur Ebene HJ zurückzulegen. Während dies geschieht, bewegt sich der bereits bei B reflektierte erste Strahl schon in seiner neuen Richtung und hat, bis der zweite Strahl in D angekommen ist, nach seiner Reflexion einen Weg von der Länge r, der ebenso groß ist wie die Strecke ED, zurückgelegt. Er ist also jedenfalls bis zu einem Punkt gekommen, der auf einem Kreise um B mit dem Radius r liegt. Nach FRESNEL ist nun die neue Richtung des ersten Strahls gleich der von BG, wobei G derjenige Punkt ist, in dem die von D aus an den Kreis gelegte Tangente den Kreis berührt. DG ist die Wellenfläche der reflektierten ebenen Welle. Nun ist $BD = BD$, $BG = ED$, $\sphericalangle BGD = \sphericalangle BED = 90^0$, folglich $\Delta BGD = \Delta BED$ und daher $\sphericalangle GBD = \sphericalangle EDB$. Dann ist aber auch $\sphericalangle FBG = \sphericalangle EDK = \sphericalangle ABF = \alpha$. Das ist das Reflexionsgesetz. Das gleiche gilt für jeden andern Strahl, der der gleichen ebenen Welle angehört. Der reflektierte Strahl liegt mit dem einfallenden Strahl und dem Einfallslot in der gleichen Ebene.

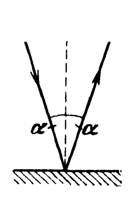


Abb. 134. Zum Reflexionsgesetz.

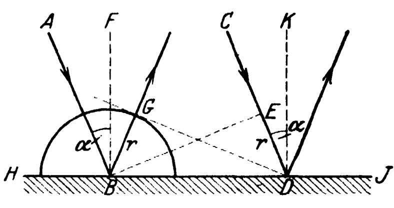


Abb. 135. FRESNELsche Konstruktion des reflektierten Strahls.

133. Brechung. Die Richtung, in der der aus einem Medium (I) in ein anderes (II) eintretende Strahl in diesem weiter verläuft, kann man nach FRESNEL auf Grund einer der soeben benutzten ganz analogen Konstruktion finden (Abb. 136). Es seien AB und CD zwei einer ebenen Welle angehörende Strahlen, die unter dem Einfallswinkel α auf die Trennungsfläche HJ zweier Medien I und II fallen. Ist der Strahl AB in B angekommen, so entspricht dem wie in § 132 in CD der Punkt E. Es sei nun c_1 die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle in I, c_2 diejenige in II. Dann ist die Welle, während sie im Strahl CD in I von E bis D läuft, im Strahl AB in II um eine Strecke r fortgeschritten, für welche gemäß der Definition der Geschwindigkeit gilt $r:ED = c_2:c_1$. Kennt man die beiden Geschwindigkeiten bzw. ihr Verhältnis, so kann man r konstruieren. Man hat jetzt, genau wie in § 132, mit r um B in II einen Halbkreis zu schlagen und von D aus die Tangente an ihn zu legen, welche ihn in G berühre. Dann ist BG die Richtung des Strahls in II. Es ist nun 1. $BD = ED/\sin\varphi_1$, 2. $BD = BG/\sin\varphi_2$. Ferner ist $\varphi_1 = \alpha$, $\varphi_2 = \beta$. Es folgt:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{ED}{BG} = \frac{c_1}{c_2} = n_{12}. \tag{24}$$

Dies ist das Brechungsgesetz. $c_1/c_2 = n_{12}$ nennt man den gegenseitigen Brechungsindex oder Brechungskoeffizienten der beiden Medien. Er

kann von der Schwingungszahl der Welle abhängen. Ist $c_1 > c_2$, so wird der Strahl dem Einfallslot zugebrochen ($\alpha > \beta$, Abb. 136a), im umgekehrten Falle wird er von ihm weggebrochen ($\alpha < \beta$, Abb. 136b).

Über die mit der Brechung zusammenhängende Totalreflexion s. § 411.

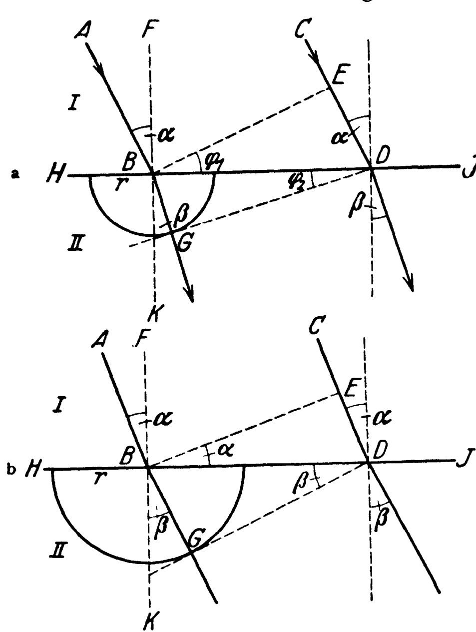


Abb. 136. FRESNELsche Konstruktion des gebrochenen Strahls. a $c_1 > c_2$, b $c_1 < c_2$.

134. Das FERMATsche Prinzip. Ein von FERMAT aufgestelltes Prinzip besagt, daß der Weg, den eine Welle zwischen zwei Punkten zurücklegt, stets ein solcher ist, daß die zu seiner Zurücklegung benötigte Zeit ein Extremum ist. In den meisten Fällen ist sie ein Minimum, weit seltener ein Maximum. Sobald eine Welle mit Materie in Wechselwirkung tritt, ist dieser zeitlich kürzeste Weg in der Regel nicht der geometrisch kürzeste, also nicht die gerade Linie zwischen den beiden Punkten. Als Beispiel nehmen wir den Fall der Brechung. Wir betrachten einen Strahl, der unter Brechung aus einem Medium in ein anderes eintritt. Die Geschwindigkeit der Welle sei im ersten Medium c_1, im zweiten c_2. Wir greifen zwei beliebige, in je einem der Medien gelegene Punkte A und B auf dem Strahl heraus (Abb. 137) und fragen nach der Zeit t, die der Strahl zur Zurücklegung des Weges von A nach B gebraucht. Dabei setzen wir die Gültigkeit des Brechungsgesetzes, Gl. 12, noch nicht voraus, der Weg ACB sei also vorläufig noch beliebig, d. h. von den beiden Strecken x und y, in die der Punkt C die Strecke DE teilt, sei nur ihre Summe DE, aber nicht ihr Verhältnis bekannt.

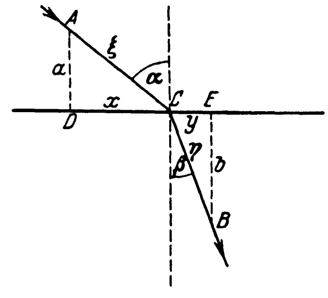


Abb. 137. Ableitung des Brechungsgesetzes aus dem FERMATschen Prinzip.

Die Zeit t, die die Welle zur Zurücklegung des Weges von A nach B benötigt, beträgt (Abb. 137)

$$t = \frac{\xi}{c_1} + \frac{\eta}{c_2} = \frac{1}{c_1}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{1}{c_2}\sqrt{y^2 + b^2}.$$

Da sie ein Minimum (oder Maximum) sein soll, so muß $\delta t = \frac{\partial t}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial t}{\partial y}\cdot\delta y = 0$ sein, also

$$\delta t = \frac{1}{c_1}\frac{x\,\delta x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{1}{c_2}\frac{y\,\delta y}{\sqrt{y^2 + b^2}} = 0.$$

Nun ist wegen $x + y = DE = \text{const.}$ $\delta x + \delta y = 0$, also $\delta y = -\delta x$, so daß

$$\frac{1}{c_1}\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1}{c_2}\frac{y}{\sqrt{y^2 + b^2}}, \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{c_1}\frac{x}{\xi} = \frac{1}{c_2}\frac{y}{\eta}$$

oder, wie man aus der Abb. 137 leicht abliest,

$$\frac{1}{c_1} \sin \alpha = \frac{1}{c_2} \sin \beta$$

in Übereinstimmung mit Gl. 24.

135. **Absorption von Wellen.** Geht auf dem Wege einer Welle ein Teil der in ihr enthaltenen Energie E durch Umwandlung in andere Energieformen, z. B. in Wärme, verloren, so spricht man von Absorption der Welle. Für den Energieverlust dE bei der Absorption einer ebenen harmonischen Welle auf dem Wegelement dx gilt

$$dE = -E \cdot \alpha \cdot dx.$$

E ist die im Punkte x noch vorhandene Energie, α der sog. Absorptionskoeffizient. Er hängt meist von der Schwingungszahl der Welle ab. Die Lösung der Gleichung lautet

$$E = E_0 e^{-\alpha x}, \tag{25}$$

wobei E_0 die im Punkte $x = 0$ vorhandene Energie bedeutet.

136. **Das HUYGENSsche Prinzip.** Es sei AB (Abb. 138) der Querschnitt durch ein Stück einer Wellenfläche einer Kugelwelle. HUYGENS (1690) hat das Prinzip aufgestellt, daß man grundsätzlich jeden Punkt im Raum, der von einer Welle getroffen wird, als sekundären Ausgangspunkt einer neuen elementaren Kugelwelle gleicher Art, also einer sich von diesem Punkte nach allen Seiten ausbreitenden Kugelwelle, ansehen könne. Wenn sich trotzdem im allgemeinen eine Welle von einem Punkte einer Wellenfläche nur nach einer einzigen Richtung ausbreitet, so liegt das, wie man streng beweisen kann, daran, daß die von ihm ausgehenden Wellen sich, wenn keine Hindernisse in ihrem Wege liegen, in allen andern Richtungen, außer der genannten, durch Interferenz gegenseitig auslöschen. Will man die Lage der Wellenfläche nach der Zeit t finden, so hat man um jeden Punkt der ersten Wellenfläche einen Kreis mit dem Radius $r = ct$ zu schlagen (c = Geschwindigkeit der Welle). Die gemeinsame Einhüllende CD dieser Kreise ist dann die Wellenfläche zur Zeit t. Abb. 138 zeigt, daß dies im Falle freier Ausbreitung der Welle wieder eine Kugelfläche ist, wie wir das bisher schon vorausgesetzt haben, daß also die Fortpflanzung einer durch keine Hindernisse gestörten Welle geradlinig ist.

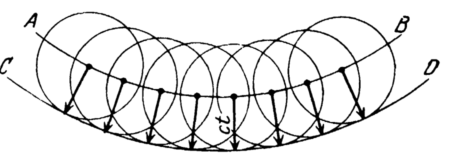


Abb. 138. Zum HUYGENSschen Prinzip.

137. **Beugung.** Die geradlinige Fortpflanzung einer Welle ist nach dem Vorstehenden an die Bedingung geknüpft, daß sich die von einem Punkte in der Welle ausgehenden Elementarwellen in allen Richtungen, außer derjenigen, welche die Verlängerung des ankommenden Strahls bildet, durch Interferenz auslöschen. Verhindert man aber durch irgendwelche Begrenzungen — in den Weg der Welle gebrachte Hindernisse, welche einen Teil der Welle abschirmen — den Zutritt eines Teiles dieser Elementarwellen, so kann die Auslöschung durch Interferenz nicht vollständig erfolgen. In solchen Fällen kann die geradlinige Fortpflanzung gestört sein. Diese Erscheinung heißt Beugung.


Abb. 139. Beugung einer Wasserwelle an einem Loch nach GRIMSEHL.

Die Beugung läßt sich gut an Wasserwellen beobachten. Abb. 139 zeigt eine ebene Wasserwelle, welche gegen ein mit einem Loch versehenes Brett läuft. Während die Welle im allgemeinen reflektiert wird, tritt sie dort, wo das Loch ist, durch das Brett hindurch und breitet sich auf der andern Seite kreisförmig aus, genau so, als befinde sich an der Stelle des Lochs ein primäres Störungszentrum. Abb. 139 zeigt auch sehr schön die Bildung stehender Wellen (§ 127) bei der Reflexion der Wellen (links). Weiteres über Beugung siehe in der Lehre vom Licht.

13. Kapitel.

Die Lehre vom Schall (Akustik).

138. Wesen und Fortpflanzung des Schalls. Unter Schall verstehen wir alle diejenigen physikalischen Vorgänge, die auf unser Gehör einwirken. Die Quelle jedes Schalls ist ein schwingender Körper. Dieser erzeugt in dem ihn umgebenden Medium, z. B. der Luft, eine fortschreitende Welle gleicher Schwingungszahl, welche wiederum das Trommelfell des Ohrs in Bewegung setzt und dadurch das Gehörorgan erregt.

Die Schallgeschwindigkeit kann nach Gl. 17 und 18, § 125, berechnet werden. In Luft beträgt sie bei 0^0 331,5 m/sec, bei 20^0 etwa 340 m/sec, also in runder Zahl $^1/_3$ km/sec. Jedoch gilt dies nur, wenn die in der Schallwelle auftretenden Druckänderungen klein sind, d. h. wenn die Intensität des Schalles eine gewisse Grenze nicht überschreitet. Sehr heftige Knalle (Explosionswellen, Geschoßknall) haben unter Umständen eine erheblich größere Geschwindigkeit. Bei freier Ausbreitung pflanzt sich der Schall geradlinig fort. Sind Hindernisse in seinem Weg, so gelangt er infolge Beugung (§ 137) an dessen Kanten, zum Teil auch hinter diese. (Man kann „um die Ecke" hören.)

Man kann die Schallgeschwindigkeit in Luft messen, indem man z. B. die Zeit t mißt, die zwischen dem Aufblitzen eines Schusses und der Ankunft des Knalls in einem x m entfernten Orte verstreicht. Es ist dann $c = x/t$. Auch die Zeit zwischen einem Knall und der Wiederkehr seines Echos von einer ebenen Wand läßt sich zur Messung verwerten. Sehr viel genauer sind die Methoden, bei denen Schwingungszahl und Wellenlänge eines Schalls gemessen werden, aus denen man die Schallgeschwindigkeit c nach der Gleichung $c = \lambda\nu$ (§ 124) berechnet. Diese Methode ist aber natürlich nur bei periodischen Schallwellen verwendbar, die eine wohldefinierte Wellenlänge haben.

139. Geräusche, Klänge, Töne. Wir teilen unsere Gehörempfindungen ein in Geräusche einerseits und Klänge und Töne andererseits. Letztere beiden unterscheiden sich für unser Ohr von ersteren dadurch, daß sie eine deutlich erkennbare Tonhöhe haben.

Die Ursache eines Geräusches ist eine Schallwelle ohne periodischen Charakter, in der also die Druckschwankungen der Luft ganz unregelmäßig erfolgen. Unter einem Ton verstehen wir einen Schall, welcher rein periodischen Charakter hat und einer harmonischen Welle, darstellbar durch die Gleichung $\eta = \eta_0 \sin 2\pi\nu t$, entspricht. Klänge sind Tongemische, insbesondere solche, welche aus einem Grundton (Grundschwingung, § 117) von größerer Stärke und einer mehr oder weniger großen Zahl von schwächeren Obertönen (Oberschwingungen) bestehen.

Das gleichzeitige Erklingen mehrerer Klänge oder Töne von etwa gleicher Stärke heißt ein Akkord, insbesondere dann, wenn es sich um Schwingungen von einfachem Verhältnis ihrer Schwingungszahlen handelt.

140. Tonhöhe. Schwingungszahl. Wellenlänge. Bringt man eine in gleichmäßigem Abstande mit kreisförmig angeordneten Löchern versehene Scheibe (Abb. 140) in schnelle Drehung und bläst durch die Löcher einen Luftstrom, so hört man einen Klang, der um so höher ist, je größer die Zahl der Löcher bzw. je größer die Umdrehungsgeschwindigkeit der Scheibe ist. Ein solcher Apparat heißt eine Sirene. Den gleichen Versuch kann man auch mit einem rotierenden Zahnrad machen, dessen Zähne man mit einem Kartenblatt berührt. Der bei diesen Versuchen hörbare Klang rührt von den dabei periodisch auftretenden Luftstößen her (vgl. auch den Klang einer Kreissäge). Die Tonhöhe des Klanges ist um so größer, je schneller diese Luftstöße erfolgen, d. h. je größer die Schwingungszahl des Grundtones des Klanges ist. Der tiefste Ton, den das Ohr als solchen (nicht als Brummen) empfindet (das Subkontra-C), hat etwa 16 Schwingungen/sec. Er ist auf großen Orgeln noch vorhanden. Die obere Grenze der Hörbarkeit liegt bei jungen Menschen bei etwa 20000 Schwingungen/sec, sinkt aber bereits in mittlerem Alter meist beträchtlich herab. Die Grenzen der musikalisch verwendeten Töne liegt im allgemeinen zwischen 16 und 4000 Schwingungen/sec.

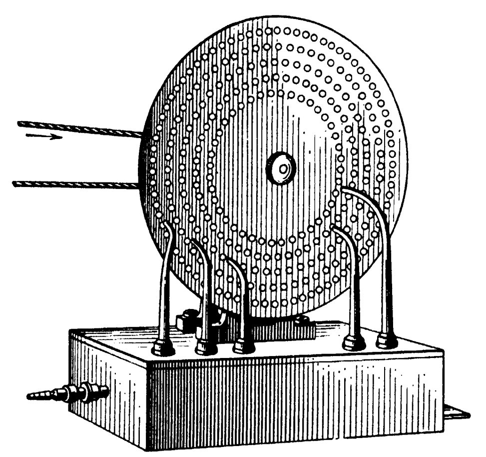


Abb. 140. Lochsirene.

Die Wellenlänge eines Tones von der Schwingungszahl ν in Luft ergibt sich aus Gl. 16, § 124, zu $\lambda = c/\nu$. So sind z. B. die Wellenlängen für die genannten Hörbarkeitsgrenzen rund 20 m und 2 cm.

141. Reflexion von Schallwellen. Schallwellen gehorchen dem Reflexionsgesetz (§ 132). Sie werden bekanntlich an ebenen Wänden, Waldrändern usw. gut reflektiert (Echo). Die sog. „Akustik" oder Hörsamkeit eines Raumes hängt von den in ihm herrschenden Reflexionsverhältnissen ab. Stoffe und Teppiche reflektieren den Schall schlecht, dämpfen daher alle Geräusche und Klänge. In großen Räumen (Kirchen, „Hallen") mit glatten Wänden ist die Reflexion stark und macht sich wegen der großen Wege, die der Schall zurückzulegen hat, und der daher rührenden großen Zeitdifferenz zwischen Klang und Echo oft unangenehm bemerkbar (Nachhall). Die Raumakustik ist ein wichtiges und schwieriges architektonisches Problem, dessen praktische Lösung bisher in der Hauptsache auf sehr allgemeinen Erfahrungen beruht. Eine einigermaßen genaue Vorausberechnung der akustischen Verhältnisse im praktischen Einzelfall ist heute noch nicht möglich.

Aus den geometrischen Eigenschaften der Ellipse folgt, daß Schall, welcher vom Brennpunkt einer solchen (z. B. einer elliptisch geformten Wand) ausgeht, durch Reflexion an ihr in dem andern Brennpunkt wieder vereinigt wird. Auf dieser Tatsache beruhen die an manchen Orten vorhandenen sog. Flüstergewölbe.

Man benutzt die Reflexion des Schalls am Meeresboden dazu, um aus der Laufzeit des Schalls zum Meeresboden und zurück die Meerestiefe festzustellen (Echo-Lot). In ähnlicher Weise wird aus der Reflexion des Knalles von Explosionen an Unstetigkeitsflächen im Erdinnern auf die Tiefe von Erzlagerstätten usw. geschlossen.

142. Interferenz von Schallwellen. Zum Nachweis der Interferenz (§ 126) von Schallwellen benutzt man zweckmäßig zwei Wellen, die von der gleichen

Schallquelle herrühren, weil so am besten völlige Gleichheit der Schwingungen gewährleistet ist. Bringt man eine Stimmgabel in *A* vor eine ebene reflektierende Wand *DE* (Abb. 141), so hört man an jeder Stelle *C* den von ihr direkt kommenden Schall und den von der Wand reflektierten Schall. Die Differenz der Wege, die diese beiden Wellen zurückzulegen haben, ist $AB + BC - AC$. Beträgt diese Differenz ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge ($n\lambda$), so verstärken sich nach § 126 die beiden Wellen, beträgt sie aber ein ungeradzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge [$(2n + 1)\lambda/2$], so löschen sie sich bei gleicher Stärke durch Interferenz aus. Jedenfalls tritt ein Minimum der Schallstärke auf. Ob das eine oder andere eintritt, hängt von der Lage von *C* im Raume und vom Orte *A* der Schallquelle ab. Bewegt man sich also bei feststehender Schallquelle in der Nähe einer reflektierenden Wand oder wird die Schallquelle gegenüber der Wand bewegt, so ändert sich die Tonstärke. Der Versuch gelingt am besten mit einer dicken Stimmgabel von großer Tonhöhe, weil bei kleiner Wellenlänge die Unterschiede örtlich am stärksten wechseln.

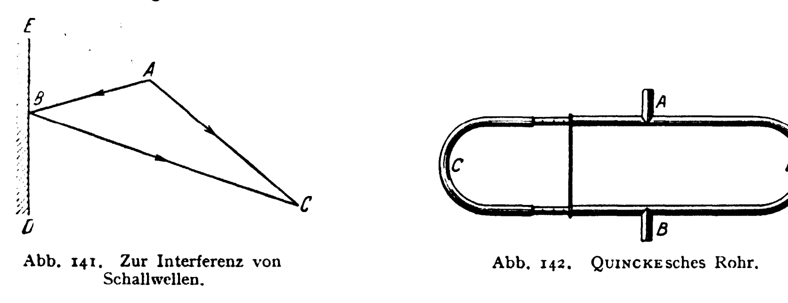


Abb. 141. Zur Interferenz von Schallwellen.

Abb. 142. QUINCKEsches Rohr.

Zur Beobachtung von Schallinterferenzen dient z. B. auch das QUINCKEsche Rohr (Abb. 142). Die eine Hälfte des Rohres ist posaunenartig ausziehbar. Man läßt einen Ton bei *A* eintreten und hört ihn durch einen bei *B* angesetzten Schlauch ab. Ist das eine Rohr so weit herausgezogen, daß die Differenz der Schallwege *ACB* und *ADB* eine halbe Wellenlänge beträgt, so ist die Tonstärke ein Minimum. Man kann auf diese Weise die Wellenlänge eines Tones in Luft messen.

143. **Stehende Schallwellen.** Stehende Schallwellen (§ 127) erzeugt man am besten durch Reflexion an einer ebenen Wand. In dem zwischen Schallquelle und Wand liegenden Raum überlagern sich die ankommende und die in entgegengesetzter Richtung laufende reflektierte Welle. Man kann die Maxima und Minima des Tones direkt mit dem Ohre abhören. Noch besser macht man sie mit einer „empfindlichen Flamme" sichtbar (einer an einem langen Schlauch bei geeignetem Druck brennenden Gasflamme, welche sich bei großer Tonstärke zusammenzieht). Die Maxima des Schalles liegen an den Stellen stärkster Druckschwankung, also schwächster Bewegung der Luftteilchen, d. h. an den Druckbäuchen (Schwingungsknoten).

Der Abstand zweier Maxima ist nach § 127 gleich der halben Wellenlänge der Schwingung. Kennt man die Schwingungszahl ν, so kann man die Schallgeschwindigkeit c nach Gl. 16, § 124, aus diesem Abstand berechnen. Diese Methode hat KUNDT angewandt, um die Schallgeschwindigkeit in Gasen zu bestimmen. Man erzeugt im Innern einer mit dem betreffenden Gase gefüllten Glasröhre stehende Wellen. In der Röhre befindet sich etwas trockenes Korkpulver, Bärlappsamen oder am besten Quarzpulver. Dieses wird bei Erregung der Wellen von den Stellen stärkster Bewegung, also dem Druckknoten, fortgeschleudert und sammelt sich in den Druckbäuchen (KUNDTsche Staubfiguren). Man kann so den Abstand zweier Bäuche, also die halbe

Wellenlänge, messen. Die in Abb. 143 dargestellte Vorrichtung dient insbesondere für Wellenlängenmessungen in Luft. Man erzeugt z. B. durch Reiben eines in $^1/_2$ oder in $^1/_4$ und $^3/_4$ seiner Länge (A, B) eingespannten Metall- oder Glasstabes in diesem Longitudinalschwingungen, welche durch eine aufgesetzte Korkscheibe an die Luft in der Röhre übertragen werden.

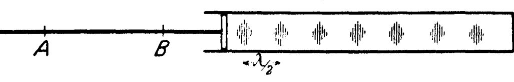


Abb. 143. Kundtsche Röhre mit Staubfiguren.

144. Akustische Schwebungen. Kombinationstöne. Akustische Schwebungen (§ 128) treten auf, wenn zwei Töne von wenig verschiedener Schwingungszahl gleichzeitig erklingen. Man beobachtet sie leicht bei zwei gleichen Stimmgabeln, deren eine durch Beschweren ihres Endes mit ein wenig Wachs leicht verstimmt ist, oder bei einem ein wenig verstimmten Saitenpaar einer Mandoline. Die Schwebungen bestehen in einem mehr oder weniger schnellen An- und Abschwellen der Tonstärke. Sie erfolgen um so langsamer, je weniger sich die Schwingungszahlen der beiden Töne unterscheiden. Da das Ohr mehr als etwa 16 einzelne Ereignisse in einer Sekunde nicht mehr getrennt wahrnimmt, so verschwinden die Schwebungen für das Ohr, wenn die Differenz der Schwingungszahlen $\nu_1 - \nu_2$ größer als etwa 16 Schwebungen/sec wird. Im allgemeinen bemerkt das Ohr dann, wenigstens bei tieferen Tönen, den Unterschied in der Tonhöhe unmittelbar, während bei sehr kleinen Differenzen die Beobachtung der Schwebungen das sicherste Mittel zur Feststellung der Schwingungszahldifferenz ist. Beim Einstimmen der gleichen Saiten von Klavier oder Mandoline ist es daher zweckmäßig, auf das Verschwinden der Schwebungen zu achten.

Wird das Ohr von zwei Tönen von den Schwingungszahlen ν_1 und ν_2, die sich um mehr als 16 Schwingungen/sec unterscheiden, gleichzeitig getroffen, so empfindet das Ohr keine Schwebungen mehr. Statt dessen hört man bei aufmerksamer Beobachtung nicht nur die beiden Töne, sondern auch noch Töne, deren Schwingungszahl gleich der Summe und gleich der Differenz jener beiden Töne ist, also $\nu_1 + \nu_2$, bzw. $\nu_1 - \nu_2$. Unter geeigneten Umständen sind noch weitere Töne hörbar, deren Schwingungszahlen sich durch die allgemeine Formel $\nu = m \cdot \nu_1 \pm n \cdot \nu_2$ ausdrücken lassen, wobei m und n ganze Zahlen sind. Diese Töne heißen Kombinationstöne oder Summations- bzw. Differenztöne (Sorge 1744). Am leichtesten ist der erste Differenzton, $\nu_1 - \nu_2$, hörbar. Diese Töne sind an sich in dem das Ohr treffenden Klange nicht enthalten. Sie entstehen erst im Ohr, und zwar infolge der Tatsache, daß das Trommelfell Ausbiegungen nach innen und nach außen nicht den gleichen elastischen Widerstand entgegensetzt. Die mathematische Analyse der Schwingung, zu der eine solche asymmetrisch schwingende Membran durch zwei auf sie auftreffende Töne verschiedener Schwingungszahl erregt wird, ergibt, daß in der erzwungenen Schwingung jene Summations- und Differenzschwingungen auftreten müssen.

Kombinationstöne, insbesondere der erste Differenzton, treten z. B. auch auf, wenn zwei Orgelpfeifen mit dem gleichen Windbalg betrieben werden. In diesem Falle wird die Differenzschwingung im Windbalg erregt, und sie ist in dem ausgesandten Klange tatsächlich neben den beiden ursprünglichen Tönen enthalten.

145. Akustische Resonanz. Tönende Luftsäulen. Singt man in ein geöffnetes Klavier bei abgehobenem Pedal einen Ton, so klingt er aus ihm wieder heraus. Die Saite gleicher Frequenz ist durch Resonanz (§ 121) in Schwingungen versetzt worden. Bekannt ist das Klirren von Gegenständen beim Anschlagen eines bestimmten Tones. Es wird behauptet, daß man ein Glas durch starkes Hineinsingen des Eigentones in so heftiges Mitschwingen versetzen kann, daß es springt. In engen Räumen beobachtet man oft, daß ein bestimmter Ton in ihnen besonders laut klingt. Es

ist das derjenige Ton, der der Grundschwingung der eingeschlossenen Luftsäule entspricht. Man setzt Stimmgabeln auf Kästen, die so beschaffen sind, daß die in ihnen befindliche Luftsäule in ihrer Eigenschwingung derjenigen der Stimmgabel entspricht. Die Stimmgabel tönt dann viel lauter als ohne den Kasten. Das rührt daher, daß die im Kasten schwingende Luftsäule die Schallenergie viel schneller an die Luft abgibt als die einfache Stimmgabel, der auf diese Weise durch ständige Abgabe an den Resonanzkasten ihre Schwingungsenergie auch viel schneller entzogen wird. In geringem Grade wird das gleiche schon durch Aufsetzen auf eine Tischplatte erreicht. Eine verstärkte Schallabgabe an die Luft bezwecken auch die Resonanzböden der Streichinstrumente und anderer Musikinstrumente und die Schalltrichter. Die bekannte Form der Resonanzkästen von Streichinstrumenten ist erfahrungsgemäß die für die Erzeugung einer möglichst gleichmäßigen Schallwirkung über den ganzen Tonbereich des Instruments günstigste. (Resonanz im strengen Sinne liegt also hier nicht vor.) Weshalb diese Form so besonders günstig ist, ebenso die außerordentlichen Einflüsse der Lackierung, hat man bisher noch nicht befriedigend erklären können. Um so mehr zu bewundern bleibt die Leistung der alten Geigenbauer, die diese Form auf rein empirischem Wege gefunden haben.

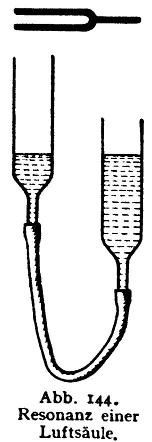


Abb. 144. Resonanz einer Luftsäule.

Läßt man in der in Abb. 144 dargestellten Vorrichtung das Wasser auf- und absteigen, während sich eine tönende Stimmgabel über dem einen Rohr befindet, so hört man infolge von Resonanz einen lauten Ton bei einer ganz bestimmten Länge der im Rohr befindlichen Luftsäule. Hält man eine Stimmgabel von 4—500 Schwingungen vor den geöffneten Mund, so gelingt es leicht, eine Mundstellung zu finden, bei der die Mundhöhle in Resonanz gerät.

Helmholtz benutzte die Resonanz von luftgefüllten Räumen, um Klänge zu analysieren, d. h. die sie bildenden reinen Töne zu ermitteln. Er bediente sich dazu eines Satzes von „Resonatoren“ von der in Abb. 145 dargestellten Form, welche mit ihrer einen Öffnung in die Ohröffnung gesteckt werden. Es werden diejenigen Resonatoren festgestellt, welche bei Ertönen des zu untersuchenden Klanges am stärksten in Resonanz versetzt werden.

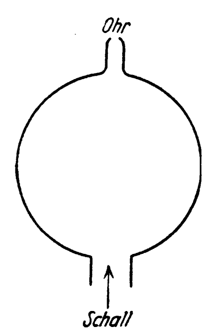
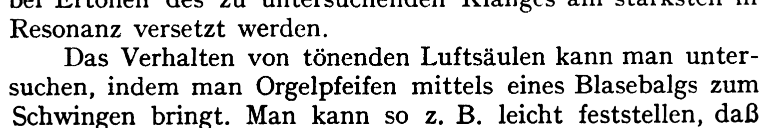


Abb. 145. Helmholtzscher Resonator.



Das Verhalten von tönenden Luftsäulen kann man untersuchen, indem man Orgelpfeifen mittels eines Blasebalgs zum Schwingen bringt. Man kann so z. B. leicht feststellen, daß der Ton einer offenen Lippenpfeife um eine Oktave sinkt, wenn man die Öffnung mit der Hand verschließt. Mit einem ausreichend starken Luftstrom kann man sie leicht überblasen, d. h. ihre Obertöne hervorbringen. Den Einfluß offener und geschlossener Enden zeigt auch folgender einfache Versuch. Schlägt man mit der Handfläche auf das eine Ende einer beiderseits offenen Pappröhre, so hört man, wenn man die Hand nach dem Schlage auf der Röhre liegen läßt, einen Ton, der der Eigenschwingung der eingeschlossenen Luftsäule bei einem offenen und einem geschlossenen Ende entspricht. Schlägt man aber ganz kurz, am besten nur mit einem Finger, so schwingt die Luftsäule mit zwei offenen Enden, und ihre Schwingungszahl ist jetzt doppelt so groß wie vorher (§ 120), der Ton ist um eine Oktave höher. Enge Röhren (Schlüssel, Panflöte) kann man auch durch Anblasen des offenen Endes zum Tönen bringen. Vgl. auch das Heulen des Windes in Schornsteinen.

Das Pfeifen mit dem Munde beruht auf einer Anregung der Eigenschwingung der Mundhöhle bzw. ihrer Obertöne, die man durch geeignete Form des Mundes in gewissen Grenzen verändern kann.

146. **Der akustische DOPPLER-Effekt.** Der akustische DOPPLER-Effekt (§ 129) ist eine häufig zu beobachtende Erscheinung. Der Pfiff einer Lokomotive erscheint höher, wenn sie auf einen zufährt, als wenn sie von einem wegfährt. Das gleiche beobachtet man bei den Klingeln von Radfahrern und den Hupen von Automobilen. Der Effekt ist um so stärker, das Springen der Tonhöhe beim Vorbeifahren um so deutlicher, je schneller die Schallquelle bewegt ist. Man beobachtet den DOPPLER-Effekt ebenfalls, wenn die Schallquelle ruht und man selbst sich bewegt, z. B. beim Läuten von Signalglocken neben einem fahrenden Eisenbahnzuge.

Einen besonders starken DOPPLER-Effekt beobachtet man, wenn man z. B. in einem Auto in Richtung auf eine Wand (z. B. ein Tor) fahrend, ein Hupensignal ertönen läßt. Der Ton trifft die Wand mit einer durch den DOPPLER-Effekt erhöhten Schwingungszahl und wird mit der gleichen Schwingungszahl von ihr reflektiert. Da sich der Fahrer diesem reflektierten Schall entgegen bewegt, so tritt für ihn ein erneuter DOPPLER-Effekt mit nochmaliger Erhöhung der Schwingungszahl ein.

147. **Die musikalische Tonleiter.** Die heutige Musik beruht auf der Tonleiter. Es ist dies eine Folge von Tönen, deren Schwingungszahlen in einfachen Verhältnissen zueinander stehen. Man unterscheidet die Dur- und die Moll-Tonleiter. Wir betrachten zunächst die Dur-Tonleiter. Ihr Grundton heiße c, und wir wollen unsere Maßeinheit der Einfachheit halber so wählen, daß ihm die Schwingungszahl 1 zukomme. Die c-dur-Tonleiter setzt sich dann aus folgenden Tönen zusammen:

	Grundton		Sekunde		Gr. Terz		Quart		Quint		Gr. Sexte		Septime		Oktave
	c		d		e		f		g		a		h		c′
Schwingungszahl	1		9/8		5/4		4/3		3/2		5/3		15/8		2
Verhältnis		9/8		10/9		16/15		9/8		10/9		9/8		16/15	

Nehmen wir irgendeinen Ton von anderer Schwingungszahl als Grundton, so ist das Schwingungszahlverhältnis der einzelnen Töne in der zu ihm gehörenden Tonleiter stets das gleiche. Bildet man in der Dur-Tonleiter alle Zahlenverhältnisse zwischen irgend zwei Tönen, so sind — mit Ausnahme des fehlenden Verhältnisses 9/5 — sämtliche Zahlenverhältnisse zwischen 1 und 2, die man aus den Zahlen 1 bis 16 unter Auslassung der Zahlen 7, 11, 13 und 14 bilden kann, in ihr enthalten. Das Verhältnis $\nu_1:\nu_2$ zweier Töne heißt ihr Intervall.

In der c-moll-Tonleiter tritt an die Stelle der großen Terz die kleine Terz es $= 6/5$, an die Stelle der großen Sexte die kleine Sexte as $= 8/5$. Beim Aufstieg enthält sie die Septime h, beim Abstieg tritt an dessen Stelle b $= 9/5$, so daß hier das in der Dur-Tonleiter fehlende Intervall erscheint.

Ein Instrument, welches in seiner Stimmung der vorstehenden Tabelle entspricht, ist für ein musikalisches Ohr völlig rein gestimmt. Man nennt diese Tonleiter die natürlich-harmonische Tonleiter. Es kommen in ihr zwischen benachbarten Tönen drei verschiedene Verhältnisse (Intervalle, Tonschritte) vor: der große Ganzton $9/8 = 1{,}125$, der kleine Ganzton $10/9 = 1{,}111$ und der halbe Ton $16/15 = 1{,}077$. Eine Folge von zwei halben Tönen bedeutet einen Schritt von $16/15 \cdot 16/15 = 256/225 = 1{,}138$, ist also sowohl vom großen wie vom kleinen Ganzton verschieden.

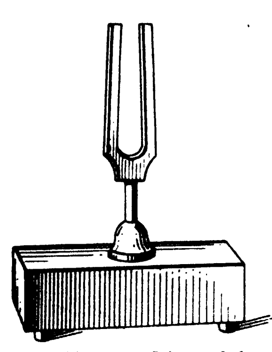
Diese reine Stimmung ist für fest gestimmte Instrumente, wie z. B. das Klavier, nicht brauchbar. Diese Instrumente haben bekanntlich in der Oktave 12 Intervalle, und die Töne dieser Oktave müssen auch für die auf andere Grund-

töne aufgebauten Tonleitern, nicht nur für c-dur, dienen. Es muß also z. B. das a, die große Sexte der c-dur-Tonleiter, gleichzeitig die Sekunde der g-dur-Tonleiter, die große Terz der f-dur-Tonleiter, die Quart der e-dur-Tonleiter und die Quint der d-dur-Tonleiter sein. Nun ist die Sekunde zu g = 3/2, a = 3/2 · 9/8 = 27/16, die große Terz zu f = 4/3, a = 4/3 · 5/4 = 5/3, die Quart zu e = 5/4, a = 5/4 · 4/3 = 5/3, und die Quint zu d = 9/8, a = 9/8 · 3/2 = 27/16. Man sieht, daß das a der c-dur-Tonleiter zwar für f-dur und e-dur stimmt, aber nicht für g-dur und d-dur. Der Unterschied beträgt 81/80 (sog. Pythagoreisches Komma). Entsprechendes kann man für andere Töne nachweisen.

Aus diesem Grunde ist man übereingekommen, ein Kompromiß zu machen und die Oktave in 12 gleiche Intervalle (Halbtonschritte) einzuteilen, d. h. so, daß man vom Grundton mit 12 gleichen Schritten zur Oktave kommt (STIFEL 1544, WERKMEISTER 1700). Die Zahl, welche bei dieser sog. temperierten Stimmung oder gleichschwebenden Temperatur das Verhältnis zweier benachbarter Töne angibt, sei x. Um die genannte Bedingung zu erfüllen, muß $x^{12} = 2$ sein oder $x = \sqrt[12]{2} = 1{,}059..$ In dieser Stimmung sind zwar sämtliche Intervalle ein wenig unrein, aber so wenig, daß es bei der praktischen Musik nicht bemerkt wird. (Der Ganztonschritt beträgt $1{,}059^2 = 1{,}121$.) Und es ist der große Vorteil gewonnen, daß keine Tonart vor der andern durch reinere Stimmung bevorzugt ist. Darüber hinaus aber ist die ganze moderne Musik wegen der durch diese Art der Stimmung gebotenen Möglichkeit zu sog. Modulationen (Übergang von einer Tonart in eine beliebige andere) nur auf dieser Basis denkbar.

Die Grundlage unserer heutigen musikalischen Stimmung ist der sog. Kammerton a′ (eingestrichenes a), als welcher international derjenige Ton festgelegt ist, der die Schwingungszahl 435 hat.

Man hat neuerdings den Versuch gemacht, die Möglichkeiten der praktischen Musik dadurch zu erweitern, daß man auch noch Dritteltonschritte ($\sqrt[18]{2}$) und Vierteltonschritte ($\sqrt[24]{2}$) einführte. Zu wesentlichen Auswirkungen dieser Bestrebungen ist es bislang noch nicht gekommen.


Abb. 146. Stimmgabel.

Zur Erzeugung von Tönen bekannter Schwingungszahl bedient man sich der Stimmgabeln (Abb. 146), die verhältnismäßig sehr reine, weitgehend obertonfreie Töne liefern. Um mit ihnen einen stärkeren Schall zu erzeugen, muß man sie auf einen Resonanzkasten setzen, der auf einer Seite offen ist, und der so gestaltet ist, daß die in ihm enthaltene Luftsäule mit dem Stimmgabelton in Resonanz ist (§ 145).

148. Konsonanz und Dissonanz. Zwei oder mehrere gleichzeitig erklingende Töne ergeben entweder einen Wohlklang (Konsonanz) oder einen Mißklang (Dissonanz). Die Erfahrung zeigt, daß die Konsonanz zweier Töne um so besser ist, je einfacher das Zahlenverhältnis ist, in dem ihre Schwingungszahlen stehen. Die beste Konsonanz ist daher die Oktave, es folgt die Quint, dann die Quart, die Terz und die Sexte. Die Sekunde und die Septime werden bereits als weniger wohllautend empfunden, kommen aber als wichtige Intervalle in der praktischen Musik vor. Der Grad des Wohlklanges beim gleichzeitigen Erklingen zweier Töne hängt aber nicht allein vom Verhältnis ihrer Schwingungszahlen ab, sondern auch von ihrer Differenz, und diese ist bei gleichem Schwingungszahlverhältnis in den tieferen Tonlagen kleiner als in den höheren. Wird die Differenz zu klein, so treten merkliche Schwebungen (§ 144) auf, die unangenehm auf das Ohr wirken.

In den tiefen Lagen des Klaviers wird eine Terz aus diesem Grunde kaum noch als Konsonanz empfunden.

149. **Die Saiteninstrumente.** Bei den Saiteninstrumenten werden die Eigenschwingungen gespannter Saiten aus Darm, drahtumsponnenem Darm oder Draht zur Tonerzeugung benutzt. Die Saiten werden entweder gestrichen (Geige, Bratsche, Violoncello, Kontrabaß), angeschlagen (Klavier) oder gezupft (Zither, Laute, Mandoline, Harfe, Pizzicato der Streichinstrumente). Die Klangfarbe ist von Art und Ort der Erregung der Saite stark abhängig. Die Saiten werden durch Änderung ihrer Spannung auf die vorgeschriebene Schwingungszahl gebracht (gestimmt). Bei den meisten Saiteninstrumenten wird nicht nur die Schwingung der Saite zwischen ihren festen Begrenzungen (leere Saite) ausgenutzt, sondern es werden weitere Töne durch Begrenzung der Saite mit dem aufgesetzten Finger — Verkürzung, also Erhöhung der Schwingungszahl, d. h. des Tones — erzeugt. Bei den Streichinstrumenten benutzt man ferner die Flageolettöne, das sind die Töne, welche entstehen, wenn man den Finger in 1/2, 1/3, 1/4 usw. der Saitenlänge lose aufsetzt, so daß zwar die Saite ganz schwingt, aber mit 1, 2, 3 usw. Knoten. Es werden also die Oberschwingungen der leeren Saiten benutzt (vgl. § 119, Abb. 121).

Es ist ein Übelstand bei sämtlichen bisher gebräuchlichen Saiteninstrumenten, daß der schwingenden Saite die doppelte Aufgabe zufällt, erstens die Schwingungszahl des Tones möglichst rein zu bestimmen, zweitens die zur Schallerzeugung nötige Energie zu liefern. Eine gleichzeitige befriedigende Erfüllung beider Aufgaben ist nicht möglich. Aus diesem Grunde wird bei dem neuen NERNST-BECHSTEIN-Flügel der Saite nur die erste Aufgabe übertragen. Ihre Schwingungen dienen nur der Erzeugung eines im Tempo ihrer Schwingung wechselnden Induktionsstromes (§ 317), während die abgegebene Schallenergie durch eine elektrische Verstärkereinrichtung (§ 394) und einen Lautsprecher geliefert wird. Auf diese Weise erzielt man, neben sonstigen Vorteilen, eine erhebliche Verbesserung der Klangwirkung.

150. **Pfeifen. Die Orgel.** Die meisten sonstigen Instrumente, die für die Musik in Frage kommen, beruhen auf den Schwingungen von Luftsäulen. In erster Linie ist hier die Orgel zu nennen. Sie besitzt zwei Arten von Pfeifen: Lippenpfeifen und Zungenpfeifen. Bei den Lippenpfeifen (Abb. 147a) wird von *h* her durch den Schlitz *SS* ein Luftstrom gegen die scharfe Kante der sog. Lippe geblasen. Beim Vorbeistreichen des Luftstromes an dieser entsteht zunächst ein Geräusch, also ein Gemenge aus allen möglichen Schwingungen. Darunter ist stets auch die Eigenschwingung des Luftraumes der Pfeife, der dadurch zum Mitschwingen angeregt wird. Dies wirkt wieder auf den Luftstrom zurück, der im Tempo dieser Eigenschwingung zu pendeln beginnt. Dadurch wird wieder die Resonanz des Luftraumes verstärkt, der auf diese Weise zu starkem Tönen veranlaßt wird. Bei den Lippenpfeifen sind zu unterscheiden: Offene Pfeifen, welche also am einen Ende offen sind, und geschlossene, sog. „gedackte“ Pfeifen. Der Ton der letzteren ist bei gleicher Länge um eine Oktave tiefer als derjenige der ersteren, wie man aus den im § 120 angestellten Überlegungen erkennt. Wegen der verschiedenen Art ihrer Obertöne ist die Klangfarbe der beiden Arten verschieden. Bei den

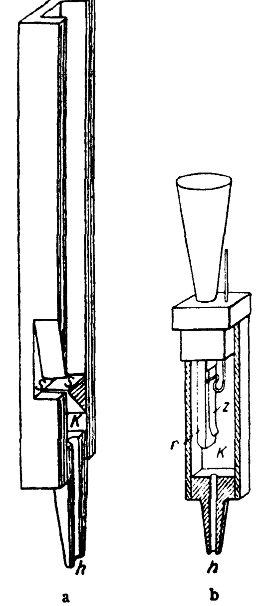


Abb. 147. a Lippenpfeife. b Zungenpfeife.

Zungenpfeifen (Abb. 147b) passiert der Luftstrom eine Öffnung, welche durch eine federnde, metallische, auf den zu erzeugenden Ton abgestimmte Zunge nahezu geschlossen ist. Die Zunge wird durch den Luftstrom in Schwingungen versetzt und öffnet und schließt die Öffnung im Tempo ihrer Schwingung. Dadurch wird der Luftstrom ebenfalls im gleichen Tempo unterbrochen und erregt dann einen auf den gleichen Ton abgestimmten Luftraum zu Schwingungen. Die Harmonika beruht lediglich auf der Wirkung der Zungen und der durch sie hervorgebrachten periodischen Luftstöße. Abgestimmte Lufträume werden bei ihr nicht zu Schwingungen erregt.

Die sog. Register der Orgel geben die Möglichkeit, je nach Wahl zu jedem Grundton andere Töne leise miterklingen zu lassen. Auf diese Weise kann man die Klangfarbe stark verändern und bis zu einem gewissen Grade sogar diejenige anderer Instrumente nachahmen.

Ein Harmonium ist eine kleine Orgel, welche nur Zungenpfeifen enthält.

151. **Blasinstrumente und sonstige Musikinstrumente.** Bei den Blasinstrumenten werden Luftsäulen durch den Luftstrom des Mundes in Schwingungen versetzt. Die wichtigsten sind erstens die Holzblasinstrumente: Flöte, Klarinette, Oboe und Fagott, zweitens die Blechblasinstrumente: Horn, Trompete, Kornett, Posaune und Saxophon. Alle Blasinstrumente sind Zungenpfeifen, mit Ausnahme der Flöte, die wie eine Lippenpfeife erregt wird.

Bei den Holzblasinstrumenten wird die wirksame Länge der Luftsäule und damit die Tonhöhe dadurch verändert, daß seitlich am Instrument Löcher vorhanden sind, die mit dem Finger oder durch Klappen verschlossen werden können. Die höheren Töne werden durch das sog. Überblasen erzeugt. Überschreitet nämlich die Stärke des erregenden Luftstroms eine bestimmte Grenze, so treten statt des Grundtons, je nach der Stärke des Anblasens, höhere Obertöne auf. Die ersten Obertöne liegen weit auseinander, die höheren rücken einander immer näher, und es befindet sich schließlich unter ihnen die lückenlose Folge aller Töne der Tonleiter. Die Kunst des Spielers besteht darin, durch geeignetes Anblasen, auch durch eine besondere Mundstellung, gerade den gewünschten Oberton zu erzeugen.

Die Blechblasinstrumente, außer der Zugposaune, besitzen Ventile, mittels derer Seitenkanäle in den Luftweg eingeschaltet werden können, so daß dieser verlängert und die Tonhöhe verändert werden kann. Gleichzeitig versperren die Ventile den direkten Luftweg. Bei der Zugposaune wird der direkte Luftweg selbst durch einen Auszug verlängert. Das Überblasen spielt bei den Blechblasinstrumenten eine noch größere Rolle, als bei den Holzblasinstrumenten. Das meist in Blech, aber auch gelegentlich in Holz ausgeführte Saxophon nimmt insofern eine Sonderstellung ein, als es spieltechnisch und in der Art des Anblasens den Holzblasinstrumenten, insbesondere der Klarinette, am nächsten steht.

Weitere Musikinstrumente beruhen auf den Eigenschwingungen von ebenen oder gebogenen Platten oder Stäben (Glocken, Becken, Triangel, Xylophon, Gong) oder auf den Schwingungen gespannter Membrane (Kalbfell), wie bei Trommel und Pauke. Die besondere Klangfarbe dieser Instrumente beruht darauf, daß sie wegen ihrer komplizierten Struktur viele unharmonische Obertöne haben.

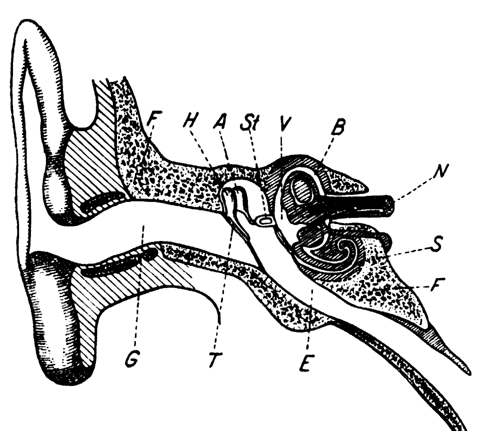
152. **Das Ohr. Der Kehlkopf.** Das Ohr (Abb. 148) besteht aus:

1. dem äußeren Ohr (Gehörgang *G*), welches durch das Trommelfell *T*, eine häutige Membran, abgeschlossen ist. Die Ohrmuschel dient dazu, den auffallenden Schall in den im Felsenbein *F* liegenden Gehörgang zu konzentrieren.

2. dem Mittelohr, welches durch die Eustachische Röhre *E* (zum Ausgleich des Luftdrucks) mit der Nase verbunden ist. In ihm befindet sich ein System

von Knöcheln, Hammer *H*, Ambos *A* und Steigbügel *St* genannt, die die von außen erregten Schwingungen des Trommelfells auf das ovale Fenster übertragen, welches das innere Ohr abschließt. Die Knöchel bilden ein System von Hebeln, die die Schwingungen des Trommelfells, welche verhältnismäßig große Amplitude haben, aber wenig kräftig sind, in kräftige Bewegungen des ovalen Fensters von kleiner Schwingungsweite verwandeln.

3. dem innern Ohr oder Labyrinth. Dieses ist ein sehr kompliziertes Gebilde und bildet einen Hohlraum im Felsenbein. Es besteht aus mehreren Teilen: dem Vorhof *V*, den drei Bogengängen *B*, den Ampullen und der Schnecke *S*. Von diesen haben die Bogengänge mit dem Gehör wahrscheinlich überhaupt nichts zu tun, sondern bilden das menschliche Gleichgewichtsorgan. (Dieses ist auch bei vielen Tieren mit dem Gehörorgan verbunden.) Die Ampullen sind wahrscheinlich das Organ für die Empfindung von Geräuschen, während die Schnecke das tonempfindliche Organ ist. Sie besteht aus $2^1/_2$ Windungen, wird durch ein knöchernes Spiralblatt in zwei Hälften geteilt und endet in einem zweiten, dem runden Fenster, welches gegen das Mittelohr durch eine Membran abgeschlossen ist. Das ganze innere Ohr ist mit einer Flüssigkeit, dem Labyrinthwasser, angefüllt, welches die Schwingungen des ovalen Fensters auf die inneren Organe überträgt. Längs der Windungen der Schnecke erstreckt sich die Basilarmembran mit dem CORTIschen Organ, welches aus einer sehr großen Zahl von einzelnen Fasern (Abb. 148b) besteht. Diese sind auf die Töne des menschlichen Hörbereichs abgestimmt und geraten in Schwingungen, wenn das Ohr von ihrem Eigenton getroffen wird (Resonanztheorie des Hörens, HELMHOLTZ 1867). Hierdurch werden die Enden von Nerven *N* gereizt, und diese leiten die Erregung in das im Gehirn befindliche Hörzentrum, wo die Tonempfindung entsteht.



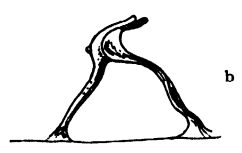


Abb. 148. Schema des menschlichen Ohres. a schematischer Querschnitt, b Querschnitt durch das CORTIsche Organ.

Im Kehlkopf befindet sich als schwingungsfähiges Organ eine Membran, das Stimmband, dessen Spannung (Eigenfrequenz) verändert werden kann. Es wird durch den von der Lunge her durch die Luftröhre kommenden Luftstrom in Schwingungen versetzt und wirkt dann etwa wie die Zunge einer Zungenpfeife, indem es den Luftstrom zu periodischem An- und Abschwellen und dieser die Mundhöhle und die angrenzenden Hohlräume zum Mitschwingen bringt.

153. **Die Sprache und die Vokale.** Die Entstehung der Konsonanten ist sehr kompliziert und muß hier außer Betracht bleiben. Bezüglich der Vokale ist festgestellt, daß — unbeschadet der Tatsache, daß man jeden Vokal in einem beträchtlichen Bereich von Tonhöhen singen kann — die charakteristische Klangfarbe jedes Vokals darauf beruht, daß im Klange Töne von ganz bestimmter, absoluter Schwingungszahl, die sog. Formanten (HELM-

HOLTZ 1857, DONDERS 1858), enthalten sind. Diese werden nicht von den Stimmbändern hervorgerufen, sondern sind Schwingungen der Nasenhöhle und des Rachens. Daß die Klangfarbe der Vokale eine Frage des Mitklingens ganz bestimmter Töne ist, kann man schon daraus erkennen, daß ein in ein offenes Klavier bei abgehobenem Pedal hineingesprochener Vokal infolge von Resonanz ganz deutlich als der gleiche Vokal wieder aus dem Klavier heraushallt. Man kann einem reinen Ton, dem man die Formanten eines Vokals mit sehr geringer Stärke beimischt, den Charakter dieses Vokals geben. Läßt man eine besprochene Grammophonplatte mit falscher Geschwindigkeit laufen, so ändert sich wegen der falschen Tonhöhe der Formanten der Charakter der Vokale.

V. Wärmelehre (Thermodynamik).

14. Kapitel.

Die Temperatur und das Wesen der Wärme.

154. **Temperatur.** Die Begriffe warm und kalt beruhen auf einem in der Haut und einzelnen, aber nicht allen, inneren Körperteilen vorhandenen Sinn, dem Wärmesinn. Die Ursache der Wärmeempfindung, die wir von einem Körper erfahren, sehen wir in einer Eigenschaft dieses Körpers, die wir seine Temperatur nennen. Bei starker Wärmeempfindung schreiben wir einem Körper hohe, bei starker Kälteempfindung tiefe Temperatur zu. Warm und kalt sind relative Begriffe. Ob wir etwas als warm oder kalt empfinden, kann u. a. von der Vorgeschichte abhängen. Die Luft in einem Zimmer, in dem eine Temperatur von 5^0 herrscht, kann uns warm erscheinen, wenn wir bei starkem Frost aus dem Freien kommen, dagegen erscheint sie uns kalt, wenn wir uns längere Zeit darin aufhalten. Allgemein nennen wir Körper warm, die unsere Haut erwärmen, kalt solche, die sie abkühlen. Da nun das Eintreten der einen oder andern Wirkung von den jeweiligen Umständen und von der Vorgeschichte abhängt, so ist unser Wärmesinn für quantitative Bestimmungen nicht brauchbar. Ferner vermag unsere Haut sehr große Kälte von sehr großer Wärme nicht zu unterscheiden. Auch erzeugt jene, wie diese, auf der Haut Blasen.

Die Erfahrung zeigt, daß Körper, welche miteinander in Berührung sind, nach einiger Zeit immer die gleiche Temperatur annehmen. Die Temperaturen zweier ursprünglich verschieden warmer Körper gleichen sich aus (§ 197). Kennt man also die Temperatur des einen dieser Körper, so ist auch die des andern bekannt. Die Messung von Temperaturen beruht in den meisten Fällen darauf, daß man einen Körper, dessen Temperatur man an ihm unmittelbar ablesen oder anderweitig auf Grund einer Eichung bestimmen kann (Thermometer), mit dem auf seine Temperatur zu untersuchenden Körper in direkte Berührung bringt.

155. **Temperaturskala. Absolute Temperatur.** Es ist Vorbedingung für jede physikalische Behandlung einer Erscheinung, daß man sich bei ihrer Beobachtung und Messung von den menschlichen Sinnen möglichst frei macht. Der Wärmesinn der Haut ist zur quantitativen Vergleichung von Temperaturen ungeeignet.

Man bezeichnet die Temperatur, welche schmelzendes Eis hat, als eine Temperatur von 0^0 (0 Grad), und die Temperatur reinen, unter einem Druck von 760 mm Hg siedenden Wassers als eine solche von 100^0. Dies sind die sog. Fundamentalpunkte der 100 teiligen oder Celsiusskala. Sie ist als Temperaturskala gesetzlich festgelegt. Andere früher übliche Temperaturskalen sollten auch aus dem täglichen Leben so schnell wie möglich ausgemerzt werden, um die heute in dieser Beziehung noch vielfach herrschende Verwirrung zu beseitigen. (Réaumurskala: gleiche Fundamentalpunkte wie

Celsiusskala, aber Einteilung in 80 statt 100 Grade. Fahrenheitskala: Schmelzpunkt des Eises gleich 32°, Siedepunkt des Wassers 212°, nur noch in den angelsächsischen Ländern gebräuchlich). Die Einteilung des Intervalls zwischen 0° und 100° in 100 gleiche Schritte von je 1° beruht ursprünglich auf der Ausdehnung der Körper, insbesondere der Gase, durch die Wärme (§ 160ff.). Der Schritt von 1° ist dadurch definiert, daß bei einer Temperaturänderung um 1° das Volumen eines idealen Gases sich um $^1/_{100}$ desjenigen Betrages ändert, um den es sich bei der Erwärmung von 0° auf 100° ändert. Daraus ergibt sich auch die Möglichkeit einer Fortsetzung der Temperaturskala über 100° und unter 0° Temperaturen unter 0° werden mit negativen Zahlen bezeichnet.

Aus sogleich zu erörternden Gründen ist es für physikalische Zwecke oft bequem und vor allem durch theoretische Erwägungen geboten, den Nullpunkt der Temperatur nicht auf den Schmelzpunkt des Eises zu legen, sondern um 273° der Celsiusskala tiefer, nach — 273° (genau — 273,2°). Der Schmelzpunkt des Eises liegt dann bei + 273°, der Siedepunkt des Wassers bei + 373°. Diese Temperaturskala heißt die absolute Temperaturskala oder Kelvinskala, die in ihr gemessene Temperatur die absolute Temperatur (KELVIN 1854). Temperaturen in der Celsiusskala bezeichnen wir meist mit t, in der absoluten Skala mit T. Es ist also $T = t + 273^0$. Zur Unterscheidung werden manchmal die Grade in der Celsiusskala durch C, in der Kelvinskala mit K bezeichnet, also z. B. 0^0 C = 273^0 K, allgemein t^0 C = $(t + 273)^0$ K.

156. **Mechanische Wärmetheorie.** Es ist schon früher darauf hingewiesen worden, daß die Molekularenergie der Körper von der Temperatur abhängt. Tatsächlich besteht der physikalische Unterschied zwischen zwei sonst gleichen Körpern von verschiedener Temperatur lediglich darin, daß die Molekularenergie des wärmeren Körpers größer ist als die des kälteren. In dieser Tatsache beruht die Natur der Wärme. Einen Körper erwärmen, heißt nichts anderes, als die Energie seiner Moleküle erhöhen. (Erste Andeutung dieser Vorstellung durch BACON 1620, fester begründet durch DAVY und RUMFORD 1812, vollendet durch KRÖNIG 1856, CLAUSIUS 1857, MAXWELL 1860 und BOLTZMANN 1866—1877).

Es gibt vier Arten von Energie, die ein Molekül besitzen kann. Erstens eine auf seiner fortschreitenden Bewegung, also seiner Geschwindigkeit, beruhende kinetische Energie, zweitens eine auf einer Rotation des Moleküls beruhende Rotationsenergie, drittens Schwingungsenergie der einzelnen Bestandteile des Moleküls gegeneinander und viertens potentielle Energie.

In den folgenden Überlegungen spielt der Begriff des Freiheitsgrades eine wichtige Rolle. Ist die fortschreitende Bewegung eines Körpers durch irgendwelche Bedingungen auf eine Linie beschränkt, so sagt man, er habe nur einen Grad von Bewegungsfreiheit oder nur einen Freiheitsgrad. Ist die Bewegung auf eine Fläche beschränkt, so hat er zwei Freiheitsgrade. Vermag er sich in allen Richtungen des Raums zu bewegen, so hat er drei Freiheitsgrade. Sehr anschauliche Beispiele für diese drei Fälle sind die Eisenbahn, die nur längs der Schienen (Linie) zu fahren vermag, das Schiff, welches an eine Fläche gebunden ist, und das in allen räumlichen Richtungen bewegliche Flugzeug.

Entsprechendes gilt für die Rotation der Körper. Ist die Freiheit des Körpers so weit beschränkt, daß er sich nur um eine bestimmte Achse zu drehen vermag, so hat er nur einen Freiheitsgrad der Rotation. Sind gleichzeitige Rotationen um zwei zueinander senkrechte Achsen, aber nicht um die dritte, möglich, sind also die Lagemöglichkeiten seiner Rotationsachse auf eine Fläche beschränkt, so hat er deren zwei. Und ist er schließlich in seiner Rotation keinerlei Beschränkungen unterworfen, so hat er drei Freiheitsgrade der Rotation.

Als Rotationsachsen kommen, da es sich bei den Molekülen um freie Rotationen handelt, nach § 48 nur solche in Frage, die durch die Schwerpunkte des Moleküls gehen.

Ist der Körper nicht starr, sondern vermögen seine einzelnen Teile noch Schwingungen gegeneinander auszuführen, so kommen weitere Freiheitsgrade hinzu.

Die mechanische Wärmetheorie sagt nun aus, daß die kinetische Energie E, die im zeitlichen oder räumlichen Durchschnitt auf jeden der Freiheitsgrade jedes Moleküls einer Substanz entfällt, für alle Freiheitsgrade aller Moleküle eines gleichmäßig temperierten Körpers gleich groß und der absoluten Temperatur T proportional ist. Dieses wichtige Gesetz heißt das Äquipartitionsgesetz oder der Satz von der (durchschnittlichen) Gleichverteilung der Energie. In Gleichungsform lautet dieses Gesetz

$$E = \tfrac{1}{2} kT \text{ erg}. \qquad (1)$$

k ist eine der sog. universellen, d. h. für alle Körper gleichen Konstanten und hat den Zahlenwert

$$k = 1{,}37_2 \cdot 10^{-16} \text{ erg/grad}.$$

Man nennt sie die BOLTZMANNsche Konstante. Es gibt verschiedene Methoden, um diese wichtige physikalische Konstante, die u. a. auch in der Theorie der Wärmestrahlung eine Rolle spielt, zu messen. Haben also die Moleküle eines Körpers z. B. 3 Freiheitsgrade und nur kinetische Energie, so beträgt bei der absoluten Temperatur T die auf jedes Molekül entfallende Energie $E = \frac{3}{2} kT$.

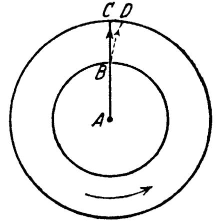


Abb. 149. Messung der Molekulargeschwindigkeit nach STERN.

STERN hat eine unmittelbare Messung der Molekulargeschwindigkeit auf folgende Weise ausgeführt (Abb. 149). A ist ein feiner (zur Zeichnungsebene senkrecht ausgespannter) Silberdraht, der elektrisch geglüht werden kann. Ihn umgeben koaxial zwei Kupferzylinder, deren innerer einen feinen, dem Draht parallelen Spalt B besitzt. Das Ganze befindet sich in einem auf sehr niedrigen Druck ausgepumpten Gefäß. Die beiden fest miteinander verbundenen Zylinder können in schnelle Rotation versetzt werden.

Wenn der Draht glüht, so gehen von ihm einatomige Silbermoleküle, also Silberatome, aus. Da sie im Raum völlig frei beweglich sind, so haben sie bezüglich ihrer kinetischen Energie drei Freiheitsgrade. Es ist daher ihre kinetische Energie nach Gl. 1 $\frac{1}{2}\mu v^2 = 3 \cdot \frac{1}{2} kT = \frac{3}{2} kT$, wenn man für T die Temperatur des Drahtes einsetzt (μ = Masse des Moleküls). Wenn die Zylinder ruhen, so verlaufen die Atomstrahlen durch den Spalt B nach C und schlagen sich dort als ein schmaler Silberstreifen nieder. Rotieren aber die Zylinder, so daß der äußere die Geschwindigkeit u hat, so legt der äußere Zylinder den Weg CD zurück, während sich die Atome von B nach C bewegen. (Die gestrichelte Linie stellt die Bahn der Atome relativ zu den rotierenden Zylindern dar. In Wirklichkeit bewegen sie sich natürlich immer geradlinig.) Der Niederschlag erfolgt jetzt also an einer Stelle, die um die Strecke CD gegenüber dem bei ruhenden Zylindern gewonnenen verschoben ist. Es ist $v : u = BC : CD$. Man kann also aus u, BC und CD die Geschwindigkeit v berechnen. Sie ergab sich bei den STERNschen Versuchen in sehr guter Übereinstimmung mit der Theorie.

Die physikalische Zweckmäßigkeit der absoluten Temperaturskala erklärt sich daraus, daß der Nullpunkt der absoluten Temperatur der Punkt ist, bei dem

die Energie der Moleküle Null werden würde. Wärmeenergie kann man dann einem Körper nicht mehr entziehen, und daher ist eine tiefere Temperatur nicht denkbar.

Wir werden später (§ 515) sehen, daß bei sehr tiefen Temperaturen Abweichungen vom Äquipartitionsgesetz eintreten. Vorerst können wir es als streng gültig betrachten.

Sofern wir ein Molekül eines idealen Gases als starren Körper ansehen dürfen, müßte es 6 Freiheitsgrade haben, nämlich je 3 der fortschreitenden Bewegung und der Rotation. Tatsächlich ist ein Gasmolekül nicht starr, sondern ein aus meist vielen Bausteinen sehr kompliziert aufgebauter Körper (§ 502). Diese Bestandteile können Schwingungen gegeneinander ausführen, die grundsätzlich dazu führen, daß weitere Freiheitsgrade auftreten. Aus Gründen, die wir erst später erörtern können, kommen aber diese Freiheitsgrade bei den im folgenden anzustellenden Überlegungen nicht in Betracht. Das gleiche gilt unter Umständen für die Freiheitsgrade der Rotation oder einen Teil von ihnen. Wie ebenfalls später auseinandergesetzt werden wird, spielen diese in den uns hier angehenden Fällen ganz oder zum Teil keine Rolle, sind also als nicht vorhanden anzusehen, wenn das Trägheitsmoment eines Moleküls bezüglich einer oder zweier seiner Hauptträgheitsachsen (§ 36) sehr klein ist.

Bei den einatomigen Molekülen gehen alle drei Hauptträgheitsachsen durch den Schwerpunkt des einen, das Molekül bildenden Atoms. Der Abstand der Massenelemente des Atoms von dem Schwerpunkt ist außerordentlich klein (Größenordnung höchstens 10^{-12} cm, § 493), und daher ist auch das Trägheitsmoment des Atoms um jede durch den Schwerpunkt gehende Achse sehr klein. Wir dürfen also einem einatomigen Molekül keine Freiheitsgrade der Rotation zuschreiben, so daß nur die drei Freiheitsgrade der fortschreitenden Bewegung übrigbleiben.

Bei den zweiatomigen Molekülen geht eine der drei Hauptträgheitsachsen durch die beiden Schwerpunkte der zwei Atome, und es ist daher das Trägheitsmoment eines solchen Moleküls bezüglich dieser Achse aus den gleichen Gründen, wie bei den einatomigen Molekülen, sehr klein. Die beiden andern Hauptträgheitsachsen stehen auf der ersten senkrecht und gehen durch den gemeinsamen Schwerpunkt (§ 34) der beiden Atome. Von diesen beiden Achsen sind die Massen der beiden Atome sehr viel weiter entfernt als von der ersteren Achse (Größenordnung 10^{-8} cm, § 493), die auf diese beiden Achsen bezogenen Trägheitsmomente sind also viel größer. Daher sind jetzt von den Freiheitsgraden der Rotation zwei in Rechnung zu setzen. Ein zweiatomiges Molekül hat 5 Freiheitsgrade. Bei den drei- und mehratomigen Molekülen gibt es keine Hauptträgheitsachsen, bezüglich derer das Trägheitsmoment sehr klein wäre. Diese haben daher 6 Freiheitsgrade, je drei bezüglich der fortschreitenden Bewegung und der Rotation.

Die ein mehratomiges Molekül bildenden Atome können Schwingungen gegeneinander ausführen. Aus ebenfalls erst später zu erörternden Gründen spielen aber diese Schwingungen bei den folgenden Darlegungen keine Rolle.

Die idealen Gase zeichnen sich gemäß ihrer Definition (§ 101) dadurch aus, daß ihre Moleküle keine merkliche potentielle Energie gegeneinander besitzen. Sie besitzen nur kinetische und Rotationsenergie. Es haben daher unter dieser Voraussetzung die Moleküle

der einatomigen Gase	$3 + 0 = 3$	Freiheitsgrade,
der zweiatomigen Gase	$3 + 2 = 5$	Freiheitsgrade,
der anderen Gase	$3 + 3 = 6$	Freiheitsgrade.

Aus dem Vorstehenden läßt sich jetzt die Richtigkeit des AVOGADROschen Gesetzes (§ 95) beweisen. Die Moleküle eines idealen Gases haben drei Freiheitsgrade der fortschreitenden Bewegung. Ihre kinetische Energie beträgt daher $m v^2/2 = 3 k T/2$. Setzt man dies in die Gl. 6, § 97, für den Druck p eines Gases ein, so erhält man

$$p = n k T \quad \text{oder} \quad n = \frac{p}{kT}, \tag{2}$$

wobei n die Zahl der Moleküle in 1 ccm bedeutet. Man sieht, daß diese Zahl nur vom Druck und der Temperatur abhängt, also für alle idealen Gase bei gleichem Druck und gleicher Temperatur gleich groß ist.

Man sieht übrigens leicht, daß der kausale Zusammenhang richtiger zum Ausdruck gebracht wird, wenn man das AVOGADROsche Gesetz in der folgenden Form ausspricht: Alle idealen Gase, welche in der Volumeinheit gleich viele Moleküle enthalten, haben bei gleicher Temperatur den gleichen Druck.

157. **Das MAXWELLsche Gesetz.** Die Moleküle eines idealen Gases haben demnach eine mittlere kinetische Energie

$$\tfrac{1}{2} \mu v^2 = \tfrac{3}{2} k T. \tag{3}$$

Dies ist jedoch nur ein Mittelwert. Tatsächlich kommen, unter dauerndem, durch die elastischen Zusammenstöße der Moleküle hervorgerufenem Wechsel der Energieverteilung über die Moleküle, alle möglichen Geschwindigkeiten v vor, aber mit sehr verschiedener Häufigkeit. Sowohl sehr kleine wie sehr große Geschwindigkeiten sind sehr selten. Die Verteilung der Geschwindigkeiten auf die einzelnen Moleküle ist, bei gegebener Gesamtenergie des Gases, eine rein zufällige und unterliegt daher den Gesetzen der Statistik (§ 94). Auf dieser Grundlage konnte MAXWELL (1860) das Gesetz ableiten, nach dem sich die Geschwindigkeiten auf die Moleküle eines idealen Gases verteilen. Es sei n die Gesamtzahl der Moleküle des Gases, $d n_v$ die Anzahl von ihnen, deren Geschwindigkeit eine Größe zwischen v und $v + dv$ hat. Dann ist

$$d n_v = \frac{4 n v^2 dv}{\sqrt{\pi} v_0^3} e^{-\frac{v^2}{v_0^2}}. \tag{4}$$

In Abb. 150 ist die Abhängigkeit der zu $d n_v$ proportionalen Funktion $\frac{v^2}{v_0^2} e^{-\frac{v^2}{v_0^2}}$ von v dargestellt. Die Höhe der Ordinate ist ein Maß für die Häufigkeit der zugehörigen Geschwindigkeit v; demnach liegt das Maximum bei $v = v_0$. Dies ist also die wahrscheinlichste, d. h. die am häufigsten vorkommende Geschwindigkeit. Sie hängt von der Art des Gases, nämlich von der Masse seiner Moleküle und der Temperatur ab. Wie schon aus der Asymmetrie der Kurve hervorgeht, gibt es mehr Moleküle, welche eine größere Geschwindigkeit haben, als die wahrscheinlichste, als solche, die eine kleinere Geschwindigkeit haben. Die mittlere Geschwindigkeit und die wahrscheinlichste Geschwindigkeit sind einander nicht gleich. Wie hier nicht näher ausgeführt werden soll, besteht zwischen der wahrscheinlichsten und der mittleren Geschwindigkeit $\bar{v}$ die Beziehung $\bar{v} = v_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}}$. Von größerer Wichtigkeit als die mittlere Geschwindigkeit ist der

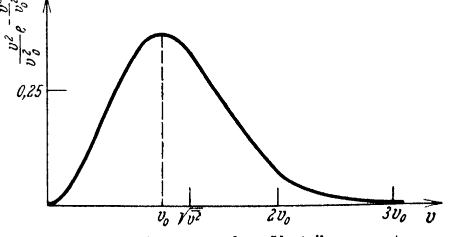


Abb. 150. MAXWELLsches Verteilungsgesetz.

Mittelwert des Quadrats der Geschwindigkeiten $\overline{v^2}$, weil dieser Mittelwert eng mit der durchschnittlichen Molekularenergie und daher mit der Temperatur zusammenhängt. Die Rechnung ergibt die Beziehung $\overline{v^2} = \frac{3}{2} v_0^2$ (man beachte, daß das „mittlere Geschwindigkeitsquadrat" $\overline{v^2}$ einen anderen, und zwar größeren Wert hat, als das Quadrat der mittleren Geschwindigkeit $\bar{v}^2$). Es gilt demnach

$$\overline{v^2} = \frac{3\pi}{8} \bar{v}^2 = \frac{3}{2} v_0^2 . \tag{5}$$

In der Mehrzahl der Fälle, wo eine durchschnittliche Geschwindigkeit der Gasmoleküle in eine Berechnung eingeht (z. B. bei der Berechnung des Gasdrucks, § 97), handelt es sich um die Wurzel aus dem mittleren Geschwindigkeitsquadrat $\sqrt{\overline{v^2}}$. Das rührt davon her, daß die betreffenden Erscheinungen primär durch die Energie der Moleküle bzw. durch deren Mittelwert $\frac{1}{2}\mu\overline{v^2}$ bedingt werden. Die im § 97 berechneten Geschwindigkeiten von Gasmolekülen entsprechen daher nicht $\bar{v}$, sondern $\sqrt{\overline{v^2}}$.

Unter Berücksichtigung von Gl. 3 (wo jetzt statt v^2 zu setzen ist $\overline{v^2}$) und 5 kann man jetzt Gl. 4 auch schreiben

$$d n_v = \frac{4 n v^2 d v}{\sqrt{\pi}\left(\frac{2 k T}{\mu}\right)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\frac{1}{2}\mu v^2}{k T}} . \tag{6}$$

Ein entsprechendes Gesetz gilt auch für die Rotationsbewegungen der Moleküle.

158. **Diffusion.** Eine unmittelbare Folge der thermischen Molekularbewegung ist die Diffusion, d. h. der Ausgleich von Dichteunterschieden infolge der ungeordneten Bewegung der Moleküle eines Stoffes. Man pflegt die freie Diffusion und die Diffusion durch poröse Wände zu unterscheiden. Jedoch besteht zwischen ihnen kein prinzipieller physikalischer Unterschied.

Zur Veranschaulichung des Begriffes der Diffusion wollen wir zunächst eine ganz grobe, aber völlig zutreffende Analogie betrachten, nämlich eine große Menschenmenge, die sich anfänglich etwa in der einen Ecke eines großen Saals zusammengedrängt befindet. Diese Menschen sollen sich bewegen, und zwar jeder ganz unabhängig vom andern. Der Erfolg einer solchen, ganz ungeordneten Bewegung wird sein, daß sich die Menschen nach kurzer Zeit über den ganzen Saal verteilt haben werden, und dieser Zustand wird zwar in Einzelheiten kleine Schwankungen aufweisen, aber als Ganzes wird er, wegen der vorausgesetzten Unabhängigkeit der Bewegungen der einzelnen Menschen, erhalten bleiben. Besteht die Menschenmenge aus Männern, Frauen und Kindern, so wird sich das geschilderte Verhalten, wieder völlige Unabhängigkeit der Individuen vorausgesetzt, auch für jede dieser drei Gruppen einzeln zeigen; eine jede von ihnen wird den verfügbaren Raum durchschnittlich gleichmäßig erfüllen. Die Menschenmenge verhält sich also genau wie ein Gas, welches den verfügbaren Raum gleichmäßig erfüllt, und zwar sind die drei Menschengruppen mit drei verschiedenen Molekülarten zu vergleichen. Jede einzelne dieser drei Gruppen hat nach einiger Zeit infolge der rein zufälligen Bewegungen ihrer Individuen, durch Diffusion, eine gleichmäßige Verteilung der Dichte im Raum erreicht, und zwar liegt hier ein Fall von freier Diffusion vor. Denken wir uns jetzt als zweites Beispiel zwei Räume, die durch eine Anzahl von Türen verbunden sind, und befinden sich anfänglich Menschen nur in dem einen Raum, so werden diese bei ihrer Bewegung auch durch die Türen „diffundieren" und nach einiger Zeit

beide Räume mit gleicher Dichte erfüllen. Befinden sich anfänglich in dem einen Raum nur Männer, in dem andern nur Frauen, so wird diese Trennung der Geschlechter (zweier Molekülarten) nach einiger Zeit durch Diffusion aufgehoben und durch eine gleichmäßige Dichteverteilung ersetzt sein. Hier liegt eine Analogie zur Diffusion durch eine poröse Wand vor.

Die vorstehenden Überlegungen können wir ohne weiteres auf die Moleküle eines Gases übertragen, sofern wir von der Wirkung der Schwerkraft absehen. Es ist klar, daß alle Diffusionsvorgänge um so schneller verlaufen müssen, je größer die mittlere Geschwindigkeit der Moleküle ist. Die Moleküle eines Gases diffundieren also nach Gl. 3 um so schneller, je höher die Temperatur T des Gases und je kleiner die Masse μ der Moleküle, bzw. je kleiner das Molekulargewicht (§ 96) des Gases ist. Das beweist z. B. der folgende Versuch.

Ein unglasierter, mit Luft gefüllter Tonzylinder T werde mit einem Becherglas B bedeckt. Der Zylinder ist mit einem Wassermanometer M verbunden (Abb. 151). Leitet man unter das Becherglas Wasserstoff oder Leuchtgas, so zeigt das Manometer im ersten Augenblick einen starken Überdruck im Zylinder an, der danach wieder verschwindet. Das kommt daher, daß der Wasserstoff (Molekulargewicht 2) von außen schneller in den Zylinder hineindiffundiert als die Luft (Molekulargewicht N_2 28, O_2 32) von innen nach außen. Allmählich folgt aber auch die Luft, und es stellt sich schließlich ein Zustand her, bei dem innerhalb und außerhalb des Zylinders Luft und Wasserstoff in gleichem Verhältnis gemischt sind. Das Manometer zeigt dann keinen Überdruck mehr an. Entfernt man jetzt das Becherglas, so daß sich der mit der Luftwasserstoffmischung gefüllte Zylinder in reiner Luft befindet, so zeigt das Manometer zunächst einen Unterdruck im Zylinder, weil der Wasserstoff schneller aus dem Zylinder ins Freie diffundiert als die Luft von außen hineindiffundieren kann. Nach einiger Zeit ist das Druckgleichgewicht wieder hergestellt.

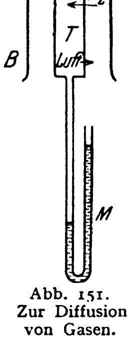


Abb. 151. Zur Diffusion von Gasen.

Die Diffusion erfolgt, wie leicht verständlich, um so schneller, je größer die freie Weglänge (§ 99) der Moleküle ist. Daher diffundiert ein Gas langsamer, wenn ihm noch ein zweites Gas beigemischt ist, als wenn es sich allein im Raum befindet.

Auch in den Flüssigkeiten finden entsprechende Diffusionsvorgänge in allen Fällen statt, wo Konzentrationsunterschiede vorhanden sind, und zwar sowohl freie Diffusion, wie Diffusion durch poröse Wände. Bringt man zwei mischbare Flüssigkeiten, z. B. Wasser und Alkohol, in das gleiche Gefäß, so stellt sich — von gewissen, durch das verschiedene spezifische Gewicht bedingten Einflüssen der Schwerkraft abgesehen — nach einiger Zeit durch freie Diffusion eine gleichmäßige Mischung beider Flüssigkeiten her. Von besonderem Interesse ist die Diffusion der Teilchen eines gelösten Stoffes innerhalb des Lösungsmittels. In der Regel ist die Zahl der gelösten Teilchen sehr klein gegenüber der Zahl der Moleküle des gelösten Stoffes, und man kann diesen wie ein in die Flüssigkeit eingeschlossenes Gas betrachten (§ 189). Die Teilchen des gelösten Stoffes diffundieren innerhalb des Lösungsmittels genau wie die Moleküle eines Gases. Jedoch erfolgt die Diffusion sehr viel langsamer, als bei einem wirklichen Gase, weil wegen der Anwesenheit der sehr dicht gelagerten Moleküle des Lösungsmittels die freie Weglänge der Teilchen äußerst klein ist. Überschichtet man z. B. eine Kupfersulfatlösung vorsichtig mit reinem Wasser, so kann man anfänglich eine ganz scharfe Trennungsfläche erhalten. Im Laufe der Zeit verwischt sich diese mehr und mehr, die blaue Färbung breitet sich nach oben aus, und nach

Ablauf einiger Monate ist das Gefäß mit gleichmäßig blau gefärbter Flüssigkeit erfüllt.

159. Die BROWNsche Bewegung. Schwankungserscheinungen. Wohl die eindrucksvollste Bestätigung der mechanischen Wärmetheorie ist die BROWNsche Bewegung. Beobachtet man eine verdünnte Lösung von chinesischer Tusche oder eine kolloidale Goldlösung (§ 187) bei starker Vergrößerung unter dem Mikroskop, so sieht man in der Tusche die Kohlenteilchen, in der Goldlösung die Goldteilchen, und zwar befinden sie sich in einer heftigen, vollkommen unregelmäßigen Zickzackbewegung (Abb. 152). Das gleiche sieht man besonders schön an den festen Teilchen in Zigarren- und Zigarettenrauch, wenn man diesen in einer geeigneten Kammer unter ein Mikroskop bringt (EHRENHAFT). Diese Erscheinung ist bereits 1827 von dem englischen Botaniker BROWN beobachtet worden, aber erst viel später, seitdem die mechanische Natur der Wärme zur Sicherheit geworden ist, gebührend beachtet worden. Sie erklärt sich auf folgende Weise:

Man denke sich einen außerordentlich großen, aber leicht beweglichen Körper, an den rings herum eine große Zahl von Menschen in ganz ungeordneter Weise fortwährend stößt. Der Körper wird sich dabei nur sehr wenig hin und her bewegen, weil sich bei der großen Zahl von Stößen die Unregelmäßigkeiten, mit denen die einzelnen Stöße erfolgen, ausgleichen. Jetzt denke man sich den Körper wesentlich kleiner, die Dichte der Menschen, die gegen ihn stoßen, aber ebenso groß, so daß jetzt die Zahl der Stöße, seiner kleineren Oberfläche wegen, weit kleiner wird. Bei dieser kleinen Zahl von Stößen werden sich die Unregelmäßigkeiten nicht mehr in dem Maße ausgleichen wie vorher. Der Körper wird bald ein wenig mehr nach der einen, bald ein wenig mehr nach der andern Seite getrieben werden, er wird eine Zickzackbewegung ausführen, und zwar um so lebhafter, je kleiner und leichter er ist. (Man vergleiche etwa die Bewegungen eines Fußballs während einer längeren Zeit und stelle sich auch das Verhalten eines Fußballs vor, der eine zehnmal größere Masse hätte als üblich.)

Die Teilchen, die wir bei der BROWNschen Bewegung im Mikroskop beobachten, entsprechen einem solchen Körper, die Moleküle des Mediums, in der das Teilchen schwebt, den stoßenden Menschen. Die Teilchen sind so klein, daß die Zahl der Stöße, die sie erleiden, schon merklichen Schwankungen unterliegt. Und diese Unregelmäßigkeit der von den bewegten Molekülen herrührenden Stöße ist es, die die Zickzackbewegung der Teilchen hervorruft. Daß die Heftigkeit der Bewegung mit abnehmender Teilchengröße zunehmen muß, hat weiter seinen Grund darin, daß bei gleicher Gestalt die Masse des Teilchens mit der 3. Potenz, seine Oberfläche und damit die Zahl der ihn treffenden Stöße aber nur mit der 2. Potenz seiner linearen Dimensionen (z. B. bei einer Kugel ihres Radius) abnimmt.

Abb. 152 zeigt ein Beispiel einer im Mikroskop beobachteten BROWNschen Bewegung eines Teilchens. (Die eingezeichneten Knickpunkte sind die Orte, an denen sich das Teilchen in regelmäßigen Zeitabständen befand; die wirkliche Bewegung ist noch viel unregelmäßiger). Diese Bewegung ist natürlich rein zufällig und sieht in jedem einzelnen Falle wieder anders aus. Aber, wie in § 94 auseinandergesetzt, liefert die Beobachtung gehäufter Zufälligkeiten bei großer Zahl von Beobachtungen wieder Gesetzmäßigkeiten, die um so strenger gelten, je größer die Zahl der beteiligten Individuen oder der einzelnen Beobachtungen ist.

Die Teilchen, welche eine BROWNsche Bewegung ausführen, verhalten sich genau wie Moleküle von außerordentlich großer Masse. Auch für sie gilt, daß auf jeden ihrer Freiheitsgrade (fortschreitende Bewegung und Rotation) der

Energiebetrag $\frac{1}{2} k T$ entfällt. Die mittlere kinetische Energie ihrer fortschreitenden Bewegung ist also $\frac{1}{2} mv^2 = \frac{3}{2} k T$. Je höher die Temperatur T, desto intensiver ist ihre Bewegung.

Unter der vereinigten Wirkung der BROWNschen Bewegung, die die Teilchen durch den ganzen verfügbaren Raum durchschnittlich gleichmäßig zu verteilen sucht (Diffusion, § 158), und der Schwerkraft, die sie zu Boden drückt, verteilen sich in einer Flüssigkeit oder einem Gase schwebende Teilchen so, daß sie in tieferen Niveaus zahlreicher sind als in höheren, und zwar verteilt sich ihre Dichte nach einer Formel, die der barometrischen Höhenformel (Gl. 15, § 102) ganz analog ist (Abb. 153). Da die BROWNsche Bewegung um so heftiger ist, je kleiner die

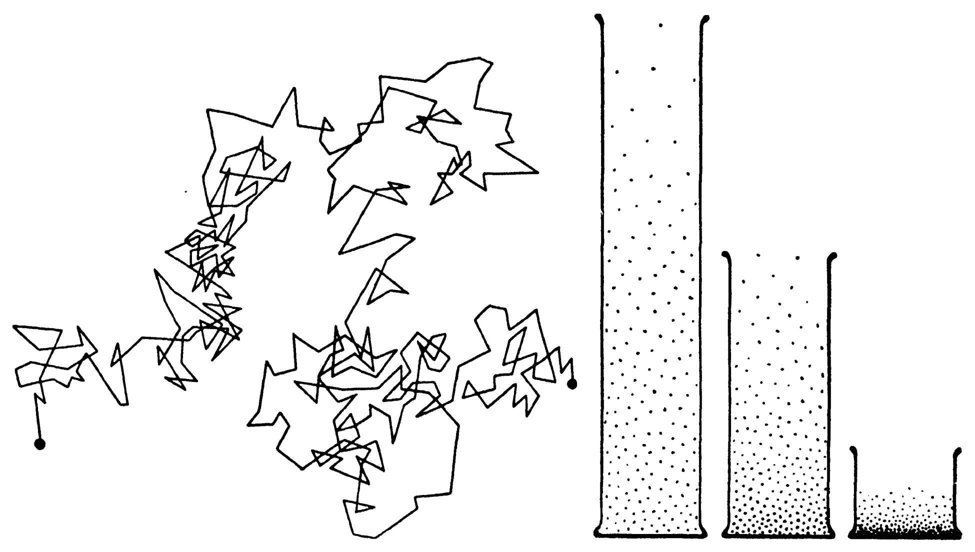


Abb. 152. BROWNsche Bewegung.

Abb. 153. Verteilung schwebender Teilchen in einer Flüssigkeit.

Teilchen sind, so verbreiten sich sehr kleine Teile durch große Bereiche einer Flüssigkeit, während größere Teile sich in der Nähe des Bodens ansammeln. Der Unterschied in der Verteilung rührt von der gleichen Ursache her, aus der sich das Mischungsverhältnis der einzelnen Gase in der Atmosphäre mit der Höhe ändert. Die schwebenden Teilchen entsprechen einem Gase mit extrem hohem Molekulargewicht und zeigen daher im Schwerefelde ein extrem hohes Dichtegefälle.

Die unregelmäßigen Zickzackbewegungen, die ein Teilchen bei der BROWNschen Bewegung ausführt, sind eine charakteristische Folge der Tatsache, daß die Gesetze der Statistik, welche Mittelwerte über eine große Zahl von Teilchen geben, bei kleiner Teilchenzahl versagen müssen (vgl. wieder die Statistik eines einzelnen Hauses und einer ganzen Stadt). Das Volumen, das ein Teilchen einnimmt, welches eine BROWNsche Bewegung von merklicher Stärke ausführt, ist so klein, daß in ihm die Abweichungen der Zahl, Richtung und durchschnittlichen Geschwindigkeit der Moleküle vom Mittelwert zeitweise beträchtlich sein können. Man bezeichnet diese Erscheinung als Schwankungen. Solche Schwankungen treten überall da auf, wo die Zahl der Individuen klein ist. Man vergleiche folgendes Beispiel. Man zähle etwa in Abständen von je 1 Minute die Anzahl der Menschen, die sich in einer Stadt auf einer 1 km langen belebten Straße befinden. Man wird finden, daß die relativen Abweichungen der ein-

zelnen Zahlen von ihrem Mittelwert (etwa in Prozenten ausgedrückt) sehr klein sind. Führt man das gleiche an einer 1 km langen, wenig belebten Landstraße oder an einem nur 10 m langen Stück der städtischen Straße aus, so ergeben sich sehr viel größere relative Abweichungen vom Mittelwert, weil die in Frage kommende Individuenzahl sehr viel kleiner ist.

Trotzdem sind auch diese Schwankungen statistisch faßbar, nicht im einzelnen, aber wieder in ihrem Mittelwert. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung sagt aus, daß die mittlere, relative Schwankung (genauer die Wurzel aus dem Mittelwert der 2. Potenz der Schwankungen, dem sog. mittleren Schwankungsquadrat) der Wurzel aus der Zahl der beteiligten Individuen umgekehrt proportional ist. Aus der mittleren Größe der Schwankung kann man daher die Zahl dieser Individuen ermitteln.

Die Theorie der BROWNschen Bewegung ist von EINSTEIN aufgestellt worden. Mit ihrer Hilfe kann man aus den Beobachtungen der BROWNschen Bewegung die Dichteschwankungen der Moleküle des Mediums, in dem die Bewegung stattfindet, und aus diesen die Zahl der Moleküle in 1 ccm berechnen. Dem gleichen Zweck kann grundsätzlich jede molekulare oder atomistische Schwankungserscheinung dienen (z. B. die Schwankungen, die die Ausstrahlung radioaktiver Substanzen zeigt, § 519).

Bei drehbar aufgehängten Gebilden besteht die BROWNsche Bewegung in unregelmäßig schwankenden Drehbewegungen. Es gibt Vorrichtungen (z. B. Spiegelablesung), um sehr kleine Drehbewegungen beobachtbar zu machen. Von solchen macht man u. a. bei der Messung schwacher elektrischer Ströme Gebrauch. Es wird etwa die unter der Wirkung eines elektrischen Stromes erfolgende Drehung einer Magnetnadel beobachtet. Auch die Magnetnadel führt unter der Wirkung des umgebenden Gases eine allerdings überaus schwache drehende BROWNsche Bewegung aus. Dies führt zu einer unteren Grenze für die Beobachtbarkeit elektrischer Ströme, die dann erreicht ist, wenn die unregelmäßigen Ausschläge, die die Nadel infolge BROWNscher Bewegung ausführt, von der gleichen Größenordnung sind, wie die Ausschläge unter der Wirkung des Stromes. Aber auch dann, wenn man die Magnetnadel in ein vollkommenes Vakuum brächte, würde diese Grenze nicht überschritten werden können, weil auch ein elektrischer Strom Schwankungen ausführt, die von einer BROWNschen Bewegung der Elektrizitätsträger herrühren.

15. Kapitel.

Temperatur, Druck und Volumen. Zustandsgleichungen.

160. Ausdehnung fester und flüssiger Körper durch die Wärme. Die Abmessungen der Körper ändern sich bei einer Änderung ihrer Temperatur, wenn auch in sehr verschiedenem Maße. Sie dehnen sich bei Erwärmung aus und ziehen sich bei Abkühlung zusammen. Sei Δt die mit einem Körper vorgenommene Temperaturänderung, l seine Länge vor der Temperaturänderung, so ist seine Länge im erwärmten Zustande

$$l + \Delta l = l\,(1 + \alpha \Delta t) \quad \text{oder} \quad \frac{\Delta l}{l} = \alpha \Delta t, \tag{1}$$

d. h. die relative Längenänderung $\Delta l/l$ und die Temperaturänderung Δt sind einander, wenigstens innerhalb gewisser Grenzen, proportional. Die Konstante α, welche für jede Substanz einen charakteristischen Wert hat, heißt der lineare Ausdehnungskoeffizient der Substanz (Tab. 5). Wie man aus der Gl. 1

sieht, ist α zahlenmäßig gleich der Längenänderung eines Stücks des betrachteten Materials von der Länge $l = 1$ cm bei einer Temperaturänderung $\Delta t = 1^0$.

Tabelle 5.
Ausdehnungskoeffizienten einiger fester und flüssiger Körper in Grad $^{-1}$.

Blei	0,0000292	Diamant	0,0000013	Alkohol	0,00110
Eisen	120	Graphit	080	Äther	163
Kupfer	165	Glas	081	Olivenöl	072
Platin	090	Bergkristall ⊥ Achse	144	Quecksilber	018
Invar (64 Fe + 36 Ni)	016	„ ∥ „	080	Wasser	018
		Quarzglas . . .	005		

Die Ausdehnungskoeffizienten sind also sehr verschieden. Der geringe Ausdehnungskoeffizient von Quarzglas zeigt sich z. B. darin, daß man ein Stück glühendes Quarzrohr in kaltes Wasser tauchen kann, ohne daß es wie Glas zerspringt. Bei letzterem rührt das Springen daher, daß sein Gefüge der plötzlichen ungleichmäßigen Zusammenziehung bei der Abkühlung nicht gewachsen ist.

Natürlich ändert sich bei einem festen Körper mit der Temperatur auch das Volumen. Hat ein Parallelepiped bei der Temperatur t das Volumen $V = a \cdot b \cdot c$, so beträgt das Volumen bei der Temperatur $t + \Delta t$

$$(V + \Delta V) = a \cdot b \cdot c\,(1 + \alpha \Delta t)^3.$$

Dies gilt natürlich nur für isotrope, d. h. in allen Richtungen gleich beschaffene Körper, sonst kann α für verschiedene Richtungen verschiedene Werte haben (s. den Bergkristall, Tab. 5).

Da $\alpha \cdot \Delta t$ immer klein gegen 1 ist, kann man schreiben

$$(V + \Delta V)/V = (1 + 3\alpha \Delta t) \quad \text{oder} \quad \frac{\Delta V}{V} = 3\alpha \Delta t. \qquad (2)$$

3α ist der kubische Ausdehnungskoeffizient. Er ist also dreimal so groß wie der lineare.

Da sich das Volumen eines Körpers bei Erwärmung vergrößert, seine Masse aber konstant bleibt, so wird seine Dichte bzw. sein spezifisches Gewicht bei Erwärmung kleiner.

Bei der Messung der Ausdehnung flüssiger Körper ist natürlich die gleichzeitige Ausdehnung des Gefäßes mit in Rechnung zu setzen. Unter dem Ausdehnungskoeffizienten einer Flüssigkeit ist stets ihr kubischer Ausdehnungskoeffizient zu verstehen.

Abb. 154. Längenänderung eines Stabes durch die Wärme.

Folgende Versuche mögen die Ausdehnung fester und flüssiger Körper durch die Wärme illustrieren. Eine Metallstange ist am einen Ende befestigt, am andern Ende mit einer Zeigervorrichtung versehen, welche ihre Längen-

änderung sichtbar macht. Erwärmt man den Stab durch eine Flamme, so bewegt sich der Zeiger (Abb. 154). Eine Metallkugel, welche bei Zimmertemperatur gerade durch einen Metallring hindurchfällt, bleibt nach ausreichender Erwärmung in ihm liegen und fällt erst nach Abkühlung hindurch (Abb. 155).

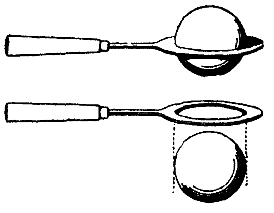


Abb. 155. Volumänderung einer Kugel durch die Wärme.

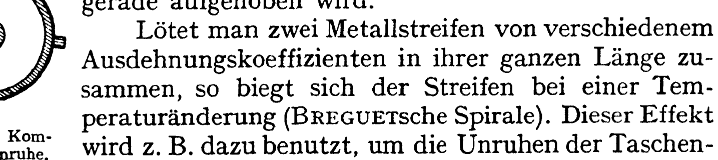
Setzt man ein Glasgefäß mit einem Steigrohr, welches mit einer Flüssigkeit gefüllt ist, in heißes Wasser, so steigt die Flüssigkeit nach anfänglichem kurzen Sinken im Steigrohr empor. Das anfängliche Sinken rührt daher, daß das Glasgefäß sich eher ausdehnt als die in ihm enthaltene Flüssigkeit. Das gleiche beobachtet man, wenn man ein Quecksilberthermometer in heißes Wasser taucht.

Die Ausdehnung von Eisenträgern von Gebäuden kann bei Bränden gefährlich werden, weil sie das Mauerwerk auseinander sprengen. Deshalb sollen solche Träger möglichst immer am einen Ende frei gelagert oder sonst beweglich sein. Eisenbahnschienen erhalten kleine Abstände, um Raum für die Ausdehnung im Sommer zu lassen.

Die Anwendungen der beschriebenen Erscheinungen sind sehr mannigfaltig. Wir führen nur folgende Beispiele an.

Eisenringe u. dgl. werden über Achsen in heißem Zustande geschoben, damit sie sich nach Abkühlung fest anpressen. Dasselbe geschieht mit den Eisenreifen der Räder.

Die Rostpendel der Pendeluhren bestehen aus zwei verschiedenen Arten von Metallstäben (Abb. 156), z. B. aus Eisen und Zink (Fe, Zn), deren Längen so bemessen sind, daß die Hebung der Pendellinse durch die Ausdehnung der Stangen Zn infolge der Senkung durch die Ausdehnung der Stangen Fe gerade aufgehoben wird.



Lötet man zwei Metallstreifen von verschiedenem Ausdehnungskoeffizienten in ihrer ganzen Länge zusammen, so biegt sich der Streifen bei einer Temperaturänderung (Breguetsche Spirale). Dieser Effekt wird z. B. dazu benutzt, um die Unruhen der Taschenuhren temperaturunabhängig zu machen, indem man den Umfang der Unruhe aus zwei solchen Doppelstreifen herstellt (Abb. 157). Die Ausdehnung des Unruherades bei a und b mit der Temperatur wird durch die Einbiegung an den Lücken in ihrer Wirkung auf das für die Schwingungszeit maßgebende Trägheitsmoment kompensiert.

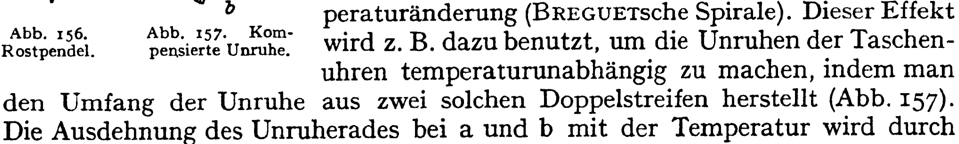


Abb. 156. Rostpendel.

Abb. 157. Kompensierte Unruhe.

161. Anomalie des Wassers. Das Wasser ist einer der wenigen Körper, der sich in einem kleinen Temperaturbereich, nämlich zwischen 0° und 4°, mit steigender Temperatur nicht ausdehnt, sondern zusammenzieht. Es hängt das damit zusammen, daß mit dem Wasser in diesem dem Schmelzen unmittelbar benachbarten Bereich noch molekulare Umwandlungen vorgehen. Tabelle 6 illustriert dies Verhalten durch Angabe der Dichte des Wassers in dem fraglichen Temperaturbereich.

Tabelle 6. Dichte des Wassers.

0°	0,99987 $g \cdot cm^{-3}$
2°	0,99997
4°	1,00000
6°	0,99997
8°	0,99988
10°	0,99973

In dieser Anomalie des Wassers liegt der Grund dafür, daß das Gramm auf Wasser von 4^0 bezogen wird (§ 23). In der Nähe des Dichtemaximums, also bei 4^0, ändert sich die Dichte bei kleinen Temperaturänderungen sehr viel weniger als in den benachbarten Bereichen (vgl. das Intervall von 2^0 bis 4^0 und von 0^0 bis 2^0), Ein kleiner Fehler in der Temperatur macht hier für die Dichte sehr viel weniger aus als bei anderen Temperaturen. Daher ist Wasser von der Dichte, wie sie dem Maximum bei 4^0 entspricht, mit größerer Annäherung zuverlässig herzustellen als Wasser von irgendeiner andern Dichte.

Die Anomalie des Wassers ist im Haushalte der Natur von großer Bedeutung. Wäre Wasser von 0^0 am dichtesten, also auch spezifisch am schwersten, so würde bei Abkühlung der obersten Wasserschichten das kalte Wasser immer nach unten sinken. Das ist in Wirklichkeit nur so lange der Fall, als die Wassertemperatur nicht unter 4^0 sinkt. Bis bei Abkühlung diese Temperatur erreicht ist, mischen sich also die verschieden warmen Wasserschichten fortwährend, und es entsteht, wenigstens in nicht zu tiefen Gewässern, eine ziemlich gleichmäßige Temperatur. Ist aber das Wasser bis auf 4^0 abgekühlt, so sinken die sich weiter abkühlenden Oberflächenschichten nicht mehr zu Boden, da sie spezifisch leichter sind als das bereits unter ihnen befindliche Wasser von 4^0, sondern kühlen sich, an der Oberfläche bleibend, immer mehr ab, bis sie gefrieren, so daß sich eine Eisdecke bildet (Abb. 158). Die Anomalie des Wassers hat daher zur Folge, daß die Wassertemperatur in größeren Tiefen nur sehr schwer unter 4^0 sinken kann, und ein Ausfrieren bis auf den Grund nicht leicht eintritt. (Oberhalb 4^0 erfolgt der Wärmeausgleich im Wasser durch die sehr stark wirksame Konvektion, unterhalb von 4^0 nur durch die sehr viel langsamer wirkende Wärmeleitung. Vgl. § 197.) Das ist natürlich von Wichtigkeit für die Möglichkeit der Existenz organischen Lebens im Wasser.

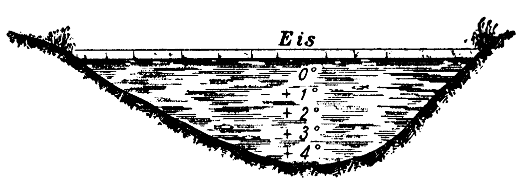


Abb. 158. Zur Anomalie des Wassers.

162. Die Zustandsgleichung der idealen Gase. Das Gesetz von BOYLE-MARIOTTE-GAY LUSSAC. Der Zustand eines idealen Gases ist durch den Druck p, das Volumen V und die Temperatur T in einfacher Weise bestimmt. Nach den Gl. 6, § 97, und 3, § 157, ist nämlich $p = \frac{1}{3} n \mu \overline{v^2}$ und $\frac{1}{2} \mu \overline{v^2} = \frac{3}{2} k T$, daher

$$p = n k T, \tag{3}$$

wobei n die Zahl der Moleküle in 1 ccm und μ die Masse, $\overline{v^2}$ das mittlere Geschwindigkeitsquadrat eines Moleküls bedeutet. Die Masse von 1 ccm, d. h. die Dichte des Gases, ist daher $\varrho = n \mu = 1/V_s$. V_s ist das spezifische Volumen (§ 56). Es folgt dann aus Gl. 3

$$p \cdot V_s = \frac{kT}{\mu}. \tag{4}$$

Wir multiplizieren auf der rechten Seite dieser Gleichung Zähler und Nenner mit N, der Zahl der Moleküle im Mol (§ 96), und setzen $Nk = R$. R ist die sog. allgemeine Gaskonstante. Da sowohl N wie k universelle Konstanten sind, so ist dies R auch. Ihr Zahlenwert hängt also nicht von der Art des Gases ab. Es ist

$$R = 0{,}83131 \cdot 10^8 \text{ erg/grad} \cdot \text{mol} = 1{,}986 \text{ cal/grad} \cdot \text{mol} \tag{5}$$

(wegen cal = Kalorie s. § 168). $N\mu$ ist die Gesamtmasse der Moleküle in 1 Mol, also gleich dem Molekulargewicht M des Gases, so daß

$$p V_s = \frac{NkT}{N\mu} = \frac{RT}{M} \quad \text{oder} \quad p \cdot M \cdot V_s = RT. \tag{6}$$

Nun ist aber $M \cdot V_s = V_m$ das Volumen von M g, also von 1 Mol, das sog. Molvolumen, welches für alle idealen Gase bei gleicher Temperatur und gleichem Druck den gleichen Wert hat. Wir können also statt Gl. 6 auch schreiben

$$p \cdot V_m = RT. \tag{7}$$

In dieser Form ist in dem Gesetz keine von der Art des speziellen idealen Gases abhängige Konstante mehr enthalten. Bei $p = 760$ mm und $T = 273^0$ abs., also 0^0 C, ist (§ 96)

$$V_m = 22400 \text{ ccm}. \tag{8}$$

Die Gl. 4, 6 und 7 sind nur verschiedene Ausdrucksarten des gleichen Gesetzes. Es ist eine Erweiterung des Gesetzes von BOYLE-MARIOTTE (§ 98) und heißt das Gesetz von BOYLE-MARIOTTE-GAY LUSSAC (1802) oder die Zustandsgleichung der idealen Gase.

Gl. 4 drückt den Zustand von 1 g eines idealen Gases aus, weil das darin auftretende spezifische Volumen V_s das Volumen von 1 g ist. Das Volumen von m g ist $V = m \cdot V_s$. Es folgt daher aus Gl. 6 für eine beliebige Gasmenge m

$$p V = m \frac{kT}{\mu} = m \frac{RT}{M}, \quad \text{bzw.} \quad \frac{pV}{T} = \text{const}, \tag{9}$$

oder in der gewöhnlichen Temperaturskala ($T = 273^0 + t$, § 155)

$$p V = m \frac{R}{M} (273^0 + t). \tag{10}$$

Bezeichnen wir den Druck und das Volumen bei $t = 0^0$ mit p_0 und V_0, so folgt, da $p_0 V_0 = m \frac{R}{M} \cdot 273^0$,

$$p V = p_0 V_0 \left(1 + \frac{t}{273^0}\right) = p_0 V_0 (1 + \alpha t), \tag{11}$$

oder allgemeiner für zwei beliebige Temperaturen t_1 und t_2

$$p_1 V_1/(1 + \alpha t_1) = p_2 V_2/(1 + \alpha t_2) = p_0 V_0, \tag{12}$$

wobei $\alpha = 1/273^0$ (genau $1/273{,}2 = 0{,}003660$, § 155).

In Abb. 159 ist der Zusammenhang zwischen p und V für ein ideales Gas bei verschiedenen Temperaturen dargestellt. Die Kurven sind sog. Isothermen, d. h. jede einzelne entspricht einer bestimmten, längs der Kurve konstanten Temperatur.

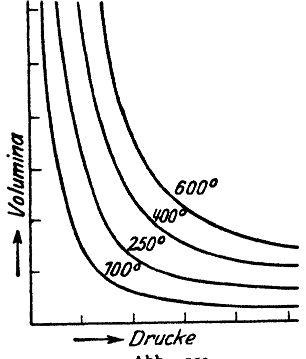


Abb. 159. Isothermen eines idealen Gases.

163. Der Ausdehnungskoeffizient und der Druckkoeffizient der idealen Gase. Aus Gl. 11 und 12 können wir den Ausdehnungskoeffizienten der idealen Gase entnehmen. Wir betrachten die Volumänderung bei konstantem Druck und haben also in Gl. 12 zu setzen: $t_2 = t_1 + \Delta t$, $p_2 = p_1$. Es ergibt sich dann die Volumzunahme

$$\Delta V = V_2 - V_1 = \frac{V_1}{1 + \alpha t_1} \cdot \alpha \Delta t = V_0 \alpha \Delta t, \tag{13}$$

wenn V_0 das Volumen bei 0^0 und beim Druck $p_0 = p_1 = p_2$ bedeutet. Die Volumzunahme der idealen Gase mit der Temperatur bei konstantem Druck ist also eine gleichmäßige und beträgt für je 1^0 Temperaturänderung 1/273 des Volumens V_0 bei 0^0 und gleichem Druck. (Man beachte, daß hier α nicht die relative Ausdehnung $\Delta V/V$ bei 1^0 Temperaturerhöhung bedeutet, sondern $\Delta V/V_0$, daß also α als Ausdehnungskoeffizient etwas anders

definiert ist, als dies bei den festen und flüssigen Körpern geschah. Die relative Ausdehnung $\Delta V/V$ eines idealen Gases bei der Temperatur t und 1^0 Temperaturerhöhung beträgt, wie man leicht zeigen kann, $1/(273+t)$, also z. B. bei 15^0 $1/288$. Sie ist also eine Funktion der Temperatur.)

Halten wir das Volumen einer Gasmenge bei einer Temperaturänderung Δt konstant, so erhalten wir in ganz entsprechender Weise

$$\Delta p = p_2 - p_1 = p_0 \cdot \alpha \Delta t. \tag{14}$$

Im Sinne dieser Gleichung bezeichnet man die Konstante α auch als den Druck- oder Spannungskoeffizienten der idealen Gase.

Tab. 7 gibt die an verschiedenen Gasen gemessenen Werte des Druckkoeffizienten α. Der Grad der Übereinstimmung des experimentellen und des an letzter Stelle genannten theoretischen Wertes von α ist ein Hinweis darauf, in welchem Grade sich ein wirkliches Gas dem idealen Gaszustand nähert. Man sieht, daß dies vielfach, und gerade bei den meisten gewöhnlichen Gasen, sehr weitgehend der Fall ist.

Tabelle 7. Druckkoeffizienten einiger Gase.

Wasserstoff	0,003663 Grad^{-1}
Helium	3660
Stickstoff	3675
Sauerstoff	3674
Kohlenoxyd	3667
Kohlensäure	3726
Ammoniak	3802
Ideales Gas theoretisch 1/273,2	3660

164. Die Zustandsgleichung von VAN DER WAALS. Die vollkommene Zustandsgleichung einer Substanz müßte so beschaffen sein, daß sie den funktionellen Zusammenhang zwischen p, V und T von den tiefsten bis zu den höchsten Temperaturen und Drucken, also gleichzeitig für den festen, flüssigen und gasförmigen Zustand umfaßte. Das ist bis heute noch nicht gelungen. Dagegen konnte VAN DER WAALS (1873) eine Zustandsgleichung aufstellen, welche wenigstens für viele Substanzen sowohl für den flüssigen wie für den gasförmigen Zustand Geltung hat. Diese Zustandsgleichung — eine Erweiterung der Gl. 7 — lautet

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT. \tag{15}$$

a und b sind Konstanten, die von der Natur des Gases abhängen, und die Zusatzglieder a/V_m^2 und $-b$ tragen den Abweichungen vom idealen Gaszustand Rechnung. Bei der Ableitung der Gesetze der idealen Gase ist vorausgesetzt, daß zwischen den Molekülen keine Kräfte wirken. Tatsächlich aber ziehen sie einander an, und zwar um so mehr, je dichter das Gas ist. Dies hat zur Folge, daß die Geschwindigkeit, mit der die Gasmoleküle auf die ein Gasvolumen begrenzende Gefäßwandung treffen, und daher auch der auf diese Wandung ausgeübte Druck p (§ 97) durch die die Moleküle in der Richtung auf das Innere des Gasraums ziehende Kraft vermindert wird. (Vgl. hierzu die die Ursache der Oberflächenspannung veranschaulichende Abb. 82, § 92.) Dem als Kraft auf die Flächeneinheit der Gefäßwände gemessenen Gasdruck p ist daher, wie VAN DER WAALS zeigte, ein additives Glied, eben a/V_m^2, hinzuzufügen. Es ist groß, wenn das Molvolumen V_m klein ist, d. h. wenn die Moleküle einander, auf engem Raum zusammengedrängt, nahe sind, also starke Kräfte aufeinander ausüben. Bei großem V_m, also kleiner Gasdichte, verschwindet es gegenüber p. Die Ableitung der Zustandsgleichung idealer Gase

hat ferner zur Voraussetzung, daß der Raum, den die Gasmoleküle selbst einnehmen, sehr klein ist gegen den ihnen zur Verfügung stehenden Raum. Diese Vernachlässigung wird durch das Glied b beseitigt, welches wie eine Verminderung des Volumens V_m wirkt. Ist V_m sehr groß, also die Dichte klein, so kann man b daneben vernachlässigen. Gl. 15 geht also, wie es sein muß, bei großem V_m, d. h. kleiner Dichte in die Zustandsgleichung idealer Gase (Gl. 7) über. Die Konstante b ist dem sog. Kovolumen proportional, das ist dasjenige Volumen, welches 1 Mol der Substanz einnehmen würde, wenn die Moleküle in der engsten möglichen Packung beieinander lägen. Die Konstanten a und b sind für verschiedene Substanzen verschieden.

Eine eingehendere Diskussion der VAN DER WAALSschen Gleichung erfolgt in § 184. Dort findet sich auch eine Darstellung in Kurvenform.

165. **Verschiedene Sonderfälle von Zustandsänderungen.** Der Zustand eines Gases hängt von drei Veränderlichen, p, V und T, ab. Der allgemeinste Fall einer Zustandsänderung ist eine solche, bei der sich diese drei Größen sämtlich gleichzeitig ändern. Es kann aber auch eine dieser Größen konstant gehalten werden.

Isotherme Zustandsänderungen sind solche, bei denen T, isobare solche, bei denen p, isopykne solche, bei denen V, also auch die Dichte, konstant gehalten wird.

Die isothermen Zustandsänderungen eines idealen Gases werden durch das BOYLE-MARIOTTEsche Gesetz (§ 98) beherrscht. Gl. 13 beherrscht die isobaren, Gl. 14 die isopyknen Zustandsänderungen eines idealen Gases.

Zustandsänderungen, bei denen einem Körper keine Energie in Form von Wärme von außen zugeführt oder nach außen hin entzogen wird, heißen adiabatische Zustandsänderungen (§ 172). In diesem Falle kann der Zustand des Körpers, wenn wir von chemischen Prozessen absehen, nur durch mechanische Arbeit geändert werden.

166. **Flüssigkeitsthermometer.** Instrumente zur Temperaturmessung heißen Thermometer, sofern es sich um Instrumente handelt, welche mit dem betreffenden Körper in unmittelbare Berührung gebracht werden und dann die gleiche Temperatur annehmen wie dieser.

Die gebräuchlichsten Thermometer sind die Quecksilberthermometer, bei denen die Wärmeausdehnung des Quecksilbers zur Messung der Temperatur benutzt wird. Die Quecksilberthermometer haben die allbekannte Form: ein kugelförmiges oder zylindrisches Glasgefäß mit einer angesetzten feinen Kapillaren, welche bis auf einen Teil der Kapillaren mit Quecksilber gefüllt sind. Das von Quecksilber freie Ende ist möglichst gut luftleer gemacht. Erwärmt sich das Quecksilber, so steigt es in der Kapillaren hoch. Die Eichung von Thermometern erfolgt so, daß man sie in Bäder von genau bekannter Temperatur eintaucht. Die wichtigsten Eichtemperaturen (sog. Fixpunkte) sind die Schmelztemperatur des Eises, 0^0 C, und die Siedetemperatur des Wassers bei 760 mm Druck, 100^0 C, als diejenigen Temperaturen, auf denen die Temperaturskala beruht. Als weitere Eichtemperaturen können u. a. die Schmelzpunkte gewisser anderer reiner Substanzen dienen, z. B. Hg $-38{,}87^0$, Sn $+231{,}84^0$, Zn $+419{,}4^0$, Ag $960{,}3^0$, Au 1063^0, Pt 1764^0, welch letztere aber für Quecksilberthermometer nicht mehr in Frage kommen. Nachdem auf der Skala des Thermometers diejenigen Punkte festgelegt sind, auf die das Ende des Quecksilberfadens sich bei 0^0 und bei 100^0 einstellt, wird das Zwischenstück in 100 gleiche Teile geteilt, und diese Skala gegebenenfalls noch über die beiden Fixpunkte hinaus verlängert. Dabei wird stillschweigend die Voraussetzung gemacht, daß sich das Quecksilber und das Glas in diesem ganzen Temperaturbereich gleichmäßig ausdehnt. Tatsächlich ist dies nicht genau der Fall. Erstens ist der Ausdehnungskoeffizient

des Quecksilbers selbst zwischen 0° und 100° nicht streng konstant, und zweitens zeigt auch das Glas in diesem Bereich eine nicht ganz gleichmäßige Wärmeausdehnung, die auch für die verschiedenen Glassorten verschieden ist. Der Fehler kann zwischen 0° und 100° an einzelnen Stellen den Betrag von 0,1° ein wenig überschreiten. Das Glas der Thermometer zeigt eine thermische Nachwirkung, d. h. es zieht sich nach erfolgter Erwärmung bei Abkühlung nicht sofort vollständig wieder auf sein früheres Volumen zusammen, sondern erst nach einiger Zeit. Bringt man ein vorher auf höhere Temperatur, etwa 100°, erwärmtes Thermometer sofort in schmelzendes Eis, so zeigt es daher anfänglich nicht auf 0°, sondern etwas tiefer (sog. Depression des Nullpunktes). Diese Nachwirkungserscheinungen sind bei frisch hergestelltem Glase besonders stark und verschwinden zum Teil, wenn man das Glas häufigen aufeinanderfolgenden Erwärmungen und Abkühlungen aussetzt (künstliche Alterung von Thermometern). Sie bilden ein Analogon zu den elastischen Nachwirkungen (§ 81).

Der Meßbereich eines gewöhnlichen Quecksilberthermometers ist nach unten durch diejenige Temperatur, bei der das Quecksilber gefriert, —38,87°, begrenzt. Die obere Grenze seiner Verwendbarkeit liegt bei etwa 150°, weil oberhalb dieser Temperatur bereits eine merkliche Verdampfung des Quecksilbers in den gasleeren Raum der Kapillaren eintritt. Diese wird weitgehend eingeschränkt, wenn man die Kapillare nicht gasleer macht, sondern mit einem Gase, meist Stickstoff, füllt. Mit Hilfe einer solchen Stickstoffüllung von hohem Druck (30—50 Atm) kann man auch das Sieden des Quecksilbers bei höheren Temperaturen verhindern (§ 181). Derartige Thermometer aus besonderem Glase sind bis etwa 660°, solche aus Quarz bis etwa 750°, benutzbar (Stickstoffthermometer).

Für tiefe Temperaturen benutzt man statt des Quecksilbers Flüssigkeiten, die einen möglichst niedrigen Gefrierpunkt haben, z. B. Alkohol (Weingeistthermometer), Pentan oder Petroläther.

Spezialkonstruktionen ermöglichen die Ablesung des höchsten oder tiefsten Standes, die das Thermometer während einer gewissen Zeit gezeigt hat (Maximum- und Minimumthermometer). Hierher gehört auch das Fieberthermometer.

167. Gasthermometer und sonstige Methoden der Temperaturmessung. Für sehr genaue Messungen, insbesondere aber zur Eichung anderer Thermometer, benutzt man Thermometer mit Gasfüllung. Und zwar benutzt man dazu ein Gas, welches dem idealen Zustand möglichst nahe ist, meist Wasserstoff, Stickstoff oder Helium, in einem Gefäß aus Platinrhodium. Man kann zur Bestimmung der Temperatur entweder die Volumänderung bei konstantem Druck $[V = V_0\,(1 + \alpha t)]$ oder die Druckänderung bei konstantem Volumen $[p = p_0\,(1 + \alpha t)]$ benutzen (§ 163). Meist geschieht das letztere.

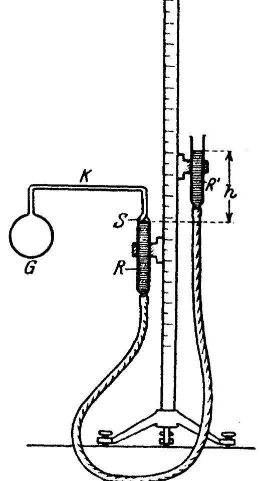


Abb. 160. Gasthermometer.

In Abb. 160 ist ein Gasthermometer einfacher Konstruktion für konstantes Volumen dargestellt. Das Gas befindet sich im Gefäß *G*, das der zu messenden Temperatur ausgesetzt wird, und in der anschließenden Kapillare *K*. Der Raum ist durch Quecksilber abgeschlossen. Durch Regulieren des Quecksilberstandes wird dafür gesorgt, daß das Quecksilber genau eine feine Spitze *S* berührt, so daß das Volumen stets das gleiche ist. Der Druck des Gases bei verschiedenen Temperaturen kann aus der Höhendifferenz *h* des Quecksilbers in den Rohren *R* und *R'* abgelesen werden.

Außer den hier beschriebenen, auf der thermischen Volumänderung beruhenden Methoden gibt es noch andere Methoden zur Temperaturmessung, welche auf dem Einfluß der Temperatur auf den elektrischen Widerstand bzw. auf der Strahlung der Körper beruhen (§ 255 und 485). Für sehr hohe Temperaturen kommt letzteres allein in Betracht.

16. Kapitel.

Spezifische Wärme.

168. Wärmemenge. Kalorie. Nach § 156 besteht eine Temperaturerhöhung eines Körpers in einer Vermehrung der Energie der Moleküle des Körpers. Man muß einem Körper also Energie zuführen, um ihn zu erwärmen. Häufig ist diese zugeführte Energie bereits in Form von Wärmeenergie eines andern Körpers (Flamme, elektrisch geheizter Körper) vorhanden, und die Erwärmung des Körpers besteht in einem Übergang der molekularen Energie von einem andern wärmeren Körper auf ihn. Es ist üblich, Energiebeträge, die als thermische oder Wärmeenergie eines Körpers auftreten, als Wärmemengen zu bezeichnen, ein Ausdruck, der noch aus der Zeit stammt, in der man die Wärme für einen Stoff hielt. Da demnach eine Wärmemenge nichts anderes ist als eine gewisse Energiegröße, so wäre es an sich natürlich, sie in der gleichen Einheit zu messen, in der wir bisher Energien gemessen haben, nämlich in erg. Es ist dies aber im allgemeinen nicht üblich. Die praktische Einheit der Wärmemenge ist die (kleine) Kalorie oder Grammkalorie, 1 cal (WILKE 1772). Sie ist definiert als diejenige Wärmemenge, die notwendig ist, um 1 g Wasser von 14,5° auf 15,5° zu erwärmen. (Die Angabe der Temperatur ist notwendig, da die zu einer Erwärmung des Wassers um 1° nötige Wärmemenge ein wenig von der Temperatur abhängt.) 1000 cal nennt man eine große Kalorie oder Kilogrammkalorie, 1 Cal oder kcal (vgl. § 193).

169. Wärmekapazität und spezifische Wärme. Körper aus dem gleichen Material, aber von verschiedener Masse, benötigen zur Erzielung der gleichen Temperaturerhöhung einer um so größeren Wärmemenge, je größer ihre Masse ist. Zwei Körpern gleicher Masse, aber aus verschiedenem Material, müssen im allgemeinen verschieden große Wärmemengen zugeführt werden, um ihnen die gleiche Temperaturerhöhung zu erteilen. Man nennt die Wärmemenge, die man einem Körper zuführen muß, um seine Temperatur um 1° zu erhöhen, seine Wärmekapazität K. Um also einen Körper von der Temperatur t_1 auf die Temperatur t_2, d. h. um $t_2 - t_1$ Grad, zu erwärmen, ist die Wärmemenge

$$Q = K\,(t_2 - t_1)\ \text{cal} \tag{1}$$

erforderlich.

Die Wärmekapazitäten K zweier Körper aus dem gleichen Material verhalten sich wie ihre Massen m, es ist also

$$K = C\,m\ \text{cal/grad.} \tag{2}$$

Die Größe C ist eine für jedes Material charakteristische Konstante, seine sog. spezifische Wärme (richtiger wäre spezifische Wärmekapazität). Ist $m = 1$ g, so wird $K = C$. D. h. die spezifische Wärme einer Substanz ist die Wärmekapazität von 1 g der Substanz, oder anders ausgedrückt, die spezifische Wärme einer Substanz ist diejenige Wärmemenge, die man 1 g der Substanz zuführen muß, um sie um 1° zu erwärmen. Tab. 8 zeigt die spezifischen Wärmen einiger fester und flüssiger Körper.

Es ist bemerkenswert, daß das Wasser eine besonders hohe spezifische Wärme besitzt. Diese Tatsache ist von großer Wichtigkeit für den Wärmehaushalt der Natur. Sie hat zur Folge, daß die Meere zu Beginn der warmen Jahreszeit verhältnismäßig lange kälter bleiben als die Luft, und zu Beginn der kalten Jahreszeit wärmer. Daher kommt es, daß das Klima in der Nähe der Küsten erheblich geringere jährliche Temperaturunterschiede zeigt als das Klima im Innern der Kontinente.

Die Gase werden in § 171 gesondert behandelt.

Tabelle 8. Spezifische Wärme einiger Substanzen.

	Spez. Wärme C in cal · grad^{-1} · g^{-1}	Atomgewicht α	Atomwärme $C\alpha$
Aluminium	0,214	27,1	5,80
Eisen	0,111	55,84	6,29
Nickel	0,106	58,68	6,22
Kupfer	0,091	63,57	5,78
Silber	0,055	107,88	5,93
Antimon	0,050	120,2	6,00
Platin	0,032	195,2	6,25
Gold	0,031	197,2	6,12
Blei	0,031	207,2	6,42
Glas	0,19	—	—
Quarzglas	0,174	—	—
Diamant	0.12	—	—
Wasser	1,00	—	—
Äthyläther	0,56	—	—
Äthylalkohol	0,58	—	—
Schwefelkohlenstoff	0,24	—	—

170. **Atomwärme. Gesetz von Dulong-Petit.** In der Tab. 8 sind bei den Metallen außer den spezifischen Wärmen C noch die Atomgewichte α und die Produkte $C\alpha$ eingetragen, also die Wärmekapazitäten von α g, d. h. von so viel Gramm, wie das Atomgewicht beträgt. $C\alpha$ ist demnach die Wärmekapazität von 1 Grammatom, also für jeweils die gleiche Anzahl von Atomen (§ 96). Man sieht aus der Tabelle, daß diese sog. Atomwärme bei den Metallen trotz sehr verschiedener Atomgewichte einen einigermaßen konstanten Zahlenwert hat, nämlich rund 6 (Gesetz von Dulong-Petit 1819).

Diese Tatsache erklärt sich auf folgende Weise. Die Metalle sind kristallinische Gebilde, in denen die Atome raumgitterartig angeordnet sind (§ 528). Ihre thermische Bewegung besteht in Schwingungen, um gewisse Ruhelagen, in denen sie durch die Kräfte festgehalten werden, die von den sie umgebenden Atomen ausgehen. Bezüglich dieser Schwingungen haben die Atome drei Freiheitsgrade, und daher beträgt ihre kinetische Energie im Mittel $3kT/2$ (§ 156). Die Atome besitzen aber auch potentielle Energie, und diese ist, sofern ihre Schwingungen harmonisch sind, im Mittel ebenso groß wie ihre kinetische Schwingungsenergie. Die Gesamtenergie eines Atoms beträgt also im Mittel $3kT$. In einem Grammatom des Metalls befinden sich N Atome (§ 96). Daher sollte die thermische Energie eines Grammatoms gleich $3NkT$ oder, da $Nk = R$ (§ 162), gleich $3RT$ sein. Die Atomwärme, d. h. die Wärmeenergie, die einem Grammatom bei einer Temperaturerhöhung um 1^0 zugeführt werden muß, ist demnach $3R(T+1) - 3RT = 3R$. Nun ist R sehr nahezu gleich 2, also ist der theoretische Wert der Atomwärme gleich 6. Die Abweichungen rühren daher, daß tatsächlich die Verhältnisse nicht ganz so einfach liegen, wie hier angenommen wurde. Bei sehr tiefen Temperaturen treten ganz abweichende Verhältnisse ein. Näheres hierüber s. § 511 und 516.

171. **Die spezifische Wärme der Gase.** Bei den festen und flüssigen Körpern ist die Zustandsänderung, insbesondere die Volumänderung bei einer Temperaturänderung, eindeutig bestimmt. Bei den Gasen ist dies anders. So ist z. B. ihre Volumänderung bei einer Temperaturänderung erst dann eindeutig gegeben, wenn man weiß, wie sich gleichzeitig ihr Druck ändert.

Am einfachsten liegen die Verhältnisse, wenn man dafür sorgt, daß das Volumen einer Gasmenge bei einer Temperaturänderung konstant bleibt. Wir

können uns das wenigstens theoretisch so vorstellen, daß das Gas in ein vollkommen starres Gefäß eingeschlossen sei, welches sein Volumen bei einer Temperaturänderung nicht merklich ändert. (Tatsächlich erzielt man dies durch Regelung des Drucks.) Wir denken uns 1 g eines idealen Gases in einem solchen Gefäß befindlich. Nach § 96 sind dies $1/M$ Mol (M = Molekulargewicht), und die Zahl der Gasmoleküle ist demnach gleich N/M (N = LOSCHMIDTsche Zahl). Die Zahl der Freiheitsgrade der Moleküle sei n. Dann entfällt auf jedes Molekül bei der Temperatur T nach Gl. 1, § 156 im Durchschnitt die Energie $E = nkT/2$, also auf die ganze Gasmenge die Energie $A = nNkT/2M$ oder nach § 162 $A = nRT/2M$ (R = allgemeine Gaskonstante).

Erhöht man jetzt die Temperatur des Gases um 1^0 von T auf $T+1$, so ändert sich die Energie des Gases um den Betrag $nR/2M$. Nun ist aber die Energieänderung von 1 g einer Substanz bei einer Temperaturänderung um 1^0 definitionsgemäß die spezifische Wärme derselben. In dem besprochenen Falle handelt es sich um die spezifische Wärme bei konstantem Volumen C_v. Es ist also allgemein für ein Gas, dessen Moleküle n Freiheitsgrade haben,

$$C_v = \frac{n}{2}\,\frac{R}{M}, \tag{4}$$

und daher, nach § 156, idealen Gaszustand vorausgesetzt, für

$$\begin{aligned} &\text{einatomige Gase } (n=3) \quad C_v = \frac{3}{2}\,\frac{R}{M},\\ &\text{zweiatomige Gase } (n=5) \quad C_v = \frac{5}{2}\,\frac{R}{M},\\ &\text{alle anderen Gase } (n=6) \quad C_v = 3\,\frac{R}{M}. \end{aligned}$$

Die Molwärme bei konstantem Volumen c_v ist die Wärmekapazität von 1 Mol, also M mal so groß wie die spezifische Wärme, also $c_v = \frac{3}{2}R$ bzw. $\frac{5}{2}R$ bzw. $3R$. Die Molwärmen sind also für alle idealen Gase mit Molekülen gleicher Atomzahl gleich groß.

Wir betrachten jetzt 1 g eines idealen Gases, welches in ein zylindrisches Gefäß mit beweglichem Stempel eingeschlossen ist. Auf diesen Stempel wirke von außen eine konstante Kraft, die in dem Gase einen konstanten Druck aufrechterhält. Nimmt man mit dem Gase eine Temperaturerhöhung um 1^0 vor, so dehnt es sich, da sein Druck konstant bleibt, aus, es schiebt den Stempel ein wenig zurück. Dabei tritt eine Volumänderung ΔV ein, und das Gas leistet nach § 100 gegen den Stempel Arbeit im Betrage $p\Delta V$. Nach Gl. 6, § 162, ist für 1 g ($V = V_s$) bei einer Temperaturänderung ΔT die Arbeit $p\Delta V = R\Delta T/M$, also im vorliegenden Falle, bei einer Temperaturänderung $\Delta T = 1^0$, $p\Delta V = R/M$. Das ist demnach derjenige Anteil der einer Gasmenge von 1 g zugeführten Wärme, der bei einer Erwärmung des Gases bei konstantem Druck nicht als Wärme, d. h. als Zuwachs von molekularer Energie, sondern als mechanische Arbeitsleistung (Verschiebung des Stempels gegen die von außen wirkende Kraft) in die Erscheinung tritt.

Da dem Gase Energie nur in Form von Wärme zugeführt wurde, so muß auch diese vom Gase geleistete Ausdehnungsarbeit aus der zugeführten Wärme gedeckt werden. Es muß also dem einen Gramm Gas der Betrag R/M mehr an Wärme zugeführt werden, als bei der gleichen Temperaturerhöhung bei konstantem Volumen. Die gesamte, in diesem Falle zuzuführende Wärmemenge heißt die spezifische Wärme bei konstantem Druck C_p, und es folgt

$$C_p = C_v + \frac{R}{M}. \tag{5}$$

Es ergibt sich daher im idealen Gaszustand für

$$\text{einatomige Gase } C_p = \frac{5}{2}\frac{R}{M},$$
$$\text{zweiatomige Gase } C_p = \frac{7}{2}\frac{R}{M},$$
$$\text{alle anderen Gase } C_p = 4\,\frac{R}{M}.$$

Für die Molwärmen bei konstantem Druck c_p ergibt sich entsprechend $c_p = \frac{5}{2} R$ bzw. $\frac{7}{2} R$ bzw. $4 R$. Es folgen ferner die wichtigen Beziehungen für

einatomige Gase $C_p/C_v = \frac{5}{3} = 1{,}67$,
zweiatomige Gase $C_p/C_v = \frac{7}{5} = 1{,}40$,
alle anderen Gase $C_p/C_v = \frac{4}{3} = 1{,}33$.

Weiter muß für alle idealen Gase $c_p - c_v = R$ sein.

Die hier abgeleiteten Beziehungen gelten streng nur für ideale Gase. Tab. 9 gibt einige Zahlenwerte.

Die allgemeine Gaskonstante ist $R = 1{,}986$ cal/grad · mol. Die letzte Kolumne zeigt, daß die Beziehung $c_p - c_v = R$ bei allen angeführten Gasen teils vorzüglich, teils sehr nahezu erfüllt ist. Für c_p ergibt die Theorie, je nach der Zahl der Atome im Molekül, in runder Zahl ($R = 2$ cal/grad · mol) die Werte 5 bzw. 7 bzw. 8. Bei den meisten Gasen der Tabelle ist auch dies sehr annähernd erfüllt, beträchtliche Abweichungen zeigen die Gase CO_2 und CH_4.

Tabelle 9. Spezifische Wärme einiger Gase.

	C_v	C_p	C_p/C_v	c_p	$c_p - c_v$
H_2	2,41	3,40	1,41	6,80	1,98
He	0,76	1,26	1,66	5,04	2,00
N_2	0,178	0,249	1,40	6,98	1,99
O_2	0,156	0,218	1,40	6,98	1,98
A	0,077	0,127	1,65	5,02	1,99
CO_2	0,155	0,202	1,30	8,88	2,07
CH_4	0,405	0,531	1,31	7,43	2,02

Die Messung der Größe $C_p/C_v = \varkappa$ ist ein wichtiges Mittel, um zu erkennen, ob ein Gas ein-, zwei- oder mehratomig ist. Da diese Größe in den Ausdruck für die Schallgeschwindigkeit in Gasen eingeht (§ 125, Gl. 18), so kann man sie aus der Schallgeschwindigkeit ermitteln. Die Methode der KUNDTschen Staubfiguren (§ 143) ist ursprünglich zu diesem Zweck ersonnen.

172. Adiabatische Zustandsänderungen von Gasen. Wird einem Gase Energie in Gestalt einer Wärmemenge Q von außen zugeführt, so kann sich diese in verschiedener Weise am Gase auswirken. Wir betrachten m g eines idealen Gases. Die in ihm enthaltene molekulare Energie sei U. Bei Zuführung der Wärmemenge Q ändere sich diese um den Betrag dU, gleichzeitig ändere sich das Volumen um den Betrag dV. Mit dieser Volumänderung ist ein Aufwand an Arbeit im Betrage $p \cdot dV$ verbunden, der auf Kosten der zugeführten Wärmemenge Q geht. Nach dem Energieprinzip (erster Hauptsatz, § 192) muß sein

$$Q = dU + p \cdot dV. \tag{6}$$

Eine adiabatische Zustandsänderung ist eine solche, bei der keine Wärme zu- oder abgeführt wird, also

$$dU + p \cdot dV = 0 \tag{7}$$

ist. Nun ist die in m g eines idealen Gases enthaltene Molekularenergie gemäß der Definition der spezifischen Wärme C_v gleich $U = m C_v T$, also $dU = m C_v \cdot dT$, ferner nach Gl. 9, § 162, $p = m R T / M V$. Wir können also schreiben

$$m C_v \, dT + m \frac{R T}{M} \cdot \frac{dV}{V} = 0, \quad \text{bzw.} \quad C_v \frac{dT}{T} + \frac{R}{M} \cdot \frac{dV}{V} = 0. \tag{8}$$

Die Integration dieser Gleichung liefert

$$C_v \log T + \frac{R}{M} \log V = \text{const}, \quad \text{oder} \quad \log T + (\varkappa - 1) \log V = \text{const},$$

wenn wir noch $R/M = C_p - C_v$ und $C_p/C_v = \varkappa$ setzen. Statt dessen kann man schreiben

$$T \cdot V^{\varkappa - 1} = \text{const}. \tag{9}$$

Indem wir noch $T = p \cdot V \cdot M/mR$ setzen und den konstanten Faktor mR/M in const einbeziehen, erhalten wir

$$p\, V^{\varkappa} = \text{const} = p_0\, V_0^{\varkappa}. \tag{10}$$

Dieser Ausdruck tritt also bei adiabatischen Zustandsänderungen an Stelle des für isotherme Änderungen gültigen Gesetzes von BOYLE-MARIOTTE (§ 98).

Aus Gl. 9 liest man ab, daß bei einer adiabatischen Volumverminderung bzw. Druckerhöhung eines abgeschlossenen Gasvolumens die Temperatur des Gases steigt, im umgekehrten Falle sinkt. Man kann also Gase durch adiabatisches Zusammenpressen erwärmen, durch adiabatische Volumvergrößerung abkühlen. Die adiabatische Erwärmung der Luft kann man z. B. beim Aufpumpen von Fahrradreifen beobachten, denn vor allem sie bewirkt die oft beträchtliche Erwärmung der Pumpe.

Von der Ursache der Temperaturänderung bei einer adiabatischen Volumänderung eines idealen Gases kann man sich eine ganz anschauliche Vorstellung machen. Bei einer solchen Volumänderung muß immer ein Teil der Wandung des Gefäßes, in dem sich das Gas befindet, bewegt werden. Wenn nun Moleküle des Gases gegen diese bewegte Wand stoßen, so werden sie nicht, wie von einer ruhenden Wand, mit unveränderter Geschwindigkeit zurückgeworfen. Dies wird an dem Beispiel eines gegen eine bewegte Wand geworfenen Balles klar. Bewegt sich die Wand gegen die Richtung, in der der Ball geworfen wird, so fliegt dieser mit einer größeren Geschwindigkeit wieder zurück, als er vorher hatte (Zurückschlagen eines Balles mit einem Tennisschläger). Weicht aber die Wand vor dem Ball zurück, so verliert er bei der Reflexion an Geschwindigkeit. Im ersten Falle ist er von der bewegten Wand beschleunigt worden, im zweiten hat er auf Kosten seiner Bewegungsenergie die Wand beschleunigt. Ebenso werden die Gasmoleküle von einer in das Gas hinein bewegten Wand, also bei Volumverkleinerung, beschleunigt. Die durchschnittliche Molekularenergie im Gase nimmt zu, seine Temperatur steigt. Im umgekehrten Falle werden die gegen die zurückweichende Wand stoßenden Moleküle verlangsamt, so daß die Temperatur des Gases sinkt.

Findet jedoch die Volumänderung nicht unter Bewegung einer begrenzenden Wand statt, sondern dadurch, daß dem Gase etwa durch Öffnen eines Hahns Zutritt zu einem bisher leeren Raum gestattet wird, so geschieht dies bei einem idealen Gase ohne Arbeitsleistung, die Moleküle strömen (diffundieren) einfach mit gleichbleibender Geschwindigkeit in den bisher leeren Raum, es findet dabei also auch keine Temperaturänderung statt.

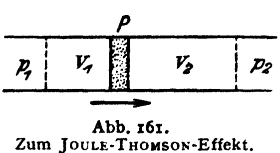


Abb. 161. Zum JOULE-THOMSON-Effekt.

Bei den wirklichen Gasen, für die die Zustandsgleichung von VAN DER WAALS (§ 164) gilt, ist dies jedoch in mehr oder weniger hohem Maße der Fall. Dieser Effekt ist von JOULE und THOMSON durch folgenden Versuch zuerst nachgewiesen worden. Sie trieben ein Gas durch einen schwer durchlässigen Pfropfen P in einem gegen Wärmeverlust gut geschützten Rohr (Abb. 161), in dem auf der einen Seite des Pfropfens der Druck p_1 und auf der anderen

der niedrigere Druck p_2 aufrechterhalten wurde. Es zeigte sich dann eine Abkühlung der durch den Pfropf getriebenen Luft. Wäre die Luft ein ideales Gas, so würde eine solche nicht eintreten, und es wäre $p_1 V_1 = p_2 V_2$. Nun bewirken aber die zwischen den Luftmolekülen wirkenden anziehenden (VAN DER WAALSschen) Kräfte, daß die Luft stärker kompressibel ist, als ein ideales Gas. Denn je dichter die Moleküle einander durch eine Verkleinerung des Volumens kommen, um so stärker treten die anziehenden Kräfte in die Erscheinung und unterstützen die Wirkung der volumenvermindernden äußeren Kraft. Entsprechend dehnt sich aber auch die Luft bei einer Druckverkleinerung stärker aus als ein ideales Gas. Daher ist im Falle des JOULE-THOMSONschen Versuchs das Volumen V_2 größer, als es bei einem idealen Gase wäre, und daher $p_2 V_2 > p_1 V_1$. Nun ist aber nach § 100 $p_1 V_1$ die zum Durchdrücken des Gases durch den Pfropfen aufzuwendende äußere Arbeit, $p_2 V_2$ die auf der anderen Seite neu gewonnene äußere Arbeit. Es wird also äußere Arbeit bei diesem Prozeß gewonnen. Dies kann nur auf Kosten der inneren Energie des Gases, also seiner Molekulargeschwindigkeit, geschehen. Das Gas kühlt sich durch Leistung äußerer Arbeit ab. Es kühlt sich aber ferner auch durch Leistung innerer Arbeit ab, weil die Gasmoleküle sich bei der Expansion weiter voneinander entfernen, ihre gegenseitige potentielle Energie also vermehrt wird, was wieder nur auf Kosten ihrer kinetischen Energie geschehen kann.

Wasserstoff ist bei Zimmertemperatur weniger kompressibel als ein ideales Gas, daher tritt bei ihm der umgekehrte Effekt ein. Die Erklärung hierfür liegt, wie hier nicht näher ausgeführt werden kann, in der Tatsache, daß die Wasserstoffmoleküle ein besonders großes Volumen einnehmen (d. h., daß die Konstante b des VAN DER WAALSschen Gesetzes bei ihnen besonders groß ist). Erst bei -80^0 (sog. Inversionspunkt) wird beim Wasserstoff die Arbeit gegen die inneren Kräfte so groß, daß Abkühlung eintritt.

Die Tatsache, daß in der Formel für die Schallgeschwindigkeit in Gasen (Gl. 18, § 125) die Größe $\varkappa = C_p/C_v$ auftritt, erklärt sich daraus, daß die Druckänderungen und die damit verbundenen Temperaturänderungen in den Gasen beim Schall so schnell verlaufen, daß ein Ausgleich der Temperaturen zwischen benachbarten Luftteilchen nicht stattfinden kann, die Änderungen also adiabatisch sind, so daß nicht das BOYLE-MARIOTTEsche Gesetz, sondern die Gl. 10 gilt.

173. **Messung spezifischer Wärmen.** Apparate zur Messung spezifischer Wärmen heißen Kalorimeter. Die einfachste Form eines solchen ist das Wasserkalorimeter. Es besteht aus einem Metallgefäß, welches mit Wasser gefüllt wird. Zur Vermeidung von Wärmeverlusten wird es meist mit einer für Wärme möglichst wenig durchlässigen Hülle (Watte, Luftmantel) umgeben.

Es sei m die Masse eines Körpers aus der Substanz, deren spezifische Wärme C man bestimmen will, also Cm seine Wärmekapazität. m' sei die Masse, $C' = 1$ die spezifische Wärme des Wassers im Kalorimeter, m'' die Masse des Kalorimetergefäßes und C'' dessen spezifische Wärme, seine Wärmekapazität (sog. Wasserwert) also $C''m''$. Die Anfangstemperatur des Wassers und des Gefäßes sei t_1. Der zu untersuchende Körper werde zunächst auf die Temperatur t_2 gebracht, z. B. indem man ihn in ein durch Wasserdampf von 100^0 erwärmtes Gefäß bringt, so daß $t_2 = 100^0$. Bringt man jetzt den Körper in das Wasser, so gleichen sich die Temperaturen aus, und die „Mischungstemperatur" (Endtemperatur) sei t. Das Wasser und das Gefäß haben sich also um $(t - t_1)^0$ erwärmt, der Körper hat sich um $(t_2 - t)^0$ abgekühlt. Erstere haben dabei die Wärmemenge $(C'm' + C''m'') \cdot (t - t_1)$ aufgenommen, letzterer hat die Wärmemenge $Cm \cdot (t_2 - t)$ abgegeben. Nach dem Energieprinzip (erster Hauptsatz, § 192)

muß also sein

$$C\,m \cdot (t_2 - t) = (C'\,m' + C''\,m'')\ (t - t_1)$$

oder

$$C = \frac{C'm' + C''m''}{m}\ \frac{t - t_1}{t_2 - t}.$$

Bei genaueren Messungen ist hieran noch eine kleine Korrektion anzubringen, weil man zur Messung der Temperaturen ein Thermometer und zum schnellen Temperaturausgleich einen Rührer in das Wasser bringen muß, deren Wärmekapazitäten auch zu berücksichtigen sind. Diese Methode heißt Mischungsmethode.

Die spezifische Wärme von Flüssigkeiten kann man mit dem gleichen Kalorimeter messen, indem man das Wasser durch die Flüssigkeit ersetzt und einen Körper von bekannter spezifischer Wärme (sog. Kalorifer oder Thermophor) benutzt. In diesem Falle ist dann C' die zu bestimmende unbekannte Größe.

Eine andere Kalorimeterform, das Eiskalorimeter, s. § 175.

NERNST hat mehrere Kalorimeter angegeben, welche besonders zur Messung spezifischer Wärmen bei sehr tiefen Temperaturen dienen, und bei denen dem zu untersuchenden Körper eine bestimmte Wärmemenge durch elektrische Heizung zugeführt und dann seine Temperaturänderung gemessen wird. Auch letzteres geschieht auf elektrischem Wege.

17. Kapitel.

Änderungen des Aggregatzustandes.

174. **Die Arten der Änderung des Aggregatzustandes.** Erwärmt man einen (kristallinischen) festen Körper, so geht er bei einer bestimmten Temperatur in den flüssigen Zustand über, sofern nicht schon vorher chemische oder sonstige Veränderungen (Verbrennung u. dgl.) mit ihm vorgehen. Der Körper schmilzt. Kühlen wir ihn jetzt von höherer Temperatur wieder ab, so wird er bei der gleichen Temperatur wieder fest. Diese Temperatur heißt die Schmelztemperatur oder der Schmelzpunkt der betreffenden Substanz. Da die Substanz bei Abkühlung bei der gleichen Temperatur fest wird, erstarrt, so nennt man sie auch Erstarrungstemperatur. Bei Substanzen, die bei normalen Temperaturen flüssig sind, wie insbesondere das Wasser und wäßrige Lösungen, ist im allgemeinen der Ausdruck Gefrierpunkt gebräuchlich. Physikalisch sind alle diese Ausdrücke gleichbedeutend.

Flüssige Körper gehen im allgemeinen bei jeder Temperatur allmählich in den gasförmigen Zustand über, sie verdampfen oder verdunsten, und zwar um so schneller, je höher die Temperatur ist. Steigert man die Temperatur, so tritt schließlich ein Verdampfungsvorgang besonderer Art ein, indem die ganze Flüssigkeit unter heftiger Blasenbildung in ihrem Innern schnell vollkommen in den gasförmigen Zustand übergeht. Die Flüssigkeit siedet. Die betreffende Temperatur heißt die Siedetemperatur oder der Siedepunkt. Der dem Verdampfen entgegengesetzte Vorgang heißt Kondensation. Ein dem Verdampfen entsprechender Übergang vom festen zum flüssigen Zustand kommt nicht vor. Dagegen gibt es einen der Verdampfung entsprechenden Übergang vom festen unmittelbar in den gasförmigen Zustand und umgekehrt. Dieser Vorgang heißt Sublimation.

Der Verlauf der Temperatur t eines Körpers beim Schmelzen oder Sieden bei gleichmäßiger Zufuhr von Wärme Q ist in Abb. 162 schematisch dargestellt. Vor Erreichung des Schmelz- bzw. Siedepunktes t_s steigt die Temperatur des

Körpers regelmäßig an. In dem Augenblick, wo diese Temperatur erreicht ist (*A*), hört der Anstieg auf, und die Temperatur bleibt, trotz dauernder Zufuhr von Wärme, so lange konstant, bis der Schmelz- bzw. Siedeprozeß vollständig beendet ist (*B*). Alsdann steigt sie wieder an. Diese Temperatur läßt sich also sehr scharf bestimmen. Beim Erstarren bzw. Kondensieren verläuft der Vorgang in genau der gleichen Weise rückwärts.

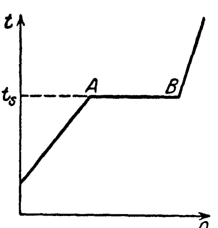


Abb. 162. Temperaturverlauf beim Schmelzen und beim Sieden. t = Temperatur, Q = zugeführte Wärmemenge, t_s = Schmelz- bzw. Siedetemperatur.

Einen wohldefinierten Schmelzpunkt haben nur die eigentlichen festen, also die kristallinischen, aber nicht die amorphen Körper (§ 13 und 527). Diese erweichen vielmehr bei steigender Temperatur allmählich, werden zunächst zähflüssig und schließlich dünnflüssig (Glas, Siegellack, Pech). Bei ihnen gibt es also keine scharfe Grenze zwischen fest und flüssig.

Die drei Formen, in denen eine Substanz entsprechend den drei Aggregatzuständen auftreten kann, nennt man ihre Phasen und spricht demnach von der festen, flüssigen und gasförmigen Phase. Eine Substanz kann bei gegebenem Druck nur bei einer ganz bestimmten Temperatur, nämlich der Schmelztemperatur, dauernd gleichzeitig in festem und flüssigem Zustande anwesend sein. Oberhalb des (vom Druck abhängigen, § 177) Schmelzpunktes ist sie stets flüssig, unterhalb desselben fest. Oberhalb des (ebenfalls vom Druck abhängigen, § 181) Siedepunktes ist eine Substanz nur gasförmig, aber unterhalb des Siedepunktes, nicht nur beim Siedepunkt, kann sie im flüssigen und gasförmigen Zustand gleichzeitig anwesend sein, ist dies sogar im Gleichgewichtszustand immer (§ 180). Auch unterhalb des Schmelzpunktes sind die feste und die gasförmige Phase einer Substanz nebeneinander existenzfähig. In allen drei Phasen kann eine Substanz nur bei einem ganz bestimmten Druck und einer ganz bestimmten Temperatur, beim sog. Tripelpunkt, dauernd gleichzeitig anwesend sein. Beim Wasser entspricht dieser Punkt einem Druck $p = 4{,}6$ mm und einer Temperatur $t = +\ 0{,}0076^0$. Es gilt also folgendes Schema:

Unterhalb des Schmelzpunktes: fest und gasförmig;
im Tripelpunkt: fest, flüssig und gasförmig;
zwischen Schmelzpunkt und Siedepunkt: flüssig und gasförmig;
oberhalb des Siedepunktes: gasförmig.

Bei sehr vorsichtiger Behandlung einer Flüssigkeit läßt sie sich um einige Grade unter ihren Schmelzpunkt abkühlen, ohne zu erstarren (Unterkühlung). Schüttelt man sie dann oder wirft ein Körnchen der festen Substanz hinein, so erstarrt sie sofort und erwärmt sich dabei bis auf ihren Schmelzpunkt.

Ebenso kann man eine luftfreie Flüssigkeit durch ganz langsames Erwärmen einige Grade über ihren Siedepunkt erhitzen, ohne daß sie siedet. Sie wallt dann plötzlich heftig auf und kühlt sich dabei bis auf ihren Siedepunkt ab (Siedeverzug).

Bei der Unterkühlung und beim Siedeverzug befindet sich die Flüssigkeit in einem sog. metastabilen Zustande, d. h. in einem sehr wenig stabilen inneren Gleichgewicht, aus dem sie durch eine kleine Störung herausgeworfen wird, um dann in ihren stabilsten Zustand überzugehen (etwa wie ein auf eine schmale Kante gestelltes Brett).

In der Tab. 10 sind die Schmelzpunkte und Siedepunkte einiger Substanzen wiedergegeben.

Metallegierungen haben meist einen niedrigeren Schmelzpunkt als die reinen Metalle, aus denen sie bestehen. Die sog. ROSEsche Legierung (2 Bi + 1 Pb + 1 Sn) schmilzt bei 95⁰, die sog. WOODsche Legierung (1 Cd + 1 Sn + 2 Pb + 4 Bi)

bei etwa 66°. Eine Legierung aus Kalium und Natrium ist bei Zimmertemperatur flüssig.

Die thermische Bewegung in den festen (kristallinischen) Körpern besteht in Schwingungen ihrer atomistischen Bestandteile um feste Ruhelagen. Je höher die Temperatur ist, desto heftiger werden diese Schwingungen. Bei der Schmelztemperatur haben sie einen solchen Grad erreicht, daß der Zusammenhang des Körpers gelockert wird. Die regelmäßige Ordnung des festen Körpers geht in den weitgehend ungeordneten Zustand der Flüssigkeit über. Zur Herbeiführung dieser Lockerung des atomistischen Gefüges und der etwa noch mit diesem Prozeß verbundenen Änderungen an den atomistischen Bestandteilen der Substanz ist ein Aufwand von Arbeit in Gestalt der Zuführung thermischer Energie an diese Bestandteile notwendig (Schmelzwärme).

Tabelle 10. Einige Schmelz- und Siedepunkte in Celsiusgraden.

	Schmelzpunkt	Siedepunkt
Aluminium	+ 658	—
Argon	— 189,6	— 186
Blei	+ 327,4	+ 1625
Bor	+ 2300	—
Chlor	— 102	— 33,6
Gold	+ 1064	rd. + 2610
Helium	—	— 268,82
Iridium	+ 2340	—
Kohlenstoff	rd. + 4000	—
Kupfer	+ 1043	+ 2310
Natrium	+ 97,6	+ 877,5
Platin	+ 1767	rd. + 3800
Quecksilber	— 38,87	+ 357
Sauerstoff	— 218,4	— 183
Stickstoff	— 210,52	— 195,67
Wasserstoff	— 257,14	— 252,8
Wolfram	+ 2900	—

Die Siedepunkte beziehen sich auf einen Druck von 760 mm.

Entsprechendes gilt für den Verdampfungs- bzw. Siedevorgang. Die hierbei zugeführte Wärmeenergie (Verdampfungswärme) leistet gegen die beim Schmelzprozeß bereits weitgehend gelockerten inneren Bindungen erneut Arbeit. Dies führt zu einer weiteren Trennung der Moleküle, wie wir sie bei der Besprechung des gasförmigen Zustandes kennengelernt haben.

175. **Schmelzwärme.** Die während des Schmelzvorganges (Strecke *AB* in Abb. 162) einem festen Körper zugeführte Wärmemenge wird demnach nicht zur Erhöhung der Körpertemperatur verwendet, sondern dient dazu, die zur Lösung des Verbandes der Moleküle notwendige Arbeit gegen die Kräfte zu leisten, welche die Moleküle im festen Körper zusammenhalten. Unter der Schmelzwärme einer Substanz — auch latente (verborgene) Schmelzwärme genannt, weil sie nicht durch eine Temperaturänderung in die Erscheinung tritt — versteht man diejenige Wärmemenge, die man 1 g einer Substanz zuführen muß, damit sie bei der Schmelztemperatur aus dem festen in den flüssigen Zustand übergeht. Umgekehrt wird die gleiche Wärmemenge frei, wenn ein flüssiger Körper erstarrt. Er gibt dann seine Schmelzwärme an die Umgebung ab, bzw. er bleibt selbst während des Erstarrungsprozesses trotz dauernder Wärmeabgabe nach außen auf konstanter Temperatur.

Um z. B. die Schmelzwärme des Eises zu messen, kann man so verfahren, daß man ein Stück Eis von 0° in ein mit Wasser gefülltes Kalorimeter (§ 204) bringt. Die Anfangstemperatur des Wassers und des Kalorimetergefäßes sei t_1; nachdem das Eis geschmolzen ist, betrage sie t_2. Die Masse des Eises sei m, die des Wassers m'. λ sei die in cal/g gemessene Schmelzwärme des Eises. Es sei ferner $C' = 1$ die spezifische Wärme des Wassers, C'' die spezifische Wärme des Kalorimetermaterials, m'' seine Masse, also seine Wärmekapazität $K = C''m''$. Um

das Eis auf die Temperatur t_2 zu bringen, muß es erstens geschmolzen werden. Dazu ist die Wärmemenge λm nötig. Zweitens muß es als Wasser von 0^0 auf t_2^0 erwärmt werden. Die dazu nötige Wärmemenge beträgt $C' m t_2$ cal. Das Eis nimmt also insgesamt $m(\lambda + C' t_2)$ cal auf. Diese werden dem Wasser und dem Kalorimetergefäß entzogen. Das Wasser gibt die Wärmemenge $C'm'(t_1 - t_2)$, das Kalorimeter die Wärmemenge $C''m''(t_1 - t_2)$ ab. Nach dem Energieprinzip muß — vorausgesetzt, daß keine Wärme nach außen verloren wurde — die vom Wasser und Kalorimeter abgegebene Wärmemenge gleich der vom Eise aufgenommenen Wärmemenge sein, also

$$m(\lambda + C' t_2) = (C'm' + C''m'') \cdot (t_1 - t_2)$$

oder

$$\lambda = \frac{C'm' + C''m''}{m}(t_1 - t_2) - C' t_2 .$$

Die Schmelzwärme des Eises beträgt 80 cal/g. Tab. 11 gibt die Schmelzwärmen einiger Substanzen.

Tabelle 11. Schmelzwärmen einiger Substanzen.

Aluminium	94 cal/g	Silber	26,0 cal/g
Blei	5,5 „	Kochsalz	124 „
Gold	15,9 „	Wasser	80 „
Kupfer	41 „		

Auf der Schmelzwärme des Eises beruht das Eiskalorimeter von LAVOISIER, bei dem die Messung von Wärmemengen durch Bestimmung derjenigen Eismenge (bzw. der aus ihr gebildeten Wassermenge) erfolgt, die bei Zufuhr der zu messenden Wärmemenge geschmolzen wird. Beim Eiskalorimeter von BUNSEN (Abb. 163) wird die gebildete Wassermenge aus der Volumabnahme (§ 176) beim Schmelzen ermittelt. Es besteht aus einem doppelwandigen Glasgefäß, welches zwischen den Wänden mit Wasser gefüllt ist. Der Zwischenraum setzt sich in eine mit Quecksilber (q) gefüllte Kapillare c fort. Zunächst umgibt man das innere Gefäß mit einem Eismantel b, indem man es durch schnelle Verdampfung von Äther oder mittels einer Kältemischung (§ 190) unter 0^0 abkühlt. Jetzt bringt man den auf eine höhere Temperatur t erwärmten Körper, dessen Masse m sei, in das nunmehr auf 0^0 befindliche innere Gefäß. Er gibt dort seine Wärme an das Eis ab und kühlt sich auf 0^0 ab. Dabei schmilzt eine gewisse Eismenge m', und nach dem Energieprinzip muß sein

$$C m \cdot t = m' \lambda = 80\, m' \text{ cal.}$$

Abb. 163. Eiskalorimeter.

Die Menge m' des geschmolzenen Eises wird aus der Volumabnahme berechnet, welche durch Messung der Verschiebung des Quecksilberfadens mittels der Skala m bestimmt werden kann, wenn man den Querschnitt der Kapillaren kennt. Auf diese Weise kann die spezifische Wärme C des hineingebrachten Körpers bestimmt werden. Da außer dem hineingebrachten Körper keiner der beteiligten Körper seine Temperatur bei einer solchen Messung ändert, spielt die Wärmekapazität des Gefäßes hierbei keine Rolle (s. a. § 177).

176. Volumänderung beim Schmelzen. Beim Schmelzen findet fast stets eine Änderung des Volumens statt, bei den meisten Körpern eine Ausdehnung, also beim Erstarren eine Zusammenziehung. Einzelne Substanzen, z. B. das Wasser, ziehen sich beim Schmelzen zusammen. Die Änderung des Volumens beträgt beim Wasser 9%. Die Dichte des Wassers ist also erheblich größer als

die des Eises; dieses ist spezifisch leichter als das Wasser. Die Folge dieses Verhaltens ist die für den Haushalt der Natur höchst wichtige Tatsache, daß Eis auf Wasser schwimmt, und zwar so, daß rund $^9/_{10}$ des Eisvolumens sich unter Wasser befinden.

Die Tatsache, daß Wasser sich beim Gefrieren ausdehnt, spielt in der Natur auch sonst eine wichtige Rolle. Wasser, welches in Gesteinsritzen eingedrungen ist, kann das Gestein beim Gefrieren durch seine plötzliche Ausdehnung sprengen, so daß es beim Wiederauftauen im Frühjahr zerfällt (daher die erhöhte Gefahr von Steinschlag im Gebirge im Frühling). Dieses Ausfrieren des Gesteins ist einer der wichtigsten gebirgszerstörenden Faktoren. Das Mauerwerk von Gebäuden muß gegen Eindringen von Wasser geschützt werden, damit es nicht den gleichen zerstörenden Wirkungen unterliegt. Die Ausdehnung des Wassers beim Gefrieren läßt sich auf folgende Weise zeigen. Eine faustgroße Eisenbombe mit etwa 1 cm starken Wänden wird ganz mit Wasser gefüllt und fest verschlossen und alsdann in eine Kältemischung gebracht. Beim Gefrieren sprengt das Eis die Bombe. (Die Explosion ist ungefährlich.)

Läßt man in einem Reagenzglas Paraffin erstarren, so kann man die Zusammenziehung, die bei dieser Substanz eintritt, deutlich erkennen. Das feste Paraffin ist in der Mitte ausgehöhlt, da es an den Wänden zuerst erstarrt.

177. Abhängigkeit des Schmelzpunktes vom Druck. Dehnt sich eine Substanz beim Schmelzen aus, so steigt ihr Schmelzpunkt, wenn der äußere Druck erhöht wird, zieht sie sich zusammen, so sinkt er. Daher sinkt der Schmelzpunkt des Eises bei Druckerhöhung, und zwar um 0,0075°, wenn der Druck um 1 Atmosphäre erhöht wird. Bringt man ein Stück Eis von 0° unter erhöhten Druck, so tritt im ersten Augenblick ein Schmelzprozeß ein. Die hierzu nötige latente Schmelzwärme entzieht aber das Eis sich selbst, und es kühlt sich so auf eine etwas niedrigere Temperatur ab, so daß ein Fortschreiten des Schmelzprozesses unterbunden wird, solange dem Eis nicht Wärme von außen zugeführt wird. Auf dieser Tatsache beruht die sog. Regelation des Eises. Das Zusammenpressen des Schnees, der ja aus Eiskristallen besteht, im Schneeball bewirkt infolge der Druckzunahme, daß der Schnee an einzelnen Stellen schmilzt. Beim Nachlassen des Drucks gefriert er wieder, und die Schneekristalle backen zusammen. Auf der Regelation beruht auch zum Teil die Plastizität des Eismaterials der Gletscher. Erhöht sich der Druck im Eise, weil der Eisstrom an einer engen Stelle zusammengepreßt wird, so tritt ein örtliches Schmelzen ein, welches den einzelnen Teilen des Eises eine Bewegung gegeneinander und eine Anpassung an den verfügbaren Raum gestattet. So kommt es, daß das Gletschereis wie eine äußerst zähe Flüssigkeit talwärts fließt.

Beim Eiskalorimeter beobachtet man die zunächst überraschende Tatsache, daß nicht das dem hineingebrachten warmen Körper nächstliegende Eis schmilzt, sondern das am weitesten außen befindliche Eis. Das im ersten Augenblick durch Schmelzen des dem innern Gefäße nächsten Eises gebildete Wasser hat ein kleineres Volumen als das Eis, aus dem es entstand, daher entsteht an jener Stelle eine Druckverminderung, die den Gefrierpunkt des Wassers heraufsetzt. Dies bewirkt wieder ein Gefrieren des Wassers bei einer etwas über 0° liegenden Temperatur. Diese Temperatur teilt sich dem benachbarten Eise mit, wo sich der gleiche Vorgang wiederholt, und so fort, bis die Erwärmung bis zur äußeren Begrenzung des Eismantels fortgeschritten ist, wo alsdann endgültiges Schmelzen erfolgt.

Für die Abhängigkeit des Schmelzpunkts vom Druck gilt die Gleichung von CLAUSIUS-CLAPEYRON

$$\Delta T = 0{,}0242 \frac{(V_1 - V_2)\,T}{\lambda} \Delta p. \qquad (1)$$

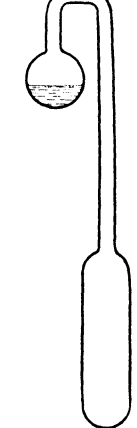
Hierin bedeutet T die (absolute) Schmelztemperatur, ΔT ihre Änderung, wenn sich der Druck um den Betrag Δp ändert, V_1 das spezifische Volumen der flüssigen, V_2 das der festen Phase, λ die latente Schmelzwärme. Aus Gl. 1 folgt das am Anfang dieses Paragraphen Gesagte. Denn ΔT ist positiv oder negativ, je nachdem V_1 größer oder kleiner als V_2 ist. Für Wasser ist $V_1 < V_2$ (§ 176), also $\Delta T/\Delta p$ negativ.

178. Verdampfen. Das Verdampfen einer Substanz hat seine Ursache in der Molekularbewegung innerhalb des flüssigen Körpers. Die zwischen den Molekülen einer Flüssigkeit wirkenden anziehenden Kräfte setzen dem Austritt von Molekülen aus der Oberfläche der Flüssigkeit einen gewissen Widerstand entgegen (vgl. die Oberflächenspannung, § 92). Es ist daher zur Entfernung eines Moleküls aus dem Anziehungsbereich der Flüssigkeit, also zum Verdampfen, ein Aufwand von Arbeit nötig. Hat ein Molekül infolge seiner thermischen Bewegung die nötige kinetische Energie, so ist es imstande, diese Arbeit auf Kosten dieser Energie zu leisten. Da es nach dem MAXWELLschen Gesetz (§ 157) stets Moleküle aller möglichen Geschwindigkeiten gibt, so werden auch stets Moleküle von innen auf die Flüssigkeitsoberfläche stoßen, welche eine ausreichend große Geschwindigkeit haben, um diese zu durchstoßen und in den Außenraum zu treten. Auf dieser Tatsache beruht das Verdampfen von Flüssigkeiten.

Die Zahl der Moleküle, deren kinetische Energie ausreicht, um diese Arbeit zu leisten, ist um so größer, je größer die mittlere Energie der Flüssigkeitsmoleküle d. h. je höher die Temperatur der Flüssigkeit ist. Die Verdampfung ist also von der Temperatur abhängig, und ihre Intensität steigt mit dieser.

Durch den Verdampfungsprozeß werden der Flüssigkeit immer ihre schnellsten Moleküle entzogen. Dadurch sinkt die durchschnittliche Molekularenergie innerhalb der Flüssigkeit, d. h. die Flüssigkeit kühlt sich ab. Soll sie auf konstanter Temperatur erhalten werden, so muß man ihr denjenigen Betrag an Wärme wieder zuführen, der ihr durch Verdampfung entzogen wird.

Die Abkühlung von Flüssigkeiten durch Verdampfung kann man leicht am Wasser beobachten. Frei stehendes Wasser ist stets ein wenig kälter als seine Umgebung. Der menschliche Körper wird stark abgekühlt, wenn er naß ist, weil das Wasser auf ihm schnell verdampft (Erkältungsgefahr nach Schwitzen). Äther kann man durch Beschleunigung seiner Verdampfung (Hindurchblasen von Luft, wodurch die Oberfläche vergrößert und der gebildete Dampf immer wieder fortgeschafft wird) leicht erheblich unter 0° abkühlen.


Abb. 164. Kryophor.

Die Beschleunigung der Abkühlung heißer Speisen durch Blasen beruht darauf, daß durch Fortschaffung des von ihnen gebildeten Wasserdampfes die Verdampfung des Wassers beschleunigt und dadurch die Temperatur der Speise herabgesetzt wird. Fette Suppen kühlen sich deshalb so schwer ab, weil die auf ihnen schwimmende Fettschicht die Verdampfung behindert.

Sehr eindrucksvoll wird die Abkühlung einer Flüssigkeit durch Verdampfung durch den sog. Kryophor (Abb. 164) demonstriert. Er besteht aus zwei durch eine Röhre miteinander verbundenen und gut luftleer gemachten Glasgefäßen, in denen sich etwas Wasser befindet. Der übrige Raum des Gefäßes ist dann mit gesättigtem Wasserdampf gefüllt (§ 180). Man bringt das Wasser in die obere Kugel und umgibt die andere, leere, mit einer Kältemischung. In ihr kondensiert sich jetzt der vorher bei Zimmertemperatur gesättigte Wasserdampf. Da aber in der oberen Kugel zunächst immer noch nahezu Zimmertemperatur herrscht, so verdampft dort weiteres Wasser. Dadurch tritt Ab-

kühlung des Wassers in ihm ein, und dieses kommt schließlich zum Gefrieren.

179. Verdampfungswärme. Die Wärmemenge, die einer Substanz durch Verdampfen von 1 g entzogen wird, oder, was dasselbe ist, die Wärmemenge, die nötig ist, um 1 g der Flüssigkeit bei konstanter Temperatur zu verdampfen, heißt (latente) Verdampfungswärme. Umgekehrt wird die gleiche Wärmemenge frei bei Kondensation von 1 g aus dem gasförmigen in den flüssigen Zustand.

Man kann die Verdampfungswärme η des Wassers messen, indem man die Temperaturänderung einer in einem Kalorimetergefäß befindlichen Wassermenge m' mißt, wenn man eine Dampfmenge m, etwa durch Einleiten mittels eines Rohres aus einem Kessel mit siedendem Wasser, in ihm kondensieren läßt. Eine der in § 175 bezüglich der Schmelzwärme angestellten vollkommen gleiche Überlegung führt dann (bei gleicher Bedeutung der Buchstaben) zu der Gleichung

$$m[\eta + C'(t_2 - t)] = (C'm' + C''m'')(t - t_1),$$

so daß

$$\eta = \frac{C'm' + C''m''}{m}(t - t_1) - C'(t_2 - t).$$

Die Verdampfungswärme η des Wassers beträgt bei 100° 539,1 cal/g. Sie ist, wie die Verdampfungswärmen überhaupt, von der Temperatur abhängig. Auch folgender einfacher Versuch ergibt wenigstens ungefähr die Verdampfungswärme des Wassers. Man fülle ein Reagenzglas etwa zu $^1/_4$ mit Wasser, stelle einen Bunsenbrenner darunter und sorge dafür, daß die Flamme gleichmäßig brennt (Schutz vor Zug). Mittels eines Metronoms vergleiche man die Zeiten, die vergehen, erstens bis das Wasser von der Anfangstemperatur t bis 100° erwärmt wurde, also zu sieden beginnt, zweitens bis der letzte Rest des Wassers verdampft ist. Die Wärmemenge, die in der ersten Phase des Versuchs jedem Gramm des Wassers zugeführt werden muß, beträgt $(100 - t)$ cal, in der zweiten Phase 539,1 cal. War die Wärmezufuhr gleichmäßig, so verhalten sich die in beiden Phasen zugeführten Wärmemengen wie die entsprechenden Zeiten, d. h. wie die Anzahl der Metronomschläge in den beiden Phasen. War etwa die Anfangstemperatur 20°, so verhalten sich die Zeiten wie 80:539.

Tabelle 12 gibt die Verdampfungswärmen einiger Substanzen bei ihrem normalen Siedepunkt. Man beachte den extrem hohen Wert beim Wasser.

Tabelle 12. Verdampfungswärme einiger Substanzen.

Alkohol	202 cal/g	Sauerstoff	51 cal/g
Ammoniak	321 ,,	Stickstoff	48 ,,
Äther	80 ,,	Schwefelkohlenstoff	85 ,,
Chlor	62 ,,	Wasser	539,1 ,,
Quecksilber	68 ,,	Wasserstoff	110 ,,

180. Gesättigter Dampf. Dampfdruck. Aus früherer Zeit ist die Gewohnheit geblieben, daß man ein Gas, welches in Berührung mit seiner eigenen Flüssigkeit steht, als Dampf bezeichnet. (Man unterschied früher Gase und Dämpfe. Letztere sollten verflüssigbar sein, erstere nicht. Man weiß heute, daß man alle Gase unter geeigneten Bedingungen verflüssigen kann, § 184.) Dämpfe sind nichts anderes als Gase. Heute wird die Bezeichnung Dampf auch vielfach für solche Gase gebraucht, welche vom idealen Gaszustand merklich abweichen, denn diese lassen sich leichter verflüssigen, als solche, bei denen das nicht der Fall ist. Physikalisch nicht korrekt ist die Bezeichnung von Wolken schwebender fester oder flüssiger Teilchen als Dampf (z. B. eine „dampfende" Lokomotive). Solche Wolken sind richtig als Nebel zu bezeichnen. Wasserdampf ist unsichtbar.

Ein dicht geschlossenes Gefäß sei zum Teil mit einer Flüssigkeit gefüllt. Diese wird in den von ihr nicht angefüllten Raumteil hinein verdampfen. Es zeigt sich, daß die Dichte, die der Dampf der Flüssigkeit in diesem Raum annehmen kann, begrenzt ist. Nach Erreichung einer bestimmten Dichte hört die weitere Verdampfung auf. Es stellt sich ein sog. dynamisches Gleichgewicht zwischen Flüssigkeit und Dampf her, derart, daß gleichzeitig ebenso viele Moleküle die Flüssigkeit verlassen (verdampfen) wie aus dem Dampf wieder in die Flüssigkeit eintreten (sich kondensieren). Da der Druck des Dampfes von seiner Dichte abhängig ist, so stellt sich also im Laufe der Zeit ein ganz bestimmter Druck des Dampfes über der Flüssigkeit her, der sog. **Dampfdruck** oder **Sättigungsdruck** der Flüssigkeit. Der Dampfdruck ist von der Temperatur abhängig und steigt mit ihr. Tab. 13a zeigt diese Abhängigkeit für Wasser (bzw. Eis, vgl. die Fußnote zu § 206), Tab. 13b für Quecksilber, Tab. 13c für Helium.

Tabelle 13a. Dampfdruck des Wassers (Eises).

-60^0	0,007 mm	$+40^0$	55,3 mm
-40^0	0,093 ,,	$+60^0$	149,4 ,,
-20^0	0,77 ,,	$+80^0$	355,1 ,,
$+0^0$	4,6 ,,	$+100^0$	760,0 ,,
$+20^0$	17,5 ,,	$+200^0$	11665,0 ,,

Tabelle 13b. Dampfdruck des Quecksilbers.
(Temperaturen in Celsiusgraden.)

0^0	0,0001846 mm	60^0	0,0277 mm
15^0	0,00081 ,,	100^0	0,3006 ,,
30^0	0,0027 ,,	$356,7^0$	760,0 ,,

Tabelle 13c. Dampfdruck des Heliums. (Absolute Temperaturen.)

$1,475^0$	4,15 mm	$4,9^0$	1329 mm
$3,516^0$	359,5 ,,	$5,16^0$	16680 ,,
$4,205^0$	757,5 ,,	$5,20^0$	17180 ,,

Ein Dampf, der mit seiner Flüssigkeit im Gleichgewicht ist, heißt gesättigt.

Der Druck (Partialdruck, § 97) des gesättigten Dampfes über einer Flüssigkeit ist unabhängig davon, ob sich über der Flüssigkeit noch fremde Gase, z. B. Luft, befinden.

Zur Bestimmung des Dampfdrucks einer Flüssigkeit bei Zimmertemperatur kann man sich der Einrichtung bedienen, die für den Versuch von Torricelli verwandt wurde (Abb. 165). Man stelle zunächst in der Röhre, wie im § 103 angegeben, ein Vakuum über Quecksilber her. Dann lasse man in der Röhre von unten her etwas von der zu untersuchenden Flüssigkeit aufsteigen. Sofort sinkt die Quecksilbersäule, weil jetzt über ihr nicht mehr der Druck Null, sondern der Dampfdruck der Flüssigkeit herrscht. Dieser ist aus der Differenz der beiden Einstellungen der Quecksilbersäule zu entnehmen. Dabei muß, damit bestimmt Sättigung herrscht, stets noch etwas Flüssigkeit im Rohr vorhanden sein. Wir können jetzt auch schließen, daß bei dem Torricellischen Versuch oben im Rohr tatsächlich kein vollkommenes Vakuum herrscht, sondern der Dampfdruck des Quecksilbers, der bei Zimmertemperatur etwa $^1/_{1000}$ mm Hg beträgt. Bei Einführung von Wasser sinkt das Quecksilber bei 15^0 um 12,8 mm, entsprechend einem Dampfdruck von 12,8 mm Hg, erheblich mehr bei Einführung von Alkohol oder Äther. Verkleinert oder vergrößert man den dem Dampf zur Verfügung stehenden Raum durch Heben, Senken oder Neigen des Rohres, so bleibt, solange noch Flüssigkeit vorhanden ist, der Dampfdruck der gleiche, und von

Abb. 165. Messung des Dampfdrucks. *b* Barometerstand, *p* Dampfdruck.

dem Dampf wird ein Teil kondensiert, bzw. es bildet sich die entsprechende weitere Menge Dampf aus der Flüssigkeit.

Die der Verdampfung entgegenwirkenden molekularen Kräfte hängen, wie im § 178 erwähnt, eng mit der Oberflächenspannung zusammen, also mit den einseitig gerichteten Kräften, die die an der Oberfläche einer Flüssigkeit befindlichen Moleküle in das Innere zu ziehen suchen. Die Kondensation einer Flüssigkeit wird daher erleichtert, wenn zu den normalen molekularen Kräften noch andere anziehende Kräfte hinzukommen. So wirken die in der Luft fast stets vorhandenen elektrisch geladenen Staubteilchen usw. infolge der von ihnen ausgehenden elektrischen Kräfte kondensationsfördernd auf Wasserdampf, sie wirken als sog. Kondensationskerne. Es tritt aber an ausgedehnten, festen, abgekühlten Flächen eine Kondensation des Wasserdampfs der Luft leichter ein als an kleinen Wassertröpfchen. Die Temperatur, bei der eine Kondensation von Wasser aus der Atmosphäre (Taubildung) an ausgedehnten Flächen eintritt, heißt Taupunkt. Er ist vom Partialdruck des Wasserdampfs, d. h. dem Sättigungsgrade der Luft, abhängig und kann dazu dienen, um den Feuchtigkeitsgehalt der Atmosphäre zu bestimmen (§ 206).

181. Sieden. Abhängigkeit des Siedepunktes vom Druck. Destillation. Das Sieden einer Flüssigkeit besteht in einer Verdampfung, welche nicht nur an der Oberfläche, sondern auch im Innern der Flüssigkeit, insbesondere an den Gefäßwänden, vor sich geht. Es bilden sich dort Dampfblasen, welche an die Oberfläche steigen. In diesen Dampfblasen herrscht der Dampfdruck, welcher der Temperatur der Flüssigkeit entspricht. Es ist klar, daß ein solcher Siedeprozeß nur dann möglich ist, wenn dieser Dampfdruck nicht kleiner ist als der Druck, unter dem die Flüssigkeit steht. Denn wäre das der Fall, so würden die etwa spontan entstehenden Blasen durch den äußeren Druck zusammengedrückt und wieder zu Flüssigkeit kondensiert werden. Eine Flüssigkeit siedet daher bei derjenigen Temperatur, bei der der Druck ihres gesättigten Dampfes gleich dem äußeren Druck, bei freiem Sieden an der Luft also gleich dem Luftdruck ist. Dabei ist zu beachten, daß die Dampfblasen im Innern der Flüssigkeit auch noch unter deren hydrostatischem Druck (§ 87) stehen, sie also eine etwas höhere Temperatur haben müssen als Dampf bei Atmosphärendruck. Zuverlässige Siedepunktsbestimmungen können daher nur durch Messung der Temperatur des Dampfes unmittelbar über der siedenden Flüssigkeit angestellt werden.

Die Siedetemperatur einer Flüssigkeit hängt also vom Druck ab. Tab. 14 zeigt diese Abhängigkeit für Wasser in der Umgebung des normalen Atmosphärendrucks. Für einen größeren Druckbereich ergibt sie sich aus Tab. 13a (§ 180). Bringt man Wasser von 90—95° in einen evakuierbaren Raum, so siedet das Wasser auf, wenn der Druck ausreichend gesunken ist. Bei ausreichend niedrigem Druck kann man sogar Wasser von Zimmertemperatur ohne Zufuhr von Wärme zum Sieden bringen. Der Versuch gelingt besonders gut, wenn man in dem Raum, in dem man den Druck erniedrigt, Schwefelsäure aufstellt, welche den entstehenden Wasserdampf absorbiert, da man den Druck andernfalls nicht unter dessen Sättigungsdruck erniedrigen kann. Da die Verdampfungswärme in diesem Falle nicht schnell genug von außen zugeführt wird, muß sie auf Kosten der Wärme des Wassers selbst gehen. Das Wasser kann

Tabelle 14.
Abhängigkeit des Siedepunktes des Wassers vom Druck.

Druck	Siedepunkt
720 mm	98,49°
730 „	98,89°
740 „	99,26°
750 „	99,63°
760 „	100,00°
770 „	100,37°
780 „	100,73°
790 „	101,09°
800 „	101,44°

sich dabei bis auf 0° abkühlen und unter gleichzeitigem Sieden gefrieren. Die sich bildende Eisdecke wird von den Dampfblasen durchbrochen.

Da der Luftdruck mit der Höhe abnimmt, so tut dies auch die Siedetemperatur des Wassers. Sie beträgt z. B. auf der Höhe des Montblanc (4800 m, Luftdruck rund 420 mm) nur etwa 84°. Man benutzt diese Abhängigkeit, um auf Expeditionen in hohen Gebirgen auf bequeme Weise Höhen zu messen (sog. Siedebarometer). Zur Beförderung des Garwerdens von Speisen benutzt man den PAPINschen Topf, einen Kochtopf, der mit einem Deckel fest verschlossen ist. Dieser besitzt ein Ventil, das sich erst bei einem gewissen Überdruck des Wasserdampfes öffnet. Das Wasser siedet dann unter dem erhöhten Druck seines eigenen Dampfes und daher bei einer höheren Temperatur als 100°.

(Man vermeide die Benutzung des Ausdrucks „kochen" statt sieden. Kochen heißt die Ausnutzung siedenden Wassers zum Garmachen von Speisen. Auch spricht man vom Auskochen von Gegenständen zwecks Reinigung oder Sterilisation. Physikalisch ist der Ausdruck sonst nicht gebräuchlich.)

Unter Destillation versteht man das Verdampfen einer Flüssigkeit und ihr erneutes Kondensieren aus ihrem Dampf bei Abkühlung. Im besonderen bezeichnet man als Destillation ein auf dieser Grundlage beruhendes Verfahren zur Gewinnung reiner Flüssigkeiten (Wasser, Alkohol usw.). Das Verfahren besteht darin, daß man die noch mit anderen Substanzen vermischte Flüssigkeit zum Sieden bringt und den Dampf in einem anderen Gefäß kondensiert. Handelt es sich z. B. um die wässerige Lösung eines Salzes, so verdampft beim Sieden nur das Wasser. Leitet man den Dampf durch eine Kühlschlange, so kondensiert er sich dort zu reinem Wasser (destilliertes Wasser). Beim Sieden eines Gemisches mehrerer Flüssigkeiten ist der Dampf erheblich reicher an denjenigen Bestandteilen, welche einen niedrigeren Siedepunkt haben als die anderen. Kondensiert man den Dampf, so sind also im Destillat die ersteren angereichert. Diese Anreicherung kann man durch Wiederholung des Verfahrens weiter treiben (fraktionierte Destillation, Gewinnung starker Alkoholika aus schwächeren).

182. **Dampfdichte.** Da nach dem Gesetz von AVOGADRO die Zahl der Moleküle in 1 ccm bei allen idealen Gasen unter gleichen Bedingungen gleich groß ist, so verhalten sich die Dichten von solchen Gasen wie die Massen ihrer einzelnen Moleküle, also auch wie ihre Molekulargewichte (§ 96). Die Dichten idealer Gase sind bei gleichem Druck und gleicher Temperatur ihren Molekulargewichten proportional, und man kann letztere aus der Dichte berechnen.

Dieses Verfahren läßt sich auch bei festen und flüssigen Substanzen anwenden, welche man verdampfen kann. In diesen Fällen pflegt man die Dichte der in den idealen Gaszustand versetzten Substanz bei 0° C und 760 mm Druck als deren Dampfdichte zu bezeichnen. In vielen Fällen existiert zwar eine Substanz unter den genannten Bedingungen nicht in einer dem idealen Gaszustand ausreichend nahen Form. Hat man jedoch ihre Dichte bei einer Temperatur und einem Druck bestimmt, bei denen sie als im idealen Gaszustand befindlich anzusehen ist, so kann man aus den Gesetzen der idealen Gase leicht berechnen, wie groß ihre Dichte wäre, wenn sie unter den obigen Bedingungen im idealen Gaszustand wären. Unter den verschiedenen Methoden zur Bestimmung von Dampfdichten sei diejenige von VICTOR MEYER erwähnt. Man füllt eine kleine, abgewogene Menge der zu untersuchenden Substanz in ein Glasröhrchen R, das entweder offen oder mit einem Stöpsel verschlossen ist, der sich bei Überdruck von innen leicht öffnet. Das Röhrchen wird in einen Glaskolben A von der in Abb. 166 dargestellten Form geworfen, der bereits vorher auf eine so hohe Temperatur erhitzt wurde, daß die Substanz

bei ihr nicht nur verdampft, sondern sich auch dem idealen Gaszustand ausreichend nahe befindet. Es ist nicht nötig, diese Temperatur genau zu kennen. Sie muß nur die vorstehende Bedingung erfüllen. Nach dem Einbringen in den Kolben, der alsdann sofort wieder mit einem Stopfen verschlossen wird, verdampft die Substanz und verdrängt die zu unterst im Kolben befindliche Luft. Das hat zur Folge, daß Luft aus dem oben am Kolben befindlichen Entbindungsrohr ausgetrieben wird. Diese wird in einem kalibrierten Maßzylinder *B* unter Wasser aufgefangen. Die ausgetriebene Luftmenge entspricht genau der Luftmenge, die im Kolben von der verdampfenden Substanz verdrängt wurde, also dort das gleiche Volumen einnahm wie diese. Da sich die verdampfte Substanz im Kolben wie ein ideales Gas verhält und da ferner auch die Luft ein nahezu ideales Gas ist, so würden sich beide Stoffe — vorausgesetzt, daß die verdampfte Substanz dabei ihren idealen Charakter behielte — bei allen Druck- und Temperaturänderungen vollkommen gleichartig verhalten. Wäre also statt der Luft die verdampfte Substanz aus dem Kolben vertrieben und im Maßzylinder aufgefangen worden, so würde sie unter der vorstehenden Voraussetzung genau das gleiche Volumen einnehmen wie die tatsächlich ausgetriebene Luft. Man kann also das abgelesene Luftvolumen gleich demjenigen Volumen setzen, das die Substanz einnehmen würde, wenn sie sich als ideales Gas unter den gleichen Druck- und Temperaturverhältnissen befinden würde wie die ausgetriebene Luft. Die Temperatur ist die Zimmertemperatur, der Druck im wesentlichen der atmosphärische Luftdruck. Jedoch sind noch zwei Korrekturen anzubringen, erstens weil das Wasser im Maßzylinder meist höher steht als außen im Gefäß, zweitens weil ein Teil des Druckes im Zylinder von gesättigtem Wasserdampf herrührt. Man kann nun auf Grund der Gasgesetze (§ 162) leicht berechnen, welches Volumen die Substanz bei 0° und 760 mm Druck einnehmen würde. Indem man das vorher festgestellte Gewicht der Substanz durch dieses Volumen dividiert, erhält man die Dichte des Dampfes. Bezieht man diese nicht auf Wasser, sondern auf Wasserstoff als Einheit (Wasserstoffgas $H_2 = 2$), so ist die Dichte unmittelbar gleich dem Molekulargewicht (§ 96).

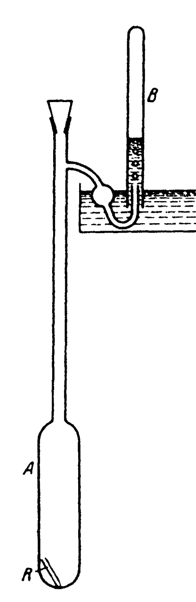


Abb. 166. Messung der Dampfdichte nach VICTOR MEYER.

183. Sublimation. Auch über festen Substanzen, die sublimieren (§ 174), besteht ein von der Temperatur abhängiger Dampfdruck. Wegen des Dampfdrucks über Eis s. Tab. 13a, § 180. Tab. 15 gibt als Beispiel einige Zahlenangaben für das Jod.

Tabelle 15. Dampfdruck über Jod.

— 48,3°	0,000050 mm	
— 32,3°	0,00052 ,,	
— 20,9°	0,0025 ,,	
0°	0,029 ,,	
15°	0,131 ,,	
30°	0,469 ,,	
80°	15,9 ,,	
114,5	90,0 ,,	(Schmelzpunkt)
185,3	760,0 ,,	(Siedepunkt).

Entsprechend der Schmelz- und der Verdampfungswärme haben solche Körper auch eine Sublimationswärme, d. i. die Wärmemenge, die man braucht, um 1 g der Substanz zur Sublimation zu bringen.

Auch bei scharfem Frost beobachtet man ein allmähliches Schwinden des Schnees, der sich durch Sublimation unmittelbar in Wasserdampf verwandelt. Der umgekehrte Vorgang ist die unmittelbare Bildung von Rauhreif aus dem Wasserdampf der Luft sowie die Bildung der Schneekristalle in den kalten oberen Luftschichten, während der Hagel aus gefrorenen Wassertropfen besteht (§ 206).

Bringt man in ein luftleer gemachtes Glasgefäß einige Jodkristalle und kühlt eine Stelle der Gefäßwand ab, so schlägt sich dort aus dem im Gefäß gebildeten Joddampf festes Jod nieder. Frei an der Luft liegende Jodkristalle, gewisse Quecksilbersalze, darunter das „Sublimat" ($HgCl_2$), u. dgl. verschwinden durch Sublimation.

184. Verflüssigung der Gase. Das Problem der Verflüssigung von Gasen besteht, vom molekularen Standpunkt aus gesehen, darin, die Moleküle in den Stand zu setzen, sich unter der Wirkung der zwischen ihnen bestehenden anziehenden Kräfte zu dem für den flüssigen Zustand charakteristischen engeren Verbande zusammenfinden (§ 527). Daß diese Kräfte nicht ohne weiteres zur Überführung des Gases in den flüssigen Zustand führen, liegt daran, daß bei höherer Temperatur die thermische Bewegung der Moleküle dem Zustandekommen eines engeren molekularen Verbandes zu stark entgegenwirkt.

Bei manchen Gasen ist es möglich, schon bei gewöhnlichen Temperaturen diese Wirkung der thermischen Bewegung dadurch zu kompensieren, daß man die Moleküle durch Verminderung des Gasvolumens, d. h. Erhöhung des Drucks, auf so kleine Abstände bringt, daß die molekularen Anziehungskräfte ausreichen, um die Moleküle gegen die Wirkung der Molekularbewegung in den engeren Verband des flüssigen Zustandes zu bringen. Solche Gase, z. B. Chlor, Kohlensäure, Ammoniak, Schwefeldioxyd, können also bei gewöhnlicher Temperatur durch Anwendung hinreichend hoher Drucke verflüssigt werden. Bei anderen Gasen gelingt dies nicht. Bei ihnen ist es vielmehr erforderlich, zunächst ihre thermische Molekularenergie herabzusetzen, d. h. sie abzukühlen. Für jedes Gas gibt es eine bestimmte Temperatur, oberhalb deren es unmöglich ist, sie unter Anwendung noch so hoher Drucke zu verflüssigen, unterhalb deren dies aber stets gelingt. Diese Temperatur heißt die kritische Temperatur T_k des Gases. Ist das Gas auch nur ein wenig unter diese Temperatur abgekühlt, so kann es durch Anwendung eines genügend hohen Druckes verflüssigt werden. Bei der kritischen Temperatur T_k ist dazu der Druck p_k erforderlich, der der kritische Druck genannt wird. Das spezifische Volumen des Gases in diesem sog. kritischen Zustande heißt sein kritisches Volumen V_k, sein reziproker Wert $\varrho_k = 1/V_k$ seine kritische Dichte. Gase (Dämpfe), welche schon bei gewöhnlicher Temperatur durch Druck verflüssigt werden können, sind also solche, deren kritische Temperatur höher ist als die gewöhnliche Temperatur.

Da die Wirksamkeit der molekularen Anziehungskräfte für die Verflüssigung entscheidend ist, so müssen Gase bei Temperaturen, wo sie durch Druck verflüssigt werden können, erheblich vom idealen Gaszustand entfernt sein. Es gilt also für sie die Zustandsgleichung von VAN DER WAALS (Gl. 15, § 164). Je besser ein Gas den Gesetzen der idealen Gase gehorcht, um so weiter ist es von seinem kritischen Zustand entfernt.

Die Zustandsgleichung von VAN DER WAALS gibt uns Auskunft über den kritischen Zustand und die Verflüssigung der Gase. In Abb. 167a sind für den Fall der Kohlensäure, der für alle andern Gase typisch ist, Isothermen nach der VAN DER WAALSschen Gleichung gezeichnet, d. h. eine Anzahl von (p, V_s)-Kurven bei konstanten Temperaturen, wie sie sich aus jener Gleichung ergeben. (V_s = spezifisches Volumen.) Wir verfolgen jetzt den Zustand des Gases, indem wir — etwa bei $t = 10^0$ — bei großem Volumen (Punkt A, Abb. 167b) beginnen und nunmehr bei konstanter Temperatur das Volumen allmählich verkleinern, d. h. den Druck erhöhen. Dabei wird das Gas bis an den Punkt B gelangen, und zwar längs der gezeichneten Isothermen. Versucht man nun, den Druck bei konstanter Temperatur weiter zu erhöhen, so gelingt dies nicht. Auch bei weiterer Verkleinerung des Volumens nimmt der Druck nicht zu, sondern bleibt konstant. Der Prozeß verläuft von B ab nicht

mehr längs der Kurve, die der VAN DER WAALSschen Gleichung entspricht, sondern längs der horizontalen Geraden *BC*, welche die VAN DER WAALSsche Kurve in *G* schneidet und in *C* erneut erreicht. Von hier ab verläuft die Zustands-

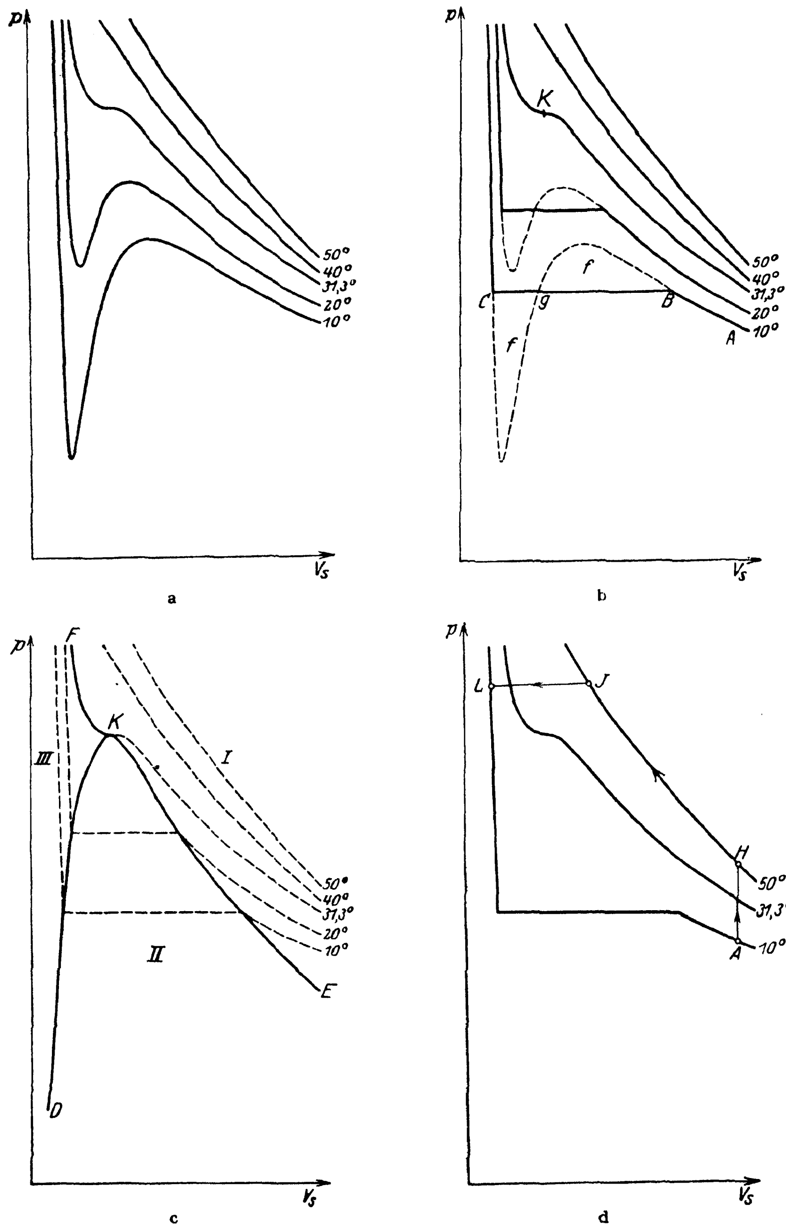


Abb. 167. Zustandsgleichung von VAN DER WAALS. Zur Verflüssigung der Gase.

änderung wieder auf der VAN DER WAALSschen Isotherme. Abb. 167 b zeigt den tatsächlichen Verlauf der Zustandsänderung.

Das horizontale Stück *BC* stellt diejenige Phase der isothermen Zustandsänderung dar, in welcher sich das Gas verflüssigt. Der Verflüssigungsprozeß be-

ginnt in B und ist in C beendet. Rechts von B haben wir ein Gas, zwischen B und C Gas (gesättigten Dampf) und Flüssigkeit nebeneinander, jenseits von C nur Flüssigkeit. Entsprechend dem Unterschied der Zusammendrückbarkeit (Elastizität) der Gase und Flüssigkeiten steigt der Druck rechts von B mit abnehmendem Volumen schwach, jenseits C stark an.

Die Lage des horizontalen Kurvenstücks BC ist, wie man beweisen kann, durch die Bedingung gegeben, daß die beiden Flächen (f), die es mit der theoretischen VAN DER WAALSschen Kurve bildet, gleich groß sind. Daher wird, wie man aus den Kurven erkennt, das horizontale Stück um so kürzer, je höher die Temperatur ist. Bei der Kohlensäure z. B. schrumpft sie bei der Isotherme von 31,3° zu einem Punkt K zusammen (Abb. 167b). Steigt die Temperatur noch höher, so gibt es keine horizontale Gerade mehr, welche die VAN DER WAALSsche Kurve dreimal schneidet wie die Gerade BC. Es ist dann auch keine Verflüssigung mehr möglich. Die Isotherme bei 31,3° entspricht also der höchsten Temperatur, bei der Kohlensäure noch verflüssigt werden kann; die kritische Temperatur der Kohlensäure beträgt 31,3°. K ist der kritische Punkt, seine Koordinaten sind der kritische Druck und das kritische Volumen.

Verbindet man die Endpunkte aller horizontalen Kurvenstücke der Isothermenschar nebst dem kritischen Punkt K durch eine Kurve (DKE, Abb. 167c), so teilt diese zusammen mit dem Stück KF der kritischen Isothermen das „Zustandsgebiet" in drei Bereiche. Im Bereich I ist die Substanz nur gasförmig, im Bereich II haben wir Gas und Flüssigkeit nebeneinander, im Bereich III ist die Substanz vollständig verflüssigt.

Die Verwandlung eines Gases in eine Flüssigkeit ist auch möglich, ohne daß die Substanz dabei einen unstetigen Verflüssigungsprozeß durchmacht. So kann man z. B., vom Punkt A auf der 10°-Isotherme ausgehend, Kohlensäure zunächst bei konstantem Volumen auf 50° erwärmen (Abb. 167d, Punkt H), sie alsdann bei konstanter Temperatur zusammendrücken bis zum Punkte J und nunmehr bei konstantem Druck wieder auf 10° abkühlen (Punkt L), wie es die Pfeile andeuten. Die Substanz befindet sich jetzt im Gebiet III, ist also zweifellos flüssig geworden. Aber in diesem Falle ist der Übergang ein stetiger. Auf dem Wege JL, beim Überschreiten der kritischen Isothermen, durchläuft die Substanz einen eigentümlichen Zustand, bei dem sie nicht plötzlich wie bei der Kondensation, sondern in stetigem Übergange ihre Eigenschaften von denen eines Gases in diejenigen einer Flüssigkeit verwandelt. Man kann diese Erscheinung sowie ihre Umkehrung leicht an flüssiger Kohlensäure beobachten, welche in ein Glasrohr eingeschlossen ist (sog. NATTERERsche Röhre). Taucht man eine solche Röhre in warmes Wasser (eben über der kritischen Temperatur von 31,3°), so verschwindet die Oberfläche der flüssigen Kohlensäure unter Schlierenbildung, und die Kohlensäure ist gasförmig geworden, ohne daß ein Verdampfungs- oder Siedeprozeß stattgefunden hätte. (Vorsicht! Eine etwaige Explosion der Röhre ist sehr gefährlich.)

Tabelle 16. Einige kritische Daten.

	t_k	p_k	ρ_k
Wasserstoff	— 241°	15 Atm.	0,033
Stickstoff	— 147,0°	34	0,32
Sauerstoff	— 118,8	50	0,42
Helium	— 268°	2,3	0,065
Ammoniak	+ 130°	115,0	—
Wasser	+ 365,0°	200,5	0,329
Quecksilber	rd. + 1200°	456	rd. 4

In Tab. 16 sind die kritischen Daten (statt des kritischen Volumens V_k die kritische Dichte $\rho_k = 1/V_k$) einiger Gase angegeben, und zwar die kritischen Temperaturen t_k in der Celsius-Skala. Man erkennt aus der Tabelle, wes-

halb zahlreiche Gase bei gewöhnlicher Temperatur nicht verflüssigt werden können. Die Verflüssigung des Heliums ist erst vor einer Reihe von Jahren KAMERLINGH ONNES geglückt.

Läßt man flüssige Kohlensäure aus einer Bombe plötzlich in einen Stoffbeutel ausströmen, so kühlt sie sich durch heftige Verdampfung so stark ab, daß ein Teil von ihr erstarrt (Kohlensäureschnee).

185. Verflüssigung von Luft, Wasserstoff und Helium. Sehr tiefe Temperaturen. Nach dem vorstehend Gesagten besteht das technische Problem bei der Verflüssigung zahlreicher Gase in der Abkühlung auf ihre niedrige kritische Temperatur. Heute wird flüssige Luft in großen Mengen für alle möglichen Verwendungszwecke technisch hergestellt, und zwar in Deutschland nach dem LINDEschen Verfahren. Das hierbei zur Abkühlung der Luft verwendete Prinzip beruht auf dem JOULE-THOMSON-Effekt (§ 172). Die Luft wird zunächst komprimiert und die dabei eintretende Erwärmung durch Kühlung wieder rückgängig gemacht. Dann wird die Luft durch plötzliche Expansion stark abgekühlt. Diese Luft umspült alsdann die Röhren, durch welche dem Apparat weitere Luft zugeführt wird, die auf diese Weise vorgekühlt wird und sich, nachdem mit ihr der gleiche Prozeß vorgenommen ist, noch weiter abkühlt als die zuerst abgekühlte Luft. In dieser Weise wird das Verfahren, bei dem die gleiche Luft stets im Kreise durch den Apparat geleitet wird, fortgesetzt, bis sich die Luft auf ihre kritische Temperatur von — 141⁰ abgekühlt hat und sich dann bei Kompression verflüssigt.

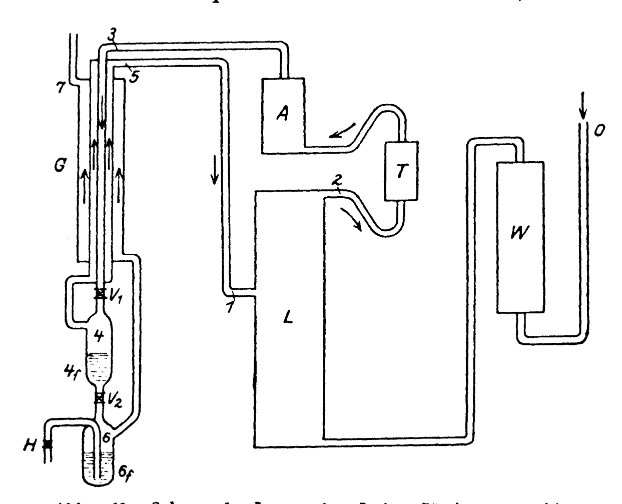


Abb. 168. Schema der LINDEschen Luftverflüssigungsmaschine.

Abb. 168 zeigt das Schema der LINDEschen Luftverflüssigungsmaschine. Die von *O* kommende Luft passiert einen Waschturm *W* zur Beseitigung der Kohlensäure. In *L* befindet sich der Kompressor, der die Luft auf etwa 200 Atm. komprimiert. *T* ist eine Trockenvorrichtung, aus der die Luft nach *A* gelangt, wo sie durch eine Kältemaschine vorgekühlt wird. V_1 ist ein Ventil, in welchem die Luft entspannt wird, wobei sie sich abkühlt. Der hierbei verflüssigte Anteil sammelt sich in 4, während die kalte, gasförmige Luft durch den „Gegenströmer" *G*, in dem sie die neuankommende Luft vorkühlt, wieder in den Kompressor gelangt. Durch Öffnen des Ventils V_2 kann die verflüssigte Luft in das Vorratsgefäß 6 gelassen und durch den Hahn *H* abgezapft werden. Die beim Durchgang durch V_2 verdampfte Luft entweicht nach Ausnutzung ihrer tiefen Temperatur im Gegenströmer durch 7 in die Atmosphäre.

Die Verflüssigung des Wasserstoffs gelingt auf diese Weise erst unterhalb von — 80⁰ (§ 172). Man verfährt daher so, daß man den Wasserstoff zunächst mittels flüssiger Luft auf eine Temperatur von etwa — 210⁰ bringt. Diese tiefe Temperatur wird dadurch erreicht, daß man flüssige Luft heftig verdampfen läßt, wobei sie sich infolge der Abgabe der Verdampfungswärme stark unter ihre ursprüngliche Temperatur abkühlt. Erst mit dem so abgekühlten

Wasserstoff kann der bei den Verflüssigung der Luft beschriebene Prozeß vorgenommen werden, durch den sich der Wasserstoff bei seiner kritischen Temperatur von — 241° und dem kritischen Druck von 15 Atm. verflüssigt. Um Helium zu verflüssigen, verfährt man mit ihm ebenso, unter Verwendung von flüssigem Wasserstoff zur Vorkühlung. Flüssiges Helium hat eine Temperatur von — 268,9° = 4,3° abs., welche sich durch schnelles Verdampfen (Absieden) bis auf etwa 0,6° abs. hinuntersetzen läßt. Bei dieser Temperatur beobachtet man in dem flüssigen Helium schon Kristalle von festem Helium. Alle andern Gase werden schon bei höheren Temperaturen fest (vgl. Tab. 10, § 174). Die Temperatur von etwa 0,6° abs. ist die tiefste bisher erreichte Temperatur. Mit ihr ist der absolute Nullpunkt nahezu erreicht.

Die Erzielung so tiefer Temperaturen ist von großem experimentellen Interesse, weil bei ihnen viele Körper in verschiedenen Beziehungen ein besonders interessantes Verhalten zeigen (z. B. spezifische Wärme, § 511, Supraleitfähigkeit, § 255).

Da der Siedepunkt des Stickstoffs tiefer liegt als der des Sauerstoffs, so siedet er aus flüssiger Luft schneller weg als dieser. Flüssige Luft, welche einige Zeit gestanden hat, ist daher ziemlich sauerstoffreich. Ein hineingesteckter glühender Span glimmt hell auf trotz der tiefen Temperatur. Quecksilber wird bei der Temperatur der flüssigen Luft fest und läßt sich hämmern, Gummi wird hart und brüchig, Bleidraht hochelastisch. Über die Verwendung flüssiger Luft zur Herstellung hoher Vakua s. § 191.

18. Kapitel.

Binäre Systeme.

Ein binäres System ist ein System, in welchem zwei verschiedene Stoffe vertreten sind.

186. Lösungen. Als Lösungen bezeichnet man Flüssigkeiten oder Mischkristalle, die aus zwei oder mehreren verschiedenen Bestandteilen (Komponenten) bestehen, deren Mengenverhältnis stetig veränderlich ist. Dieses Mengenverhältnis ist bei einem Teil der Lösungen an keine Grenze gebunden, z. B. bei der Lösung Wasser—Alkohol. Bei anderen Lösungen, z. B. bei den Lösungen von Salzen in Wasser, gibt es eine Grenze der Löslichkeit des einen Bestandteils in dem andern, und zwar steigt die Löslichkeit mit wachsender Temperatur. Eine Lösung, die diese Grenze erreicht, heißt gesättigt oder konzentriert. Bei Lösungen dieser Art bezeichnet man den in seiner Menge unbeschränkten Anteil als das Lösungsmittel, den in seiner Menge beschränkten Teil als den gelösten Stoff. Die Menge des letzteren ist sehr häufig, aber nicht immer, klein gegenüber der Menge des Lösungsmittels, auch im gesättigten Zustande. Der gelöste Stoff ist im Lösungsmittel in molekularer Verteilung enthalten oder sogar noch weiter zerspalten (§ 267).

Ein Beispiel einer festen Lösung ist das Messing (Lösung Kupfer—Zink). Unter den flüssigen Lösungen besitzen die Lösungen fester, flüssiger und gasförmiger Stoffe in Wasser (wässerige Lösungen) die größte Bedeutung, und nur mit ihnen werden wir uns im folgenden beschäftigen. Wasser löst die überwiegende Mehrzahl aller Stoffe, wenn auch zum Teil nur in sehr geringen Mengen. Daher rührt die Schwierigkeit, chemisch reines Wasser herzustellen.

Ein gelöster Stoff verhält sich im Lösungsmittel in vielen Beziehungen wie ein Gas (§ 189). Löst man eine feste Substanz in einer Flüssigkeit oder eine Flüssigkeit

in einer andern, so ist dies ein Vorgang, der in gewisser Hinsicht mit einer Sublimation bzw. Verdampfung zu vergleichen ist. Daher kommt es, daß wenigstens in vielen Fällen bei der Lösung Wärme verbraucht wird, es tritt Abkühlung ein. Doch ist dies nicht immer der Fall, sondern es kann durch das Hinzutreten anderer Umstände auch Erwärmung eintreten, und zwar dann, wenn gleichzeitig mit der Lösung eine chemische Reaktion stattfindet. Die sog. Lösungswärme kann also positiv oder negativ sein. Z. B. ist die Lösungswärme von Kochsalz in Wasser negativ, es tritt bei Lösung Abkühlung ein.

187. **Kolloidale Lösungen.** Eine kolloidale Lösung ist eine solche, in der der gelöste Stoff nicht in molekularer bzw. atomistischer Form enthalten ist, sondern in größeren Teilchen, die allerdings noch weit unterhalb der gewöhnlichen Sichtbarkeitsgrenze liegen. Und zwar ist es üblich, als kolloidal solche Lösungen zu bezeichnen, bei denen die Teilchen Durchmesser von 10^{-5} bis 10^{-7} cm haben, während man Lösungen mit noch größeren Teilchen als Suspensionen bezeichnet. Die Lösungen erscheinen klar, z. B. eine kolloidale Goldlösung. Doch können die Teilchen oft noch mit dem Ultramikroskop (§ 449) sichtbar gemacht werden. Kolloidale Lösungen unterscheiden sich von Suspensionen u. a. dadurch, daß der gelöste Stoff durch Filtrierpapier und auch durch noch feinere Filter fast nie vom Lösungsmittel getrennt werden kann. Auch in den mit Gold gefärbten Gläsern (Rubingläser) befindet sich das Gold in kolloidaler Form. Kolloidale Stoffe spielen u. a. in der Physiologie eine wichtige Rolle.

Man unterscheidet lyophile (hydrophile) und lyophobe (hydrophobe) kolloidale Lösungen. In den ersteren bestehen die gelösten Teilchen aus Zusammenballungen von verhältnismäßig wenigen großen Molekülen (z. B. bei den kolloidalen Eiweißlösungen und vielen anderen kolloidalen Lösungen organischer Stoffe) in den letzteren aus Mikrokristallen des gelösten Stoffes. Diese beiden Gruppen zeigen in verschiedenen Beziehungen ein verschiedenes physikalisch-chemisches Verhalten.

188. **RAOULTsches Gesetz. Siedepunkt und Gefrierpunkt von Lösungen.** Der Dampfdruck einer Flüssigkeit sinkt, wenn in ihr ein Stoff gelöst wird. Er ist über der Lösung kleiner als über dem reinen Lösungsmittel. Es sei p der Dampfdruck des reinen Lösungsmittels, p' sein Dampfdruck über der Lösung. In dieser seien in n Mol des Lösungsmittels n' Mol des gelösten Stoffs enthalten. Das Verhältnis $n'/n = \mu$ bezeichnet man als den Molenbruch der Lösung. Dann gilt das RAOULTsche Gesetz,

$$\frac{p - p'}{p} = \frac{n'}{n} = \mu. \tag{1}$$

Die Dampfdruckerniedrigung ist also der Zahl der gelösten Mole proportional. Da der Dampfdruck über der Lösung niedriger ist als über dem reinen Lösungsmittel, so bedarf erstere zum Sieden einer höheren Temperatur als letzteres (§ 181). Durch die Lösung eines Stoffes tritt also eine Siedepunkterhöhung Δt_s ein, welche der Dampfdruckerniedrigung proportional ist,

$$\Delta t_s = \text{const}\,\frac{n'}{n} = \text{const}\,\mu. \tag{2}$$

Beträgt die Masse des Lösungsmittels bzw. des gelösten Stoffes m bzw. m' g, und sei das Molekulargewicht des Lösungsmittels M, das des gelösten Stoffes M', so ist $n = m/M$ und $n' = m'/M'$, und demnach der Molenbruch $\mu = m'M/mM'$. Wir können demnach statt Gl. 3 schreiben

$$\Delta t_s = A_s \frac{m'}{m} \cdot \frac{1}{M'}. \tag{3}$$

Dabei haben wir das Molekulargewicht M des Lösungsmittels mit in die Konstante A_s einbezogen. Diese ist nur von der Art des Lösungsmittels, nicht von der des gelösten Stoffes abhängig. Als molekulare Siedepunktserhöhung pflegt man diejenige zu bezeichnen, die eintritt, wenn 1 Mol des gelösten Stoffes in 100 g des Lösungsmittels enthalten ist. Sie ist also nach Gl. 3 gleich $A_s/100$.

Auf der gleichen Grundlage beweist man durch etwas verwickeltere Überlegungen — es geht sowohl der Dampfdruck über der flüssigen Lösung, wie über ihrer festen Phase ein —, daß der Gefrierpunkt einer Lösung niedriger liegt als der des reinen Lösungsmittels. Es tritt eine Gefrierpunktserniedrigung Δt_g ein, für die ein der Gl. 3 ganz analoges Gesetz, aber mit negativen Vorzeichen, gilt,

$$\Delta t_g = -A_g \frac{m'}{m} \cdot \frac{1}{M}. \tag{4}$$

Auch die Konstante A_g ist nur vom Lösungsmittel, nicht vom gelösten Stoff, abhängig, und man bezeichnet meist die Größe $A_g/100$ als molekulare Gefrierpunktserniedrigung.

Sowohl die Siedepunktserhöhung wie die Gefrierpunktserniedrigung liefern sehr bequeme Methoden zur Bestimmung der Molekulargewichte gelöster Stoffe. Ist für ein Lösungsmittel die molekulare Siedepunktserhöhung bzw. Gefrierpunktserniedrigung einmal bekannt, so ergibt sich das Molekulargewicht eines gelösten Stoffes nach Gl. 3 oder 4, wenn man feststellt, welche Änderung des Siede- oder Gefrierpunktes bei einer Lösung von m' g in m g des Lösungsmittels eintritt.

Scheinbare Abweichungen von den Gl. 3 und 4 erklären sich dadurch, daß viele Stoffe bei der Lösung dissozieren, d. h. sich spalten (§ 217). Es wirkt dann jedes Bruchstück wie ein Molekül, und die Zahl n' (Gl. 1) wird erhöht, der Dampfdruck noch weiter erniedrigt.

189. Osmose. Es gibt Stoffe, durch welche aus einer Lösung zwar das Lösungsmittel diffundiert, z. B. das Wasser, aber nicht der gelöste Stoff. Es sei H (Abb. 169) eine solche sog. halbdurchlässige (semipermeable) Wand. Auf der rechten Seite befinde sich z. B. eine Lösung L von Kupfersulfat, auf der linken reines Wasser R, und zwar seien anfänglich beide Schenkel des Gefäßes gleich hoch gefüllt. Nach einiger Zeit zeigt sich, daß das reine Wasser gesunken, die Kupfersulfatlösung gestiegen ist, und zwar ist der Unterschied h der Höhen um so größer, je konzentrierter die Lösung ist. Bei einer 6proz. Zuckerlösung beträgt der Überdruck rund 4 Atmosphären. Die Erscheinung ist also derart, als wirke von der halbdurchlässigen Wand her ein Druck in Richtung vom reinen Lösungsmittel zur Lösung hin. Dieser Vorgang heißt Osmose, der Überdruck auf der einen Seite osmotischer Druck. VAN'T HOFF hat gezeigt, daß dieser Druck ebenso groß ist, wie wenn der gelöste Stoff den Raum, den er in der Lösung einnimmt, als ideales Gas erfüllte.

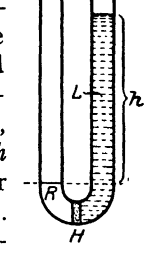


Abb. 169. Schema der Osmose.

Ähnliche Erscheinungen zeigen sich auch, wenn eine Scheidewand zwar für die auf beiden Seiten befindlichen Stoffe durchlässig ist, aber für die eine mehr als für die andere; z. B. für Wasser und Alkohol, die durch eine Schweinsblase getrennt sind.

Für Versuche eignen sich Niederschläge von Kupferferrozyanid oder gewissen andern Stoffen auf porösem Ton. Eine einfache Versuchsanordnung zum Nachweis der Osmose besteht in einem Gefäß mit leicht angesäuertem Wasser, in welches man ein zweites, unten mit einer Schweinsblase verschlossenes und oben mit einem Steigrohr versehenes Gefäß mit konzentrierter Kupfervitriol-

lösung stellt. Die Lösung steigt allmählich im Steigrohr hoch, da nur das Wasser, aber nicht das Kupfervitriol, durch die Membran hindurchdiffundiert.

In der Physiologie spielt die Osmose durch die Zellwände der Organismen eine überaus wichtige Rolle.

Die Gl. 1 (§ 188) gibt uns die Möglichkeit, im Anschluß an VAN'T HOFF und ARRHENIUS eine quantitative Erklärung des osmotischen Druckes zu geben. Am Boden eines abgeschlossenen Gefäßes (Abb. 170) befinde sich reines Lösungsmittel (R), darüber, von ihm durch eine halbdurchlässige Wand getrennt und mit ihm im Gleichgewicht, die Lösung (L) eines Stoffes in dem gleichen Lösungsmittel. Der Raum über den Flüssigkeiten sei mit dem gesättigten Dampf des Lösungsmittels erfüllt. Seine Dichte sei ϱ_1, die Dichte der Lösung, die derjenigen des reinen Lösungsmittels sehr nahezu gleich ist, ϱ_2. Der Druck des Dampfes über dem reinen Lösungsmittel sei p, über der Lösung p', der osmotische Druck in der Lösung P. Dieser wirkt, wie gesagt, so, als werde von der halbdurchlässigen Wand her eine Kraft auf die Lösung ausgeübt. Für das hydrostatische Gleichgewicht im Niveau der halbdurchlässigen Wand können wir zwei Bedingungen aufstellen, eine für das Gas und eine für die Flüssigkeit unter Berücksichtigung des osmotischen Druckes. Die erste lautet $p = p' + \varrho_1 g h$ (§ 104). Als zweite ergibt sich $p + P = p' + \varrho_2 g h$ (§ 87). Aus diesen beiden Gleichungen erhält man $P = (p - p')(\varrho_2 - \varrho_1)/\varrho_1$, oder, da $\varrho_1 \ll \varrho_2$,

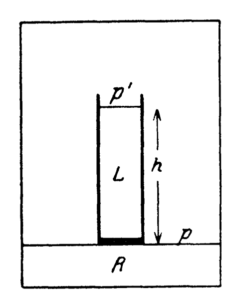


Abb. 170. Zur Berechnung des osmotischen Drucks.

$$P = \frac{p - p'}{p} \cdot \frac{p}{\varrho_1} \cdot \varrho_2 = \frac{n'}{n} \cdot \frac{p}{\varrho_1} \varrho_2$$

(s. Gl. 1). Nun können wir nach § 162 setzen $p/\varrho_1 = p V_s = p V_m/M$, wobei V_m das Volumen eines Mols des Lösungsmittels im Gaszustand und M sein Molekulargewicht bedeutet. Wir erhalten dann

$$P = \frac{n'}{n} \cdot \frac{p V_m}{M} \varrho_2.$$

Nun ist aber nM die Masse des Lösungsmittels in Gramm, daher nM/ϱ_2 das Volumen V des Lösungsmittels und sehr nahezu auch der Lösung. Folglich ist $nM/\varrho_2 n' = V/n' = V_M$, dasjenige Volumen, welches 1 Mol des gelösten Stoffes in der Lösung einnimmt. Es ergibt sich dann

$$P V_M = p V_m = RT. \tag{5}$$

Der osmotische Druck folgt also dem Gesetz der idealen Gase (§ 162).

190. **Kryohydrate. Kältemischungen.** Kühlt man eine Lösung unter ihren Gefrierpunkt ab, so scheidet sich zunächst nur das Lösungsmittel in fester Form ab, also bei wässerigen Lösungen reines Eis. Bei Fortsetzung der Abkühlung gelangt man schließlich an einen Punkt, bei dem die Lösung gesättigt ist. Entzieht man der Substanz noch mehr Wärme, so bleibt die Temperatur konstant, und aus der Lösung scheiden sich nunmehr sowohl gelöster Stoff wie Lösungsmittel in fester Form in bestimmtem Mengenverhältnis als sog. Kryohydrat aus. Die hierbei von der ausgeschiedenen Substanz abgegebene Wärme entstammt sowohl der Schmelzwärme des Lösungsmittels als auch — bei negativer Lösungswärme (§ 187) — der letzteren, geht also auf Kosten „latenter" Wärmen. Die Zusammensetzung der Lösung ändert sich dann nicht mehr und die Temperatur bleibt bei weiterem Entzug von Wärme konstant.

Mischt man Eis von 0° mit Kochsalz, so tritt ein Lösungsprozeß ein, indem sich konzentrierte, flüssige Kochsalzlösung bildet. Hierbei wird einmal Schmelzwärme zum Schmelzen des Eises verbraucht, andererseits ist auch zum Lösen des Salzes Wärme erforderlich, da Kochsalz eine negative Lösungswärme hat. Diese Wärme wird der Eis-Salz-Mischung entzogen, die sich infolgedessen abkühlt, und zwar bis zu derjenigen Temperatur, bei der das Kryohydrat auszufallen beginnt. Bei Eis und Kochsalz ist das günstigste Mischungsverhältnis 3:1. Hierbei wird eine Temperatur von etwa — 22° erreicht. Derartige Mischungen heißen Kältemischungen.

191. **Absorption.** Die Absorption besteht in der Aufsaugung von Gasen durch feste oder flüssige Körper. Bei festen Körpern spricht man auch von Okklusion.

Unter den festen Körpern zeichnet sich besonders die Kohle durch ihre hohe Absorptionsfähigkeit aus. Man bringe ein Stück Holzkohle, welches einige Monate an der Luft gelegen hat, auf den Boden eines mit Wasser gefüllten Gefäßes, das unter der Glocke einer Luftpumpe steht. Bei Verminderung des Drucks erkennt man die Abgabe einer großen Luftmenge am Aufsteigen zahlreicher Bläschen. Zur möglichst vollständigen Evakuierung von Gefäßen versieht man diese mit einem Ansatzrohr, in dem sich gut ausgeglühte Kokosnußkohle befindet, welche von außen mit flüssiger Luft oder noch besser mit flüssigem Wasserstoff gekühlt wird. Die Kohle absorbiert bei der tiefen Temperatur der flüssigen Luft, etwa — 200°, alle Gase aus dem (am besten vorher schon mittels einer Pumpe möglichst evakuierten) Gefäß, mit Ausnahme der etwa vorhandenen Edelgase, die zum Teil nur in geringen Mengen absorbiert werden (Tabelle 17).

Tabelle 17. Absorption von Gasen.

	1 l Wasser absorbiert bei 760 mm Druck		Buchsbaumkohle absorbiert bei — 183° das nachstehende Vielfache ihres Volumens
	bei 0°	bei 20°	
H_2	21,1 ccm	18,1 ccm	135
O_2	48,9 „	31,0 „	230
N_2	23,5 „	15,4 „	155
He	9,7 „	10,0 „	15
CO_2	1800 „	900 „	190
NH_3	$1,2 \times 10^6$ „	$0,7 \times 10^6$ „	

Auch Flüssigkeiten können Gase absorbieren. Es ist dies aber prinzipiell nichts anderes als eine Lösung des Gases in der Flüssigkeit. Wasser absorbiert in großen Mengen Ammoniak und Kohlensäure, in kleineren Mengen auch andere Gase, z. B. Stickstoff und Sauerstoff, die Bestandteile der Luft. Vgl. die Absorption von Kohlensäure in Wasser, Bier, Sekt und Mineralwasser. Sauerstoff wird von Wasser stärker absorbiert als Stickstoff. Dies ist wichtig für das organische Leben im Wasser, welches auf den im Wasser absorbierten Sauerstoff für die Atmung angewiesen ist.

Für die absorbierte Menge eines Gases gilt das Henrysche Gesetz (1803), welches besagt, daß die Menge (Gewichtsmenge) des absorbierten Gases dem Druck proportional ist, unter dem sich das Gas über der Flüssigkeitsoberfläche befindet. Man kann also durch Anwendung hohen Drucks bewirken, daß die absorbierte Menge groß ist. Wird der Gasdruck in einer Bierflasche durch Öffnen herabgesetzt, so entweicht ein großer Teil der absorbierten Kohlensäure (Schäumen des Bieres), und bei längerem Stehen an der Luft, in der der Druck der Kohlensäure nur sehr gering ist, entweicht sie allmählich gänzlich, das Bier wird schal. Befinden sich über einer Flüssigkeit mehrere Gase, so gilt das Henrysche Gesetz für die Partialdrucke der einzelnen Gase, also nicht für ihren Gesamtdruck.

Vorstehende Tabelle gibt einige Zahlenangaben über die in Wasser und Kohle absorbierten Mengen einzelner Gase.

Der in Abb. 171 dargestellte Versuch zeigt die Absorption von Ätherdampf durch eine Seifenblase. In einem zugedeckten Becherglas befindet sich ein wenig Äther, so daß das Gefäß mit Ätherdampf gefüllt ist. Bringt man in das Gefäß eine Seifenblase an einem ausgezogenen Rohr, so kann man nach kurzer Zeit an diesem eine Flamme von brennendem Ätherdampf entzünden. Denn dieser wird von der Seifenblase außen gelöst, aber innen zum Teil wieder abgegeben. (Es herrscht erst Gleichgewicht, wenn der Dampfdruck des Äthers innen und außen gleich groß ist.) Der Vorgang erscheint wie eine Diffusion (§ 158), ist aber von einer solchen wesentlich verschieden.

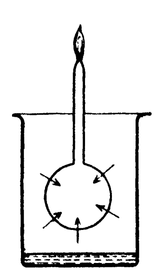


Abb. 171. Scheinbare Diffusion von Ätherdampf durch eine Seifenblase.

Die **Adsorption** unterscheidet sich von der Absorption dadurch, daß sie nur an der **Oberfläche** stattfindet, während absorbierte Stoffe den ganzen absorbierenden Körper erfüllen. Sie kommt dadurch zustande, daß die Moleküle des adsorbierenden Körpers eine große anziehende Kraft auf diejenigen des adsorbierten Stoffes ausüben, so daß sich die Oberfläche des Körpers mit einer relativ dichten Schicht dieser Moleküle bedeckt.

Strenggenommen ist die obenerwähnte Absorption von Gasen in Kohle auch als eine Adsorption zu bezeichnen, denn sie dürfte nur an den Oberflächen der zahlreichen feinen Poren stattfinden, die das Innere der für diesen Zweck verwendbaren Kohlearten durchziehen (Buchsbaumkohle, Kokosnußkohle u. dgl.).

19. Kapitel.

Die drei Hauptsätze der Wärmelehre. Wärme und Arbeit.

192. Der erste Hauptsatz der Wärmetheorie. Da die Wärme ihrem Wesen nach Molekularenergie ist, so muß auch für eine Wärmemenge das **Energieprinzip** gelten (§ 42). D. h. die in Form einer Wärmemenge vorhandene Energie kann nicht verlorengehen, höchstens in andere Energieformen (mechanische, elektrische usw.) umgewandelt werden. Von dieser Tatsache haben wir bereits auf Grund der mechanischen Wärmetheorie häufig Gebrauch gemacht. Das auf Wärmemengen angewandte Energieprinzip pflegt man den **ersten Hauptsatz der Wärmetheorie** zu nennen. Er ist zuerst von dem deutschen Arzt JULIUS ROBERT MAYER (1840) aufgestellt und dann von H. HELMHOLTZ und anderen erweitert und auf die Gesamtheit der physikalischen Erscheinungen ausgedehnt worden. Es ist dies eines der wichtigsten Ereignisse in der Geschichte der Physik und für die weitere Entwicklung der Physik und Chemie von größter Tragweite gewesen.

Es sei U die innere, also molekulare Energie eines Körpers. Bei einer thermischen Zustandsänderung wird im allgemeinen nicht nur diese geändert, sondern der Körper leistet infolge der mit einer solchen Zustandsänderung meist verbundenen Änderung seines Volumens äußere Arbeit, positive bei einer Volumvergrößerung, negative bei einer Volumverkleinerung. Nach dem 1. Hauptsatz muß sich die einem Körper zugeführte Wärmemenge Q restlos in der Summe der infolge dieser Wärmezufuhr geleisteten äußeren Arbeit A und der Änderung ΔU der inneren Energie des Körpers **wiederfinden**,

$$Q = \Delta U + A. \tag{1}$$

Von dieser Tatsache haben wir z. B. schon in § 171 Gebrauch gemacht, und es war C_v derjenige Anteil der spezifischen Wärme eines Gases, der allein auf die Änderung der inneren Energie des Gases entfällt, während der Anteil $C_p - C_v$ zur Leistung äußerer Arbeit $A = p\Delta V$ dient (vgl. auch § 172).

Unter ΔU ist jede Art der Änderung der inneren Energie eines Körpers zu verstehen, also nicht nur die Änderung der kinetischen Energie der Moleküle, sondern z. B. auch die den latenten Wärmen (Schmelzwärme, Verdampfungswärme usw.) entsprechende Energie.

193. Das mechanische Wärmeäquivalent. Da eine Wärmemenge ihrem Wesen nach Molekularenergie ist, so kann man sie statt in Kalorien auch in derjenigen Einheit messen, die wir in der Mechanik für die Energie eingeführt haben (§ 46), nämlich in erg. Die Zahl, welche angibt, wieviel erg gleich 1 cal sind, heißt das mechanische Wärmeäquivalent, ihr reziproker Wert das kalorische Äquivalent der Energie. Sie ist zuerst von JOULE experimentell ermittelt worden. Später hat sie zuerst JULIUS ROBERT MAYER theoretisch berechnet.

JOULE benutzte den in Abb. 172 dargestellten Apparat. In einem mit Wasser gefüllten Gefäß befand sich ein drehbares Flügelrad *a* und feste Scheidewände *b*, welche die Strömung des Wassers bei der Drehung des Rades erschwerten. Das Rad wurde durch zwei fallende Gewichte in Bewegung gesetzt. Infolge der großen Reibung im Wasser, das bei der Drehung des Flügelrades durch die engen Zwischenräume zwischen den Scheidewänden und dem Rade hindurchgepreßt wurde, war die Fallbewegung so langsam, daß die fallenden Massen keine merkliche kinetische Energie gewannen, sondern daß ihre potentielle Energie so gut wie vollständig durch Reibung (§ 194) in Wärme des Wassers und des Gefäßes verwandelt wurde. Sei m die Masse der beiden Gewichte, h ihre Fallhöhe, so beträgt diese Energie mgh erg. Sei ferner t die Temperaturerhöhung des Wassers und des Gefäßes, K ihre in cal/grad ausgedrückte Wärmekapazität, so ist ihr Zuwachs an thermischer Energie gleich Kt cal. Nach dem Energieprinzip muß daher sein

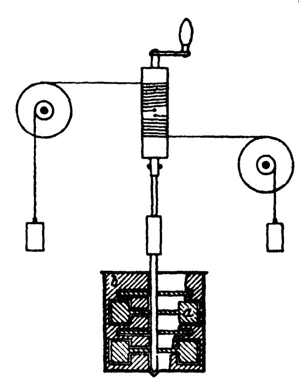


Abb. 172. Messung des mechanischen Wärmeäquivalents nach JOULE.

$$mgh \text{ erg} = Kt \text{ cal}, \quad \text{oder} \quad 1 \text{ cal} = \frac{mgh}{Kt} \text{ erg}.$$

MAYER berechnete das Wärmeäquivalent auf folgende Weise. In einem Gefäß mit verschiebbarem und von außen mit konstantem Druck angedrückten Stempel befinde sich 1 ccm eines idealen Gases von 0°. Dieses werde bei konstantem Druck p um 1° erwärmt. Dabei dehnt es sich um $\Delta V = 1/273$ ccm aus (§ 163). Die von ihm dabei gegen die den Stempel haltende Kraft geleistete Arbeit ist $p \cdot \Delta V = p \cdot 1/273$ erg. Diese Arbeit stammt aus der bei der Temperaturerhöhung zugeführten Wärme. Nach § 171 entfällt auf die reine Ausdehnungsarbeit eines Gramms eines bei konstantem Druck p um 1° erwärmten idealen Gases der Anteil $C_p - C_v = R/M$ der zugeführten Wärme (R allgemeine Gaskonstante, M Molekulargewicht). Haben wir es, wie hier vorausgesetzt, nicht mit 1 g, sondern mit 1 ccm eines Gases von der Dichte ϱ also mit ϱ Gramm, zu tun, so ist die Arbeit ϱ mal größer, also $p\Delta V = \varrho \cdot R/M$. Nach dem Energieprinzip muß also sein

$$p/273 \text{ erg} = \varrho \frac{R}{M} \text{ cal}.$$

Wir nehmen z. B. an, daß das Gas 760 mm Druck habe. Dann ist nach § 103 $p = 1{,}0133 \cdot 10^6$ dyn/qcm. Das Verhältnis ϱ/M ist für alle Gase bei gleichem Druck gleich groß, nämlich gleich $1/V_m$ (V_m Molvolumen, § 96). Bei Wasserstoff z. B. ist $\varrho = 0{,}00008985$, $M = 2$, also $\varrho/M = 0{,}4493 \cdot 10^{-4}$. Es ergibt sich, mit

$R = 1{,}98$ cal/grad · mol,

$$1{,}0133 \cdot 10^6/273 \text{ erg} = 1{,}98 \cdot 0{,}4493 \cdot 10^{-4} \text{ cal},$$

oder $1 \text{ cal} = 4{,}17 \cdot 10^7$ erg. Nach den zuverlässigsten Messungen ist

$$1 \text{ cal} = 4{,}186 \cdot 10^7 \text{ erg} = 4{,}186 \text{ Joule} = 0{,}427 \text{ mkg}^*$$

(§ 40). Um 1 g Wasser um 1^0 zu erwärmen, ist also eine Energie nötig, die gleich der kinetischen Energie einer Masse von 1 kg nach freiem Durchfallen einer Höhe von 0,427 m ist.

194. Verwandlung von mechanischer Arbeit in Wärme. Reibung. Die Möglichkeit der Verwandlung von Arbeit in Wärme ist bereits seit Urzeiten bekannt (Reiben kalter Hände, Erzeugung von Feuer durch Reiben oder Schlagen, Heißlaufen von Achsen usw.). Der Energieverlust eines bewegten Körpers durch Reibung besteht zum überwiegenden Teil in einer solchen Verwandlung seiner kinetischen Energie in Wärme, also der gleichgerichteten Bewegung seiner Moleküle in ungeordnete Molekularbewegung. Es kann aber auch jede andere Energieform in Wärme übergehen, so elektrische Energie (§ 260) und chemische Energie (§ 203).

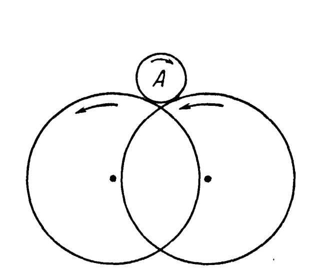
Eine besonders große Rolle spielt im täglichen Leben die Reibung zwischen festen Flächen. In den meisten Fällen bildet sie eine Quelle höchst unerwünschten und unwirtschaftlichen Verlustes an mechanischer Arbeit. Von unmittelbaren Zerstörungswirkungen — Abnutzung der reibenden Flächen — abgesehen, wird bei der Reibung zwischen festen Flächen die relative Bewegung der reibenden Körper unter Verwandlung von kinetischer Energie der Körper als Ganzes in ungeordnete kinetische Energie ihrer Moleküle, also in Wärme verwandelt.

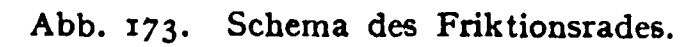
Die von der Reibung zwischen festen Flächen herrührende hemmende Kraft wächst mit der Kraft, mit der die Flächen aufeinandergedrückt sind. Jedoch ist es eine Eigentümlichkeit der Reibung zwischen festen Flächen, daß eine endliche Kraft notwendig ist, um einen Körper gegen die Wirkung der Reibung in Bewegung zu setzen. Liegt ein Körper auf einer schiefen Ebene, so setzt er sich unter der Wirkung der Schwere nicht in Bewegung, wenn die Neigung der Ebene nicht einen bestimmten, von den Umständen abhängenden Betrag (sog. Reibungswinkel) überschreitet (sonst wäre es z. B. unmöglich, auf einem schrägen Wege zu gehen). Bei kleiner Neigung bleibt er in Ruhe und setzt sich erst in Bewegung, wenn die Neigung diesen Grenzwert überschritten hat. Die charakteristischen Böschungswinkel aufgeschütteten körnigen Materials (Sand, Erde, Steine usw.) und ihre Abhängigkeit von der Art desselben haben zum Teil hier ihren Ursprung. Die Reibung zwischen zwei ebenen Flächen hängt von der Größe dieser Flächen bei gleicher zwischen ihnen wirkender Kraft nicht oder nur wenig ab. Dies erklärt sich so, daß die Flächen sich wegen der unvermeidlichen kleinen Unebenheiten fast immer nur in wenigen Punkten berühren, in denen also der Hauptsitz der Reibungskraft ist. Die Reibung ist der Kraft, mit der die reibenden Flächen aufeinandergepreßt sind, ungefähr proportional.

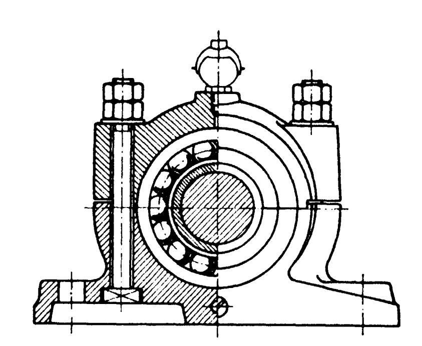
Man kann die gleitende Reibung durch Anwendung von Schmiermitteln erheblich herabsetzen. Ihre Wirkung besteht darin, daß sie eine unmittelbare Reibung der festen Flächen verhindern, und daß sich die Reibung hauptsächlich innerhalb des flüssigen Schmiermittels abspielt, wo sie weit geringer ist (innere Reibung).

Viel kleiner als die gleitende Reibung ist die rollende Reibung, die auftritt, wenn ein Körper auf einem andern rollt. Darauf beruht zum Teil der Nutzen der Räder. In den Achsen der Räder findet allerdings gleitende Reibung statt. Diese aber kann durch geeignete Konstruktion und durch Schmierung

stark herabgesetzt werden. Man kann die rollende Reibung noch weiter herabsetzen, wenn man die Achse A eines Rades selbst wieder auf Räder legt, so, daß sie nur rollende Reibung erfährt (sog. Friktionsräder, Abb. 173). Die gleitende Reibung wird in die Achsen der Friktionsräder verlegt. Sie wird dort leichter überwunden als bei direkter Lagerung der Achse A. Denn dem hemmenden Drehmoment der Achsenreibung wirkt jetzt ein viel größeres Drehmoment entgegen als bei direkter Lagerung. Auf einem ähnlichen Prinzip beruhen die Kugellager (Abb. 174), bei denen die Achse auf Stahlkugeln gelagert ist, welche ringförmig in einer gut geschmierten Rinne angeordnet sind.




Abb. 173. Schema des Friktionsrades.


Abb. 174. Kugellager.

Die Reibung zwischen festen Flächen ist ein Vorgang, der von allen möglichen Zufälligkeiten stark beeinflußt wird, so daß es nicht gut möglich ist, allgemeingültige Gesetzmäßigkeiten aufzustellen.

195. **Der zweite Hauptsatz der Wärmetheorie. Entropie.** Man kann den Inhalt des ersten Hauptsatzes, d. h. des Energieprinzips, dahin formulieren, daß es unmöglich ist, eine Maschine zu konstruieren, welche fortwährend Arbeit aus nichts erzeugt. Eine solche wäre ein sog. Perpetuum mobile erster Art (§ 42). Der erste Hauptsatz schließt aber nicht aus, daß man eine periodisch wirkende Maschine konstruieren könnte, die nichts weiter tut als ein Wärmereservoir abzukühlen, d. h. ihm Wärmeenergie zu entziehen und diese in mechanische Arbeit umzuwandeln. Eine solche Maschine könnte z. B. den ungeheuren Wärmevorrat, der im Meerwasser enthalten ist, nutzbar machen und aus ihm mechanische Arbeit erzeugen, wobei sie das Meerwasser allmählich mehr und mehr abkühlen würde. Eine solche gedachte Maschine nennt man ein Perpetuum mobile zweiter Art. Der zweite Hauptsatz der Wärmetheorie sagt nun aus, daß auch ein solches Perpetuum mobile zweiter Art unmöglich ist. In einfacher Formulierung läßt er sich nach PLANCK so aussprechen: Es ist unmöglich, eine periodisch wirkende Maschine zu konstruieren, die nichts weiter bewirkt als Abkühlung eines Wärmereservoirs und gleichzeitig Hebung einer Last. Eine derartige Maschine wäre nicht nur eine Arbeits-, sondern auch eine Kältemaschine.

In Durchführung dieses Gedankens kam CLAUSIUS (1865) zur Definition einer Größe, welche man als Entropie bezeichnet. Die Entropie S eines Körpers oder eines Systems von Körpern ist durch eine Differentialgleichung definiert,

$$d S = \frac{d U + p\, d V}{T}, \tag{2}$$

wobei dS die bei einer sehr kleinen Zustandsänderung eintretende Entropieänderung, dU die Änderung der inneren Energie des Körpers, $p\,dV$ die äußere Arbeit, T die absolute Temperatur bedeutet. Der zweite Hauptsatz

läßt sich nun auch so formulieren: Bei jedem physikalischen Vorgang ist die Summe der Änderungen dS der Entropien aller an dem Vorgang beteiligten Körper stets gleich oder größer als Null.

$$dS \geqq 0. \qquad (3)$$

Oder mit anderen Worten: Die Entropie eines abgeschlossenen Systems von Körpern kann nur zu-, nie abnehmen (Clausius 1850, Kelvin 1851).

Der zweite Hauptsatz gibt also die Möglichkeit, bei gegebenem Anfangszustand zu berechnen, in welcher Richtung der Vorgang nunmehr weiter ververläuft und welchem Endzustand er zustrebt. Bringt man mehrere, zunächst in beliebigem Zustande befindliche Körper miteinander in thermische Wechselwirkung, so läßt sich der schließlich eintretende Endzustand aus den Bedingungen berechnen, daß erstens die Gesamtenergie aller an dem Vorgang beteiligten Körper unverändert bleibt (erster Hauptsatz), zweitens die Entropie den größten möglichen Wert hat (zweiter Hauptsatz).

Von Anwendungen der Gl. 2 und 3, die wir nur der Vollständigkeit halber erwähnen, muß hier abgesehen werden.

Das Wesen der Entropie ist von Boltzmann aufgeklärt worden. Wir betrachten als besonders einfachen Fall ein ideales Gas. Seine Moleküle sollen zusammen eine bestimmte Energie U haben, aber die Verteilung dieser Energie auf die einzelnen Moleküle, die Richtung der Geschwindigkeit der einzelnen Moleküle und ihre Verteilung im Raum sei zunächst noch ganz beliebig. Es sei z. B. noch möglich, daß die Energie U sich auf ganz wenige Moleküle oder auf alle gleichmäßig verteile, daß etwa alle Moleküle sich in gleicher Richtung bewegen oder daß sie alle in einer Ecke des verfügbaren Raumes zusammengedrängt seien. Bei gegebener Energie U, gegebenem Volumen V und gegebener Zahl von Molekülen sind noch unendlich viele Arten möglich, wie sich die Energie auf die Moleküle verteilen kann, wie sich die Geschwindigkeiten der Moleküle auf die verschiedenen Richtungen im Raume verteilen und wie die Moleküle selbst im Volumen V verteilt sein können. Man denke zum Vergleich an die Einwohner des Deutschen Reiches und stelle sich vor, daß es eine ungeheure Zahl von Möglichkeiten gibt, wie etwa das Gesamtvermögen des Volkes auf die einzelnen Deutschen verteilt sein kann, und ebenfalls unendlich viele Möglichkeiten, wie die einzelnen Deutschen im Gebiet des Reiches verteilt sein können.

Wir denken uns jetzt den augenblicklichen Zustand eines Gases etwa dadurch charakterisiert, daß wir angeben, daß das erste Molekül die Energie E_1, das zweite die Energie E_2 usw. hat, wobei die Summe aller dieser Energien gleich der vorgeschriebenen Gesamtenergie U sein muß, daß wir ferner bei jedem Molekül die Richtung seiner Geschwindigkeit angeben und den Ort, an dem es sich im Volumen V befindet. Dadurch ist der augenblickliche Zustand des Gases vollständig gegeben. Man nennt eine solche Zuordnung bestimmter Energiebeträge, Richtungen und Orte im Raum zu jedem Molekül eine Komplexion. Wir bekommen aber offenbar einen vollkommen identischen Zustand, wenn wir zwei oder mehrere der Moleküle miteinander in jeder Beziehung vertauschen, sie also ihre Energie, ihre Bewegungsrichtung und ihren Ort vertauschen lassen. Ein bestimmter Zustand kann also im allgemeinen durch mehrere Komplexionen, die durch Vertauschung auseinander hervorgehen, hergestellt werden.

Wegen der Wechselwirkungen der Moleküle, insbesondere ihrer Zusammenstöße, ändert sich nun der Zustand eines Gases, wenn wir seine einzelnen

Moleküle individuell betrachten, fortwährend; in jedem Augenblick finden wir eine andere Verteilung der Energie auf die Moleküle, die einzelnen Moleküle ändern fortgesetzt ihre Richtung und ihren Ort. Wir haben also in jedem Augenblick eine andere Komplexion vor uns. Wir nehmen jetzt an, daß jede derartige Komplexion, die mit den gegebenen Bedingungen verträglich ist, genau gleich wahrscheinlich ist, d. h. daß jede von ihnen im Laufe einer langen Zeit im Durchschnitt gleich oft vorkommt. Nun haben wir eben gesehen, daß der gleiche Zustand durch mehrere Komplexionen hergestellt werden kann. Die einzelnen mit den gegebenen Bedingungen (konstante Gesamtenergie und Volumen) verträglichen Zustände sind also nicht gleich wahrscheinlich, sondern es werden im Laufe einer längeren Zeit diejenigen Zustände am häufigsten auftreten, welche durch die größte Zahl von Komplexionen verwirklicht werden. Wenn wir wieder unser grobes Beispiel heranziehen, so sehen wir z. B., daß eine Verteilung des ganzen deutschen Volksvermögens auf die Bevölkerung, derart, daß ein Deutscher das ganze Vermögen und alle andern nichts besitzen, durch 70 Millionen (Einwohnerzahl) verschiedene Komplexionen hergestellt werden kann, eine Verteilung aber, bei der je zwei Menschen gerade die Hälfte des Volksvermögens besitzen, durch rund $\frac{1}{2} \cdot (70 \text{ Millionen})^2 = 2450$ Billionen Komplexionen, und andere Verteilungsarten lassen sich noch auf viel mehr Arten herstellen. Wechselt also die Vermögensverteilung fortgesetzt in ganz zufälliger Weise, so wird unter allen möglichen Zuständen derjenige der häufigste sein, der durch die größte Zahl von Komplexionen hergestellt werden kann. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung lehrt nun weiter, daß, wenn es sich um eine sehr große Zahl von Individuen handelt, in unserm Falle die Moleküle eines Gases, die Zahl der Komplexionen für einen ganz engen Bereich von Zuständen, praktisch für einen ganz bestimmten Zustand, ungeheuer viel größer ist, als für irgendwelche Zustände außerhalb dieses Bereichs. Dieser Zustand ist also der praktisch allein vorkommende. Ein nur ganz wenig von ihm abweichender Zustand tritt nur mit verschwindender Häufigkeit als eine momentane, winzige Zustandsschwankung auf. Dies ist also der Zustand, der sich infolge der Wechselwirkungen zwischen den Molekülen nach kürzester Zeit herstellt, wie auch der Anfangszustand sein mag. Aus solchen Überlegungen läßt sich auch das MAXWELLsche Gesetz über die Molekulargeschwindigkeiten (§ 187) ableiten.

Die Zahl der Komplexionen, durch die ein bestimmter Zustand verwirklicht wird, nennt man die thermodynamische Wahrscheinlichkeit W des Zustandes. Sie ist bei großer Individuenzahl auch eine sehr große Zahl. BOLTZMANN (1866) zeigte, daß die Entropie eines Körpers oder Systems von Körpern mit dieser thermodynamischen Wahrscheinlichkeit durch die Gleichung

$$S = k \log W \tag{4}$$

zusammenhängt. Hierbei ist $k = 1{,}37_2 \cdot 10^{-16}$, und, wie PLANCK gezeigt hat, mit der bereits in § 156 eingeführten BOLTZMANNschen Konstanten identisch. (Der log ist der natürliche Logarithmus.) Die Entropie eines Körpers oder Systems von Körpern ist also um so größer, je größer die thermodynamische Wahrscheinlichkeit W seines Zustandes ist, und der zweite Hauptsatz besagt, daß bei allen in der Natur vorkommenden Vorgängen die Entropie, d. h. die thermodynamische Wahrscheinlichkeit des Zustandes der an dem Vorgange beteiligten Körper insgesamt zunimmt, höchstens im Grenzfalle konstant bleibt. Jeder Vorgang verläuft von selbst so, daß unwahrscheinlichere Zustände sich in wahrscheinlichere verwandeln, nie umgekehrt. Dies ist also der eigentliche Kern des zweiten Hauptsatzes.

Zustände, bei denen eine gewisse Ordnung herrscht, sind in diesem Sinne sehr unwahrscheinlich. Die Vorgänge in der Natur sind also so gerichtet, daß sie bestehende Ordnungen zu zerstören suchen, z. B. die Ansammlung aller Moleküle eines Gases in einer Ecke des verfügbaren Raumes, gleichgerichtete Bewegung vieler Moleküle usw. Der Zustand, dem die Natur zustrebt, ist der Zustand der sog. idealen Unordnung. Niemals kommt es in der Natur vor, daß ein ungeordneter Zustand sich in einen solchen größerer Ordnung verwandelt, ohne daß an anderer Stelle in der Natur dafür als Kompensation der umgekehrte Vorgang eintritt. Besonders wichtige Beispiele für die Gültigkeit des 2. Hauptsatzes sind die Reibungs- und Diffusionsvorgänge und der Ausgleich der Temperaturen zwischen verschieden temperierten Körpern. In allen diesen Fällen ist der Endzustand stets durch eine größere thermodynamische Wahrscheinlichkeit vor dem Anfangszustand ausgezeichnet. Ebenso ist die durch das MAXWELLsche Gesetz (§ 157) bestimmte Geschwindigkeitsverteilung diejenige größter thermodynamischer Wahrscheinlichkeit.

Wir wollen dies noch an einem einfachen Beispiel erläutern. Ein Gefäß bestehe aus zwei Abteilungen, welche durch eine Öffnung mit einem Hahn verbunden sind. Zunächst sei der Hahn geschlossen. Die eine Abteilung sei vollkommen leer, in der andern befinden sich 1000 Moleküle. Wir öffnen jetzt den Hahn, und die Moleküle verteilen sich infolge ihrer thermischen Bewegung auf beide Abteilungen. Im weiteren Verlauf wird sich jedes einzelne Molekül gelegentlich durch die Öffnung hindurchbewegen und sich bald in der einen, bald in der andern Abteilung befinden. Da sich die einzelnen Moleküle vollkommen unabhängig voneinander bewegen, so ist es natürlich an sich möglich, daß im Ablauf der Dinge einmal wieder zufällig alle Moleküle gleichzeitig in der einen Abteilung sind. Es ist das aber ein überaus unwahrscheinliches Ereignis. Es ist schon sehr unwahrscheinlich, daß je wieder ein Zustand eintritt, bei dem die Moleküle nicht mit einigermaßen gleichmäßiger Dichte auf beide Abteilungen verteilt sind. In noch viel höherem Maße gilt dies, wenn wir die ungeheuer großen Zahlen von Molekülen in Betracht ziehen, um die es sich in praktischen Fällen immer handelt. Je größer diese Zahl ist, um so geringer wird die Wahrscheinlichkeit, daß das Molekülsystem je einmal einen Zustand einnimmt, bei dem die Molekülverteilung in den beiden Gefäßabteilungen von der wahrscheinlichsten Verteilung irgendwie merklich abweicht, die dann vorhanden ist, wenn die Moleküle in den Abteilungen im Durchschnitt gleich dicht verteilt sind. Dieses Beispiel zeigt uns an einem einfachen Fall, wie ein Zustand kleinerer Wahrscheinlichkeit von selbst in einen solchen größerer Wahrscheinlichkeit übergeht. (Diese Tatsachen haben ja ihr grobes Gegenstück im täglichen Leben. Auch an den uns umgebenden Gegenständen erkennen wir die unter der Wirkung der mit ihnen vorgenommenen zufälligen Hantierungen bestehende Tendenz, aus geordneten Zuständen in ungeordnete überzugehen. Der Zustand, in dem sich z. B. die Gegenstände auf einem Schreibtisch nach längerer Arbeit an demselben zu befinden pflegen, ist nicht nur eine äußere Analogie zu den beschriebenen molekularen Vorgängen, sondern in ähnlicher Weise wie sie durch Wahrscheinlichkeitsgesetze beherrscht.)

196. Reversible und irreversible Prozesse. Als reversibel oder umkehrbar bezeichnet man solche physikalischen Prozesse, die in allen Einzelheiten restlos rückgängig gemacht werden können, ohne daß dafür an anderer Stelle in der Natur Veränderungen zurückbleiben. Alle anderen Prozesse heißen irreversibel oder nichtumkehrbar.

Reversible Prozesse sind dadurch gekennzeichnet, daß bei ihnen die Entropie des beteiligten Systems von Körpern konstant bleibt. Es ist dies ein idealer Grenzfall, der bei keinem Vorgang in der Natur in voller Strenge verwirklicht ist. Alle

tatsächlichen Naturvorgänge sind irreversibel. Dies hängt damit zusammen, daß alle wirklichen Naturvorgänge so verlaufen, daß unwahrscheinliche, d. h. irgendwie geordnete Zustände, sich stets in wahrscheinlichere, also weniger geordnete verwandeln, aber niemals umgekehrt. Es hat dies zur Folge, daß die Entwicklung des Kosmos — jedenfalls nach dem heutigen Stande unsres Wissens — eine bestimmte Richtung hat und niemals wieder restlos zu früheren Zuständen zurückführen kann. Die Entropie des Weltalls nimmt ständig zu. Im weiteren Verfolg dieses Gedankens kommt man zu dem Schluß, daß die Entwicklung des Weltalls einem Endzustand zustrebt, bei dem seine Entropie ihr Maximum erreicht hat, bei dem also weitere Veränderungen nicht mehr eintreten. Das würde das Ende jedes Geschehens im Weltall bedeuten (sog. Wärmetod).

197. **Temperaturausgleich.** Wie bereits erwähnt, gehört zu den durch den 2. Hauptsatz bedingten Vorgängen auch die Tatsache, daß sich die Temperaturen zweier verschieden temperierter Körper ausgleichen, sofern sie miteinander in thermische Wechselwirkung treten können, also der Übergang von Wärme vom wärmeren zum kälteren Körper. Ein solcher Temperaturausgleich kann auf drei verschiedene Arten erfolgen.

1. Die Wärmestrahlung. Diese beobachten wir in größtem Maße an der Sonne, von der die Wärme nur auf diesem Wege zu uns kommt. Ferner ist sie bei irdischen Körpern von nicht zu niedriger Temperatur (warmer Ofen) deutlich fühlbar. Die Wärmestrahlung ist mit dem Licht wesensgleich und wird an anderer Stelle behandelt (§ 480 ff.).

2. Die Konvektion. Diese kommt nur in Flüssigkeiten und Gasen vor und besteht darin, daß größere zusammenhängende Teile der betreffenden Substanz sich von einem Ort zum andern bewegen und die in ihnen enthaltene Wärme mit sich führen. Hierher gehört das Aufsteigen der warmen Luft von einem heißen Körper. Die Luftbewegungen in der Atmosphäre sind ein Beispiel in großem Maßstabe. In allergrößtem Umfange finden Konvektionsströmungen jedenfalls in den äußeren Schichten der Sonne und der übrigen Fixsterne statt. Die bei der Konvektion auftretenden Bewegungen haben ihre Ursache meistens darin, daß infolge von Temperaturunterschieden in den einzelnen Teilen einer Flüssigkeit oder eines Gases Dichteunterschiede auftreten, die einen Auftrieb des wärmeren und daher weniger dichten Teils im kälteren und dichteren bewirken.

Eine wichtige technische Anwendung der Wärmekonvektion ist die Warmwasserheizung, bei welcher das im Kessel erwärmte Wasser im Röhrensystem nach den kälteren Stellen wandert. Das Röhrensystem besteht aus den gegen Wärmeverluste möglichst gut geschützten Zuleitungsrohren und den im Gegensatz dazu eigens auf gute Wärmeabgabe konstruierten Heizkörpern. Das Wasser strömt in abgekühltem Zustande von diesen wieder in den Kessel zurück.

Der Ausgleich der Temperaturen im Innern von Gebäuden geschieht fast ausschließlich auf dem Wege der Konvektion. Der „Zug" in Gebäuden besteht meist aus Konvektionsströmen, welche durch Temperaturdifferenzen zwischen dem Hausinnern und der Außenluft entstehen.

Die wärmende Wirkung der Kleidung und der tierischen Pelze beruht darauf, daß sie eine Konvektion der den Körper umgebenden Luft verhindern. Die schlechte Wärmeleitfähigkeit von Stoffen und Pelzen spielt dabei nur eine untergeordnete Rolle.

3. Die Wärmeleitung, die im folgenden Paragraphen besprochen wird.

198. **Wärmeleitung.** Die Wärmeleitung ist eine reine Molekularwirkung. Ist die Temperatur eines Körpers an einer Stelle höher als an einer un-

mittelbar benachbarten, so geben die Moleküle der wärmeren Stelle durch Zusammenstöße einen Teil ihrer Energie an die Umgebung ab. Die wärmere Stelle kühlt sich ab, die kältere erwärmt sich; es fließt Wärme von der wärmeren zur kälteren Stelle, so lange, bis sich die Temperaturen, d. h. die mittleren Energien der Moleküle, ausgeglichen haben.

Dies Verhalten ist eine Folge des zweiten Hauptsatzes (§ 195). Denn ein Zustand, bei dem die Molekularenergie über alle Teile eines Körpers oder eines Systems zusammenhängender Körper im Durchschnitt gleichmäßig verteilt ist, bei dem also alle beteiligten Körper auf gleicher Temperatur sind, ist wahrscheinlicher als irgendein anderer Zustand.

Wird innerhalb eines Körpers eine Temperaturdifferenz künstlich aufrechterhalten, z. B. indem man eine Stelle desselben mit einem Körper von hoher Temperatur, etwa einer Flamme, in Berührung bringt, der ihm fortgesetzt Wärme nachliefert, eine andere Stelle mit einem Körper von niedriger Temperatur, etwa der Luft oder einem Gefäß mit kaltem Wasser oder Eis, so fließt durch den Körper ein dauernder Strom von Wärme. Dieses Strömen von Wärme unter der Wirkung einer Temperaturdifferenz hat formal eine große Ähnlichkeit mit dem Strömen einer Flüssigkeit oder eines Gases unter der Wirkung einer Druckdifferenz. Tatsächlich handelt es sich um einen Ausgleich der Molekularenergien durch Zusammenstöße zwischen den aneinander grenzenden, verschieden temperierten Teilen des betreffenden Körpers. Was bei der Wärmeleitung „strömt", ist nicht Materie, sondern Energie. Man spricht daher in diesem Fall und in andern verwandten Fällen von einer Energieströmung, deren Stärke hier durch die Zahl der Kalorien gegeben ist, die in 1 sec durch den Querschnitt des wärmeleitenden Körpers fließen.

Die Wärmemenge, die in 1 sec durch einen Querschnitt q fließt, welcher senkrecht zur Richtung x des größten Gefälles der Temperatur liegt, ist

$$Q = -\lambda q \frac{dT}{dx} \text{ cal/sec}. \tag{5}$$

$-dT/dx$ ist das Temperaturgefälle oder der Temperaturgradient, d. h. die Temperaturabnahme auf je 1 cm in der x-Richtung. λ ist eine Materialkonstante, die Wärmeleitfähigkeit der betreffenden Substanz. Da im stationären Zustand nirgends im Körper eine dauernde Ansammlung von Wärme stattfindet — denn das würde ja eine Temperaturänderung an einer solchen Stelle bewirken —, so ist der Wärmestrom Q cal/sec in jedem Querschnitt der gleiche, also durch den ganzen Körper konstant, sofern keine Wärme durch seine seitliche Begrenzung abströmt (vgl. durch ein dichtes und ein undichtes Rohr strömendes Wasser).

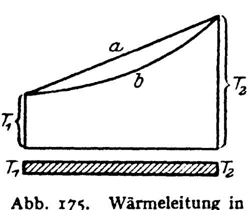


Abb. 175. Wärmeleitung in einem Metallstab.

Die Wärmeleitung in einem festen Körper kann z. B. mittels eines Metallstabes demonstriert werden, der einige mit Quecksilber gefüllte Löcher enthält, in welche Thermometer tauchen und der an seinem einen Ende in ein Gefäß mit siedendem Wasser, mit seinem andern Ende in Eis taucht. Hat der Stab überall gleichen Querschnitt q, so sollte nach Gl. 1 dT/dx überall gleich sein, d. h. die Temperaturdifferenz, die je zwei gleich weit voneinander befindliche Thermometer anzeigen, sollte überall gleich groß sein (Abb. 175, Gerade a). Tatsächlich ist das nicht der Fall, da der Stab Wärme nicht nur an seinem kalten Ende abgibt, sondern auch auf seiner ganzen Länge an die Luft. Das führt zu einem Temperaturverlauf, wie er in Abb. 175 durch die gekrümmte Linie (b) dargestellt ist. Auch dieser Verlauf läßt sich berechnen.

Das verschieden große Wärmeleitvermögen, daneben auch die verschieden große spezifische Wärme, sind der Grund dafür, daß sich Körper von gleicher

Temperatur, z. B. Zimmertemperatur, verschieden warm anfühlen. Je besser das Wärmeleitvermögen und je größer außerdem die spezifische Wärme des betreffenden Körpers ist, um so größer ist die Wärmemenge, die in 1 sec von der warmen Haut abgeleitet wird, um so schneller kühlt sich also die betreffende Hautstelle ab. Metalle von Zimmertemperatur erscheinen daher kalt, ein Stück Watte nicht. Liegen die Temperaturen über der Hauttemperatur, so kehrt sich die Erscheinung gerade um. Ein Stück Watte von 100° kann man noch anfassen, ein Stück Eisen von 100° aber nicht. Es ist dies eines der vielen Beispiele dafür, wie wenig geeignet der menschliche Körper für quantitative Messungen ist.

Das Wärmeleitvermögen der Flüssigkeiten ist durchweg viel kleiner als das der festen Körper.

Von besonderem Interesse ist die Wärmeleitung der Gase. Eine bemerkenswerte Tatsache ist, daß die Wärmeleitfähigkeit eines Gases bei nicht zu tiefem Druck vom Druck unabhängig ist. Das liegt daran, daß zwar die freie Weglänge der Moleküle mit sinkendem Druck wächst, wodurch der Transport von Molekularenergie begünstigt wird, andrerseits aber die Zahl der Moleküle in 1 cm³, also der Energieträger, dem Druck proportional ist. Diese beiden Effekte heben sich in ihrer Wirkung auf den Energieaustausch gegenseitig auf. Ist aber der Druck so niedrig, daß die freie Weglänge der Gasmoleküle von der gleichen Größenordnung ist, wie die Abmessungen des das Gas einschließenden Gefäßes, so sinkt die Wärmeleitfähigkeit stark. Die Wärmeleitung durch ein Gas beruht auf einem Energieaustausch zwischen den Molekülen der verschieden temperierten Bereiche des Gases, wird also durch die Molekularbewegung vermittelt. Moleküle der kälteren Bereiche dringen in die wärmeren Bereiche ein und umgekehrt und bewirken so einen Ausgleich der molekularen Energie in ihnen. Die Wärmeleitung der Gase steht daher in nächster Beziehung zu den Erscheinungen der Diffusion (§ 158) und der inneren Reibung (§ 113). Es sind dies im Grunde alles Diffusionserscheinungen.

In Tab. 18 sind die Wärmeleitfähigkeiten einiger Substanzen zusammengestellt.

In anisotropen, d. h. in verschiedenen Richtungen verschieden beschaffenen festen Körpern, wie vielen Kristallen, ist die Wärmeleitfähigkeit von der Richtung abhängig. So leitet z. B. auch Holz merklich besser in Richtung seiner Fasern, als senkrecht dazu.

Besonders schlechte Wärmeleiter sind diejenigen festen Substanzen, welche viel Luft enthalten, in denen die Leitung also wesentlich durch die sehr schlecht leitende Luft besorgt wird, wie z. B. Kork, Watte, Webstoffe.

Tabelle 18. Wärmeleitfähigkeiten einiger Substanzen.

	cal/grad · cm · sec
Aluminium	0,48
Blei	0,08
Eisen	0,14—0,17
Kupfer	0,90
Silber	1,01
Schiefer	0,00081
Holz	0,0003—0,0009
Glas	0,0014—0,0018
Wasser	0,0014
Luft	0,000057
Helium	0,00034
Wasserstoff	0,00032

Eine Folge des geringen Wärmeleitvermögens der Gase, in diesem Falle des Wasserdampfs, ist das sog. LEIDENFROSTsche Phänomen. Ein auf eine ausreichend heiße Metallplatte ($t > 100^0$) gebrachter Wassertropfen schwebt eine Zeitlang dicht über derselben, anstatt sofort zu verdampfen, weil ihn die sich im ersten Augenblick unter ihm bildende, die Wärme schlecht leitende Wasserdampfschicht weitgehend vor dem Zustrom von Wärme aus der Platte schützt. Erst wenn sich der Tropfen allmählich durch die Dampfschicht hindurch auf 100° erhitzt hat, verdampft (zerspratzt)

er plötzlich. Aus dem gleichen Grunde soll es angeblich gefahrlos sein, schnell mit der Zunge über glühendes Eisen zu lecken.

Da die Wärmeleitung an das Vorhandensein von Materie gebunden ist, so kann sie im Vakuum nicht stattfinden. Auf dieser Tatsache beruht der gute Wärmeschutz (sowohl gegen Abkühlung als auch gegen Erwärmung), den die doppelwändigen sog. Thermosflaschen (WEINHOLDsche oder DEWAR-Gefäße) bieten, bei denen der Zwischenraum zwischen den Wänden gut evakuiert ist.

199. **Der dritte Hauptsatz der Wärmetheorie (NERNSTsches Wärmetheorem).** Die Definitionsgleichung der Entropie, Gl. 2, § 195, sagt als Differentialgleichung nichts über den absoluten Betrag der Entropie aus. Bei ihrer Integration tritt eine Integrationskonstante auf, welche zunächst unbestimmt bleibt. Diese Unbestimmtheit behebt das Wärmetheorem von NERNST, auch dritter Hauptsatz der Wärmetheorie genannt. Es sagt aus, daß die Entropie aller Substanzen beim absoluten Nullpunkt der Temperatur gleich Null wird. Aus Gl. 4, § 195, folgt dann, daß die thermodynamische Wahrscheinlichkeit des Zustandes aller Körper beim absoluten Nullpunkt $W = 1$ wird. Das bedeutet, daß dieser Zustand überhaupt nur durch eine einzige Komplexion verwirklicht werden kann. Eine weitere Folge aus dem NERNSTschen Theorem ist, daß die spezifischen Wärmen der Körper sich beim absoluten Nullpunkt asymptotisch dem Wert Null nähern, und daß der absolute Nullpunkt eine Grenztemperatur ist, die zwar mit beliebiger Annäherung, aber grundsätzlich nicht physikalisch streng erreicht werden kann.

Das NERNSTsche Wärmetheorem hat sich nicht nur auf physikalischem Gebiet als sehr fruchtbar erwiesen. Es leistet vor allem auch sehr wertvolle Dienste bei der Berechnung chemischer Gleichgewichte. Doch kann darauf hier nicht näher eingegangen werden. Das NERNSTsche Wärmetheorem steht in naher Beziehung zur Quantentheorie (§ 511).

200. **CARNOTscher Kreisprozeß.** Wir wenden uns jetzt der Umwandlung von Wärme in mechanische Arbeit zu. Für diese ist eine von CARNOT angestellte Überlegung wichtig, der sog. CARNOTsche Kreisprozeß (1824). In einen Behälter von veränderlichem Volumen denken wir uns ein Gramm eines idealen Gases eingeschlossen, welches zunächst die Temperatur T_1 und das Volumen V_1 habe. Mit diesem Gase denken wir uns nacheinander folgende Veränderungen vorgenommen:

1. Das Gas werde adiabatisch (§ 172) komprimiert, bis es die höhere Temperatur T_2 angenommen hat. Sein Volumen sei jetzt V_2.

2. Das Gas wird mit einem sehr großen Wärmereservoir von der gleichen Temperatur T_2 in Verbindung gebracht und nunmehr bei konstanter Temperatur (isotherm) auf das Volumen V_2' ausgedehnt. Da sich ein Gas bei Volumvergrößerung abkühlt, so muß ihm zur Konstanthaltung seiner Temperatur eine Wärmemenge Q_2 aus dem Reservoir von der Temperatur T_2 zugeführt werden.

3. Das Gas wird von dem Wärmebehälter getrennt und nunmehr adiabatisch ausgedehnt, bis es durch Abkühlung wieder seine alte Temperatur T_1 erhalten hat. Sein Volumen sei jetzt V_1'. (V_1' ist größer als V_1).

4. Nunmehr wird das Gas mit einem zweiten sehr großen Wärmereservoir von der Temperatur T_1, seiner Ausgangstemperatur, verbunden und isotherm auf sein ursprüngliches Volumen V_1 zurückgeführt, also komprimiert. Dabei gibt es eine Wärmemenge Q_1 an das kältere Reservoir von der Temperatur T_1 ab.

Nach Vollendung dieses sog. Kreisprozesses ist das Gas wieder vollkommen in seinem Anfangszustand. Dagegen hat das eine Wärmereservoir die Wärmemenge Q_2 abgegeben, das andere die Wärmemenge Q_1 aufgenommen. Ferner ist bei jedem der vier Teilprozesse Arbeit geleistet worden.

Bei jedem einzelnen Teilprozeß leistet das Gas eine Arbeit $\int p\,dV$, welche im Falle 2 und 3 positiv, in den Fällen 1 und 4 negativ ist. Die einzelnen Phasen des Kreisprozesses sind in Abb. 176 dargestellt.

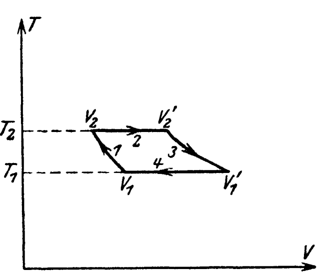


Abb. 176. CARNOTscher Kreisprozeß.

Bezeichnen wir mit A die insgesamt vom Gase geleistete Arbeit, so ergibt sich diese, da sie für jeden Teilprozeß durch das Integral $\int p\,dV$ (§ 160) dargestellt ist, zu

$$A = \int\limits_{V_1 T_1}^{V_2 T_2} p\,dV + \int\limits_{V_2 T_2}^{V_2' T_2} p\,dV + \int\limits_{V_2' T_2}^{V_1' T_1} p\,dV + \int\limits_{V_1' T_1}^{V_1 T_1} p\,dV. \qquad (6)$$

Dabei verläuft also der erste und dritte Prozeß adiabatisch, der zweite und vierte isotherm. Für erstere beide gilt daher die in § 172, Gl. 8, abgeleitete Beziehung $C_v\,dT = -p\,dV$. Bei den beiden anderen können wir nach § 162 $p = \frac{RT}{MV}$ setzen (da es sich um 1 g handelt, so ist $V = V_s$), so daß wir erhalten

$$A = -C_v \int\limits_{T_1}^{T_2} dT + \frac{R}{M} \int\limits_{V_2}^{V_2'} T_2 \frac{dV}{V} - C_v \int\limits_{T_2}^{T_1} dT + \frac{R}{M} \int\limits_{V_1'}^{V_1} T_1 \frac{dV}{V}.$$

Das erste und dritte Integral unterscheiden sich lediglich durch die Vertauschung der Integrationsgrenzen, sie sind also entgegengesetzt gleich und heben sich gegenseitig auf. Die Ausführung der beiden anderen Integrale ergibt

$$A = \frac{R}{M}\left[T_2 \log \frac{V_2'}{V_2} + T_1 \log \frac{V_1}{V_1'}\right]. \qquad (7)$$

Da nun die Prozesse, durch die der Zustand (V_2, T_2) aus (V_1, T_1) und der Zustand $V_1' T_1$ aus $V_2' T_2$ entstanden, adiabatisch verliefen, so bestehen nach Gl. 9, § 172, die Beziehungen

$$T_2 V_2^{\varkappa-1} = T_1 V_1^{\varkappa-1} \quad \text{und} \quad T_2 V_2'^{\varkappa-1} = T_1 V_1'^{\varkappa-1},$$

$\left(\varkappa = \frac{C_p}{C_v}\right)$, aus denen ohne weiteres folgt $V_2'/V_2 = V_1'/V_1$, so daß

$$A = \frac{R}{M} \log \frac{V_1'}{V_1} \cdot (T_2 - T_1). \qquad (8)$$

Da $T_2 > T_1$ und $V_1' > V_1$, so ist dieser Ausdruck positiv, das Gas hat äußere Arbeit geleistet, und zwar auf Kosten der von dem wärmeren Reservoir an das Gas abgegebenen Wärme Q_2. Diese Wärme ist aber nicht vollständig in Arbeit verwandelt worden, sondern nur der Bruchteil $Q_2 - Q_1$, denn das Gas hat ja im vierten Teilprozeß die Wärmemenge Q_1 an das kältere Reservoir abgegeben.

Die Einzelbeträge Q_1 und Q_2 lassen sich leicht berechnen. Da beim zweiten Teilprozeß keine Erwärmung des Gases stattgefunden hat, so findet sich die zugeführte Wärme restlos in der geleisteten äußeren Arbeit $\int\limits_{V_2 T_2}^{V_2' T_2} p\,dV$ wieder, und diese beträgt, wie oben bereits bewiesen, $\frac{R}{M} T_2 \log \frac{V_2'}{V_2}$, so daß $Q_2 = \frac{R}{M} T_2 \log \frac{V_2'}{V_2}$ $= \frac{R}{M} T_2 \log \frac{V_1'}{V_1}$. Und entsprechend ist Q_1, die an das zweite Reservoir abgegebene Wärme, $Q_1 = \frac{R}{M} \cdot T_1 \log \frac{V_1'}{V_1}$. Aus diesen Beziehungen ergibt sich wieder leicht

die Gleichung $A = Q_2 - Q_1$, welche nichts anderes bedeutet als die Gültigkeit des Energieprinzips. Denn die vom Gase geleistete mechanische Arbeit A muß sich, da sonst Energie weder zu- noch abgeführt wurde, darstellen als der Überschuß zwischen der vom Gase aufgenommenen und der von ihm wieder abgegebenen Wärmeenergie.

Wir sehen also, daß, um durch einen solchen Kreisprozeß die mechanische Arbeit A zu gewinnen, die Wärmeenergie $Q_2 > A$ aufgewendet werden muß, und daß mit der Gewinnung mechanischer Arbeit der Übergang eines Teils Q_1 dieser Wärmeenergie von einem Wärmereservoir der höheren Temperatur T_2 auf eines von der tieferen Temperatur T_1 verbunden ist. Der mechanische Nutzeffekt η des Prozesses ist also kleiner als 1, nämlich

$$\eta = \frac{A}{Q_2} = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = \frac{T_2 - T_1}{T_2}. \tag{9}$$

Der Nutzeffekt η hängt also lediglich von der Temperatur der beiden Wärmereservoire ab, er ist unabhängig von den Einzelheiten der gedachten Teilprozesse, die zur Gewinnung der mechanischen Arbeit A führten. Das Ergebnis gilt ganz allgemein zunächst für ideale Gase. Der Nutzeffekt kann auf keine Weise verbessert, nur durch mangelhafte Versuchsbedingungen — Reibung, Wärmeabgabe an andere Körper der Umgebung usw. — verschlechtert werden.

Bisher liegt den Überlegungen, außer den Gesetzen der idealen Gase, nur der erste Hauptsatz zugrunde. Unter Heranziehung des zweiten Hauptsatzes kann man aber nachweisen, daß die durch Gl. 9 ausgesprochene Gesetzmäßigkeit auch dann gilt, wenn die „arbeitende" Substanz kein ideales Gas, sondern irgendein wirklicher Körper ist. Wir kommen damit zu der wichtigen Folgerung, daß eine Umwandlung von Wärme in mechanische Arbeit auf dem Wege eines Kreisprozesses einen beschränkten Nutzeffekt hat. Wird bei einem solchen mechanische Arbeit auf Kosten thermischer Energie eines Wärmereservoirs geleistet, so geht notwendig ein Übergang einer bestimmten Wärmemenge von dem wärmeren Reservoir auf ein kälteres daneben her. Aus Gl. 9 erkennt man, daß der Nutzeffekt eines solchen Prozesses um so größer ist, je größer die Temperaturdifferenz $T_2 - T_1$ der beiden Reservoire und je niedriger die Temperatur T_1 des kälteren Reservoirs ist. Nur im nichtrealisierbaren Grenzfall, daß $T_1 = 0^0$ abs., wird der Nutzeffekt gleich 1 oder gleich 100%.

Man beachte an den vorstehenden Überlegungen, daß es sich um die Gewinnung von Arbeit mit Hilfe eines Kreisprozesses handelt, also eines Vorgangs, bei dem die benutzte Vorrichtung — das Gefäß nebst dem eingeschlossenen Gase — sich am Ende des Prozesses wieder im gleichen Zustand befindet wie am Anfang, und bei dem die einzige Veränderung dieses Systems darin besteht, daß das wärmere Reservoir die Wärmemenge Q_2 verloren, das kältere die Wärmemenge Q_1 aufgenommen hat. Der begrenzte Nutzeffekt, den wir dabei berechnet haben, ist eine Eigentümlichkeit eines solchen Kreisprozesses. Lassen aber wir die Forderung der Wiederkehr des benutzten materiellen Systems in den Anfangszustand fallen, so ist auch eine restlose Verwandlung von Wärme in Arbeit mittels eines idealen Gases wenigstens theoretisch möglich. Ein Beispiel hierfür liefert der zweite Teilprozeß des Carnotschen Kreisprozesses, bei dem die Temperatur des Gases konstant gehalten wird und die zugeführte Wärmemenge Q_2 restlos zur Leistung der Arbeit $\int p\,dV$ dient, also zur Fortbewegung des den Gasraum schließenden Stempels gegen einen äußeren Druck, der dem Gasdruck das Gleichgewicht hält. Man kann sich diese Arbeit etwa als Hebung eines Gewichtes $k = pq$ denken, wenn p den Gasdruck, q den Querschnitt des Stempels bedeutet.

201. Verwandlung von Wärme in mechanische Arbeit. Für die praktische Verwandlung von Wärme in Arbeit kommen nur solche Vorrichtungen in Frage, welche periodisch arbeiten, in denen also Kreisprozesse vor sich gehen. Eine praktisch verwendbare Maschine, welche sich im Laufe der Zeit dauernd verändert, also nicht periodisch wieder in ihren Anfangszustand zurückkehrt, ist nicht gut denkbar. Für die Wärmekraftmaschinen gilt daher die Gl. 9, und zwar nur als eine obere, tatsächlich nie erreichbare Grenze für den erzielbaren Nutzeffekt. Der wirklich erzielte Nutzeffekt, d. h. der Arbeitsbetrag, der in der gewünschten Form gewonnen wird, bleibt stets unter dieser Grenze. Ein oft nicht unerheblicher Teil wird durch Reibung der Maschinenteile aufgezehrt. Ferner wird nicht nur Wärme an das kältere Wärmereservoir abgegeben, sondern auch an andere Teile der Umgebung, wodurch sich der Nutzeffekt weiter verschlechtert.

Jedenfalls ergibt sich aber aus Gl. 9 die Forderung, daß man die Temperaturen T_2 und T_1, zwischen denen die Maschine arbeitet, so wählen muß, daß T_2 möglichst groß, T_1 möglichst klein ist. Bezüglich T_1 sind wir aus praktischen Gründen an die gewöhnlichen Temperaturen unserer Umgebung gebunden, wobei noch zu beachten ist, daß sich das kältere Reservoir unter Umständen durch die Aufnahme der Wärmemengen Q_1 mehr oder weniger erwärmt. Das Ziel bleibt daher, die Temperatur T_2 möglichst hoch zu machen.

Als arbeitendes Gas dienen im allgemeinen Wasserdampf (Dampfmaschinen) oder die Verbrennungsgase explosibler Stoffe (Explosionsmotore).

202. Wärmekraftmaschinen. Bei den Dampfmaschinen ist das Wärmereservoir von höherer Temperatur (T_2) der Kessel, in dem aus siedendem Wasser Dampf erzeugt wird. Es besitzt also eine Temperatur von 100°, wenn man nicht durch besondere Vorkehrungen (Druck) die Siedetemperatur heraufsetzt (§ 181), was zur Erzielung höherer Nutzeffekte meist geschieht. Das kältere Wärmereservoir ist der Kondensator, ein wassergekühlter Behälter, in dem sich der Dampf nach erfolgter Arbeitsleistung unter Abgabe seiner latenten Verdampfungswärme kondensiert.

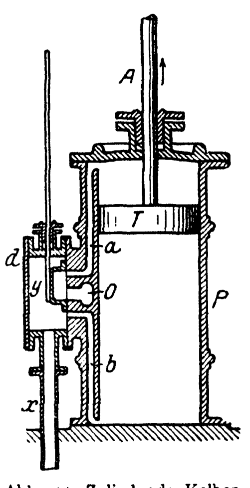


Abb. 177. Zylinder der Kolbendampfmaschine.

Der Hauptteil der von JAMES WATT erfundenen Kolbendampfmaschine ist der Zylinder P (Abb. 177), in dem sich ein dicht schließender Kolben T mit der Kolbenstange A hin- und herbewegen kann. Diese Hin- und Herbewegung wird dadurch hervorgerufen, daß der vom Kessel herkommende Dampf bald von oben, bald von unten her gegen den Kolben drückt. In der Abb. 177 ist der Kolben noch in Aufwärtsbewegung begriffen gedacht, der Dampf strömt von dem Kessel her durch das Rohr x, den Schieberkasten d und das Rohr b in den unteren Teil des Zylinders. Der obere Teil des Zylinders, der sich bei der Aufwärtsbewegung des Kolbens mit Dampf gefüllt hatte, ist aber durch das Rohr a und das im Querschnitt gezeichnete Rohr O mit dem Kondensator verbunden, einem Behälter, der fortwährend mit kaltem Wasser gekühlt wird, so daß sich der Dampf in ihm sofort zu Wasser kondensiert. Infolgedessen besteht in dem oberen Zylinderteil, da der Zylinder ja keine Luft enthält, ein sehr niedriger Druck, der Kolben wird durch den Druck im unteren Teil nach oben getrieben. Durch die Bewegung des Kolbens wird die sog. Steuerung betätigt. Diese bewirkt, daß sich, sobald der Kolben das obere Ende des Zylinders erreicht hat, der Schieber y derart nach unten verschiebt, daß nunmehr eine Verbindung der unteren Zylinderhälfte durch b mit O

und dem Kondensator hergestellt wird und eine Verbindung der oberen Hälfte durch *a* und *x* mit dem Kessel. Infolgedessen kehrt sich die Bewegung nunmehr um und das Spiel wiederholt sich stets von neuem.

Die Kolbenstange überträgt die geleistete mechanische Arbeit. Dabei wird fast stets ihre hin- und hergehende Bewegung zunächst in drehende Bewegung umgesetzt (§ 77).

Bei manchen Dampfmaschinen strömt der Dampf nicht sofort in den Kondensator, sondern erst in einen zweiten, manchmal sogar noch in einen dritten Zylinder, wobei sein Druck ständig abnimmt. Man unterscheidet dann Hochdruck- und Niederdruckzylinder. Eine solche Maschine heißt Verbund- oder Compoundmaschine.

Die Dampfturbinen haben gegenüber der Kolbendampfmaschine den Vorteil, daß sie keine hin- und hergehende, sondern sofort eine drehende Bewegung hervorrufen. Bei einer Dampfturbine strömt der Dampf gegen die sehr zahlreichen Schaufeln eines Rades (Abb. 178). Der Raum, in den der Dampf vom Rade abströmt, steht wieder mit einem Kondensator in Verbindung, so daß in ihm ein sehr niedriger Druck herrscht. So wird das Rad durch den einseitigen Druck des dagegen strömenden Dampfes (genauer: durch die bei der Änderung der Strömungsrichtung des Dampfes übertragene Bewegungsgröße) in Drehung versetzt.

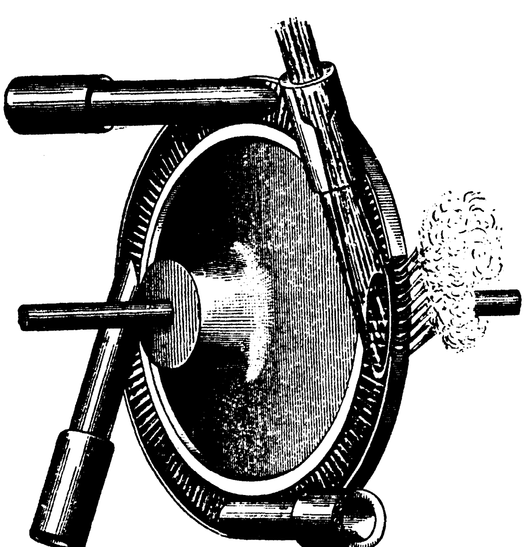


Abb. 178. Dampfturbine.

Die Rotationsgeschwindigkeit der Dampfturbinen ist eine sehr hohe. Bei der Verwendung als Schiffsmaschinen muß man zwischen Schiffswelle und Turbine eine Übersetzung einschalten, um eine langsamere Drehung der Welle zu erzielen, da die Umdrehungsgeschwindigkeit der Schiffsschraube im Wasser eine bestimmte Größe nicht überschreiten darf. Für den Antrieb von Dynamomaschinen aber ist die hohe Umdrehungszahl ein besonderer Vorteil.

Man ist bei Dampfmaschinen schon bis zu Kesseldrucken von 200 Atm. gegangen. Die Siedetemperatur des Wassers beträgt dann 265^0 C $= 538^0$ abs. Rechnet man die Temperatur des Kondensators sehr günstig zu 40^0, also 313^0 abs., so ergibt sich nach § 200, Gl. 9, als günstigster theoretischer Nutzeffekt einer Dampfmaschine $235/538 = 0{,}44 = 44\,\%$. Doch wird ein so großer Nutzeffekt tatsächlich nie erreicht. Es geht also bei einer Dampfmaschine der weitaus größte Teil der zugeführten Wärmeenergie nutzlos an den Kondensator über. Neuerdings hat man angefangen, diese Wärme (sog. Abwärme) bei größeren industriellen Betrieben für Heizungszwecke nutzbar zu machen.

Sehr viel günstiger ist der Nutzeffekt bei den Explosionsmotoren. Sie beruhen im Prinzip auf der Bewegung eines Kolbens in einem Zylinder durch die Verbrennungsgase des mit Luft gemischten, verdampften Brennstoffs, die sich infolge der bei der Explosion auftretenden großen positiven Wärmetönung (§ 203) sehr stark auszudehnen suchen. Arbeit wird nur bei

der einen Bewegungsrichtung des Kolbens geleistet, und zwar bei den Zweitaktmotoren einmal bei jedem Hin- und Hergang, bei den Viertaktmotoren einmal bei jedem zweiten Hin- und Hergang. In den dazwischenliegenden Bewegungsphasen läuft der Motor infolge der Trägheit der mit ihm verbundenen Teile, meist auch eines Schwungrades, weiter.

Die Temperaturen, zwischen denen ein Explosionsmotor arbeitet — nämlich die Temperatur der Verbrennungsgase einerseits und der Außenluft oder des bei größeren Motoren stets verwendeten Kühlwassers andererseits — liegen viel weiter auseinander als bei der Dampfmaschine. Daher ist der theoretische und der praktische Nutzeffekt dieser Motore ein viel günstigerer als der der Dampfmaschinen. Auf die Einzelheiten kann hier nicht eingegangen werden.

Indem man das Prinzip der Wärmekraftmaschinen gewissermaßen umkehrt, kommt man zu den sog. Kältemaschinen. Es sind dies Maschinen, in denen auch Wärme in Arbeit verwandelt wird, aber nicht mit der Absicht auf die Gewinnung der Arbeit, sondern auf die Abkühlung eines Körpers, auf Kosten von dessen Wärmeenergie die Arbeit gewonnen wird. Solche Maschinen dienen z. B. zur Eisgewinnung. Auch die LINDEsche Luftverflüssigungsmaschine (§ 185) ist ein Beispiel einer solchen Maschine.

203. Wärmequellen. Thermochemie. Die wichtigste Quelle thermischer Energie ist für uns die Sonne. Sie strahlt in 1 sec etwa 10^{26} cal aus. Dies entspricht einer Leistung von rund $0{,}4 \cdot 10^{24}$ Kilowatt. Hätte die Erde keine Atmosphäre, so würden bei senkrechtem Einfall der Sonnenstrahlung auf 1 cm^2 der Erdoberfläche etwa 1,94 cal/min fallen (sog. Solarkonstante, s. a. § 204). Wegen der Absorption der Sonnenstrahlung in der Atmosphäre ist der wirklich auf die Erdoberfläche gelangende Betrag an Strahlung jedoch geringer.

Technisch ist heute noch immer die Wärmeerzeugung aus Kohle am wichtigsten. Daneben gewinnt die Wärmeerzeugung auf elektrischem Wege, möglichst unter Ausnutzung der Wasserkräfte, leider durch hohe Kosten behindert, allmählich an Bedeutung. Alle diese Arten der Wärmeerzeugung gehen letzten Endes auf die Sonnenenergie zurück, denn die in den Kohlen aufgespeicherte Energie ist von den Pflanzen, aus denen die Kohle entstanden ist, aus der Sonnenstrahlung aufgenommen worden, und die Wasserkräfte verdanken ihren Ursprung ebenfalls der Sonnenstrahlung, welche diejenigen atmosphärischen Vorgänge hervorruft, die die Hebung des Wassers auf ein höheres Niveau bewirken.

Die Wärmeerzeugung durch Verbrennung von Kohle ist nur ein Beispiel für viele andere chemische Vorgänge, bei denen Wärme frei wird. Man unterscheidet endotherme und exotherme chemische Vorgänge. Ein endothermer Prozeß ist ein solcher, der nur vor sich geht, wenn den beteiligten Substanzen von außen Wärme zugeführt wird, also nur unter Aufnahme von Wärme. Bei den exothermen Prozessen dagegen wird nach außen hin Wärme abgegeben. Hierher gehören die gewöhnlichen Verbrennungen mit dem Sauerstoff der Luft.

Ob ein Vorgang endotherm oder exotherm verläuft, richtet sich danach, ob in den Molekülen, welche bei dem chemischen Prozeß neu gebildet werden, die innere Energie größer (endotherme Prozesse) oder kleiner (exotherme Prozesse) ist als vorher in den Molekülen, aus denen sie entstanden.

Man kann den thermischen Effekt bei einem chemischen Prozeß in Gleichungsform darstellen, z. B. bedeutet die Gleichung

$$S + O_2 \rightarrow SO_2 + 71\,800\ \text{cal},$$

daß bei der chemischen Verbindung von 1 Grammatom Schwefel mit 2 Grammatomen (1 Mol) Sauerstoffgas zu Schwefeldioxyd 71800 cal frei werden. Diese

Wärmemenge heißt die **Wärmetönung** des betreffenden chemischen Prozesses. Sie ist bei exothermen Prozessen positiv, bei endothermen negativ und unabhängig von dem Wege, auf dem eine chemische Verbindung aus ihren Bestandteilen zustande kommt. So ist z. B.

$$C + O \rightarrow CO + 29000 \text{ cal},$$
$$CO + O \rightarrow CO_2 + 68000 \text{ cal},$$
$$C + 2O \rightarrow CO_2 + 97000 \text{ cal}.$$

Man sieht, daß man die letzte Gleichung auch durch Addition der beiden ersten erhalten kann. Es ist also, wie das auch das Energieprinzip (1. Hauptsatz) verlangt, energetisch gleichgültig, ob man zunächst aus Kohlenstoff und Sauerstoff Kohlenoxyd und dann aus diesem und Sauerstoff Kohlensäure herstellt oder gleich aus Kohlenstoff und Sauerstoff Kohlensäure.

Alle von selbst ablaufenden chemischen Umwandlungen sind irreversibel, denn sie verlaufen stets in dem Sinne, daß die Entropie der beteiligten Substanzen zunimmt. Die drei Hauptsätze der Wärmetheorie bilden die wichtigsten Grundlagen der theoretischen Chemie.

20. Kapitel.

Physik der Atmosphäre[1]).

204. Allgemeine Eigenschaften der Atmosphäre. In der Spezialwissenschaft, die sich mit der Physik der Atmosphäre beschäftigt und die seit alters die wenig passende Bezeichnung Meteorologie führt, geht man in neuerer Zeit mehr und mehr dazu über, die bisher in mm Hg gemachten Luftdruckangaben durch absolute Druckwerte zu ersetzen. Man bezeichnet in der Meteorologie 10^6 dyn/cm² als 1 Bar (vgl. dazu § 103), und man hat $^1/_{1000}$ Bar = 1 Millibar (mb) als neue Luftdruckeinheit eingeführt. Da 1 Bar dem Druck einer Quecksilbersäule von fast genau 750 mm Länge (bei 0° und der Normalschwere unter 45° geographischer Breite) entspricht, so ergeben sich die einfachen Umrechnungsformeln 1 mb = 0,75 mm Hg oder 1 mm Hg = 1,333 mb. Begriff und Messung des Luftdrucks sind im übrigen in § 103 und 105 bereits ausführlich behandelt. Auch das Gesetz der Luftdruckabnahme mit der Höhe ist bereits in § 102 (Gl. 15) abgeleitet worden. Über die Höhe, bis zu der man von dem Vorhandensein einer Atmosphäre sprechen muß, geben uns Dämmerungserscheinungen, Nordlichter, Sternschnuppen und Meteore Auskunft, für deren Auftreten Gase in noch wirksamer Dichte Vorbedingung sind. Die Höhenmessungen dieser Erscheinungen reichen bis zu 300—500 km.

In Bodennähe besteht die atmosphärische Luft aus einem Gasgemenge, welches sich aus 78 Volumprozenten Stickstoff, 21 % Sauerstoff und einem Rest anderer Gase zusammensetzt. Aus den Analysen haben sich folgende genauere Zahlen für die Beteiligung der einzelnen Gase ergeben:

Stickstoff . .	78.03 %	Wasserstoff .	0.01 %
Sauerstoff . .	20.99 %	Neon	0.0015 %
Argon	0.94 %	Helium . . .	0.00015 %
Kohlensäure	0.03 %		

Hierzu tritt noch Wasserdampf, der aber im Gegensatz zu den vorgenannten Bestandteilen in stets wechselnder Menge gefunden wird, so daß ihm eine Sonder-

[1]) Bearbeitet von W. König, Berlin.

stellung zukommt. Seine Beimengung zur Luft, die sog. Luftfeuchtigkeit und deren Verhalten, erfordert deshalb gesonderte Betrachtung (§ 206).

Auf theoretischem Wege, nämlich mit der Annahme, daß der Partialdruck jedes Gases für alle Höhen nach Gl. 15 (§ 102) zu berechnen wäre, versuchte man früher der Frage nach der Zusammensetzung der Atmosphäre in der Höhe beizukommen. Danach würden unter Berücksichtigung des Molekulargewichtes der einzelnen Bestandteile der Atmosphäre oberhalb 80 km die schweren Gase praktisch verschwunden sein, und in genügend großer Höhe würde das leichteste Gas die Alleinherrschaft haben, wie klein auch sein Anteil an dem Gasgemisch der untersten Schichten sein mag. Solche Betrachtungen würden indessen nur für eine Atmosphäre Gültigkeit haben können, die sich in vollkommener Ruhe befindet. Demgegenüber haben die neueren Untersuchungen des Nordlichtspektrums noch für die Höhe der Polarlichter das Vorhandensein von Stickstoff und Sauerstoff nachgewiesen. Also sind Mischvorgänge bis in diese großen Höhen hinauf wirksam. In hohen Schichten der Atmosphäre muß ferner ein verhältnismäßig starker Ozongehalt vorhanden sein, da der ultraviolette Anteil der Sonnenstrahlung die Bildung von Ozon (O_3) aus dem gewöhnlichen Sauerstoff (O_2) bewirkt. Die ultraviolette Sonnenstrahlung wird dabei zum größten Teil in den oberen Atmosphärenschichten absorbiert (§ 469).

Außerordentlich wichtig ist auch sonst das Verhalten der Atmosphäre gegenüber der Sonnenstrahlung. Von der an der gedachten Grenze der Atmosphäre ankommenden Wärmestrahlung[1]) wird nur ein kleiner Bruchteil (etwa 20%) von der Atmosphäre direkt absorbiert, und zwar sind es, außer dem erwähnten ultravioletten Anteil, hauptsächlich die langwelligen Strahlengattungen, die vom Wasserdampf- und Kohlensäuregehalt der Atmosphäre aufgenommen werden. Dagegen werden etwa 40% der ankommenden Strahlung durch Reflexion an Wolken oder durch diffuse Zerstreuung (§ 448) in den Weltraum zurückgeworfen, gehen also der Erde und ihrer Atmosphäre ganz verloren, während die restlichen, hauptsächlich aus kurzwelliger Strahlung bestehenden 40% entweder direkt oder diffus zerstreut zur Erdoberfläche gelangen, ohne zunächst die Temperatur der Luft zu beeinflussen. Trotzdem spielt dieser Betrag, der also doppelt so hoch ist, wie die von der Lufthülle direkt absorbierte Wärmemenge, die Hauptrolle im Wärmehaushalt der Atmosphäre. Er dient nämlich zur Temperaturerhöhung der Erdoberfläche und kommt dann mittelbar der Luft doch noch zu gute, und zwar entweder in langwellige Strahlung umgewandelt, die, von der Erdoberfläche ausgehend, in der Luft absorbiert werden kann, oder auf die unten beschriebene Art und Weise.

205. **Die Lufttemperatur.** Zwischen der Temperaturverteilung, wie sie sich aus den astronomischen Grundlagen der Bestrahlung durch die Sonne errechnet, und den wirklichen Verhältnissen auf der Erde, bestehen recht große Unterschiede. Nur in groben Zügen ist noch die allgemeine Temperaturabnahme vom Äquator zu den Polen hin festzustellen. Die vermittelnde Rolle der Erdoberfläche, von der eben die Rede war, bringt es mit sich, daß sich die Lufttemperatur der untersten Höhenkilometer stark der Temperatur der Unterlage anpaßt. Da nun festes Land große Temperaturgegensätze zwischen Tag und Nacht, noch größere zwischen Sommer und Winter aufweist, so macht die Lufttemperatur diese Schwankungen über Land in etwas vermindertem Maße mit, über großen Wasserflächen halten sich demgegenüber die Temperaturänderungen in sehr engen Grenzen. So übt die Verteilung von Land und Wasser auf der Erdoberfläche

[1]) Vgl. § 203. Die Solarkonstante ist, wie neuerdings festgestellt worden ist, nicht streng konstant, sondern unterliegt kleinen Schwankungen.

stärksten Einfluß auf die horizontale Verteilung der Lufttemperaturen aus. Der zweite wichtige Faktor, welcher modifizierend auf diese Verteilung einwirkt, ist die ständige Bewegung der Luftmassen, durch welche Temperatureinflüsse über weite Strecken der Erde hin übertragen werden. Die Gesamtwirkung des allgemeinen Luftkreislaufs äußert sich in einer starken Abschwächung der Temperaturunterschiede auf der Erde, wie sie nach den Strahlungsverhältnissen allein auftreten müßten.

Allgemein bekannt ist die Abnahme der Lufttemperatur nach oben hin, doch lehren die Beobachtungen aus der freien Atmosphäre, die mit Hilfe von Ballons gewonnen werden, daß diese Temperaturabnahme nach oben örtlich und zeitlich stark wechselt und sich mit den nahe der Erdoberfläche meist auftretenden Werten nicht durch die ganze Atmosphäre hindurch fortsetzt, wie man früher annahm. Vielmehr ist im Temperaturaufbau der Atmosphäre eine wichtige Schichtgrenze vorhanden ist, welche den unteren, etwa 9—16 (in Europa rund 10) km mächtigen Teil mit Temperaturabnahme nach oben (Troposphäre genannt) deutlich von den darüberliegenden Schichten (Stratosphäre) trennt, in denen mit wachsender Höhe keine wesentliche Temperaturänderung mehr gefunden wird. Man erklärt diese Tatsache so, daß die Temperatur der Stratosphäre nur noch durch den Strahlungshaushalt der Atmosphäre bestimmt wird. Die Temperaturen entsprechen dort der aus einem Gleichgewicht zwischen Aufnahme und Abgabe der Strahlungsenergie zu errechnenden Verteilung. Anders in der Troposphäre. Hier würde das Strahlungsgleichgewicht eine im Schwerefeld der Erde unmögliche Temperaturanordnung bedingen, nämlich eine anfangs sehr rasche Temperaturabnahme mit der Höhe und damit eine instabile Schichtung, die sich nicht zu halten vermag. In Wirklichkeit beobachtet man in den ersten 3 km über dem Boden durchschnittlich nur $0{,}5^0$ Temperaturabnahme auf 100 m Erhebung, darüber bis zur Stratosphärengrenze etwas mehr. Für diese Werte geben andere Faktoren den Ausschlag. Alle Vertikalbewegungen der Atmosphäre wirken sich infolge der adiabatischen Temperaturänderungen (§ 172), die den Druckänderungen bei vertikaler Bewegung entsprechen, im Sinne einer Temperaturabnahme nach oben aus. Die außerordentlich wichtige und allgemeine Bedeutung dieser Tatsache erhellt daraus, daß auch alle horizontalen Bewegungen der Luft — und solche fehlen fast nie — mit vertikalen Versetzungen von Luftteilchen verknüpft sind. Auch die Einflüsse der Erdoberfläche sind keineswegs auf die Strahlung beschränkt. Eine ganz dünne Luftschicht, die der Erdoberfläche aufliegt, erfährt Temperaturänderungen durch Wärmeleitung. Im Falle der Abkühlung bleiben dann die durch Temperaturerniedrigung dichter und schwerer gewordenen Luftmassen am Boden liegen, anders aber im Falle der Erwärmung. Da die erwärmten Luftteilchen spezifisch leichter werden, steigen sie empor und räumen ihren Platz anderen zum Ersatz herabsinkenden Luftmassen ein. Diese Konvektionsströme (§ 197) führen trotz der adiabatischen Abkühlung der Luft beim Aufsteigen die von der Unterlage aufgenommene Wärme rasch in beträchtliche Höhen, in unseren Breiten an heiteren Sommertagen bis etwa 1 km, in den Tropen bis etwa 4 km hinauf. Die vorher angegebenen Zahlenwerte für die Temperaturabnahme in der Troposphäre sind noch von dem Feuchtigkeitsgehalt der Luft mit beeinflußt, sie gelten außerdem nur im Durchschnitt. Die von Fall zu Fall wechselnde Temperaturabnahme mit der Höhe gewinnt für die Bewegungsvorgänge in der Luft und damit für das Wetter eine ausschlaggebende Bedeutung.

206. Luftfeuchtigkeit. Kondensationserscheinungen. Die in der Luft enthaltene Wasserdampfmenge können wir durch ihren Partialdrnck in mm Hg angeben; die Sättigungsdrucke des Wasserdampfes in ihrer Abhängigkeit von der

Temperatur wurden in Tab. 14a (§ 180) mitgeteilt. Nur selten herrscht jedoch in den unteren Luftschichten Sättigung, und der Unterschied zwischen der jeweils vorhandenen Wasserdampfmenge und dem zur herrschenden Temperatur gehörigen Sättigungswert spielt eine so große Rolle, daß man zu seiner Kennzeichnung besondere Begriffe eingeführt hat. Die relative Feuchtigkeit gibt das Verhältnis des vorhandenen Dampfdrucks zu dem der herrschenden Temperatur entsprechenden Sättigungsdruck in Prozenten an; das Sättigungsdefizit bezeichnet die Differenz der beiden Drucke. Beispiel: Beobachteter Dampfdruck 13,2 mm, Lufttemperatur 20° C, relative Feuchtigkeit 75%, Sättigungsdefizit 4,3 mm (Sättigungsdruck bei 20° 17,5 mm).

Wird die Temperatur der feuchten Luft erniedrigt, so wird das Sättigungsdefizit geringer, und bei konstantem Dampfdruck steigt die relative Feuchtigkeit. Die Temperatur, bei welcher der herrschende Dampfdruck dem Sättigungsdruck gleich wird, nennt man Taupunkt. Sinkt die Temperatur unter diesen, so kommt der über den Sättigungsdruck überschießende Wasserdampf zur Kondensation.

Zur Messung der Luftfeuchtigkeit stehen mehrere Methoden zur Verfügung. Man kann einem bestimmten Luftvolumen durch Trockensubstanzen den Wasserdampf entziehen und dessen Menge durch Wägungen absolut bestimmen, ein umständliches Verfahren, welches nur zur Kontrolle der indirekten Methoden verwendet wird. Ferner kann man bei künstlicher Abkühlung blank polierter Oberflächen gut den Anfang des Beschlagens, durch gleichzeitige Temperaturbestimmung also den Taupunkt der umgebenden Luft feststellen, der den herrschenden Dampfdruck ergibt. Im sog. Hygrometer verwendet man zur Messung der Luftfeuchtigkeit Haare, welche die Eigenschaft haben, bei wechselnder Feuchtigkeit ihre Länge zu verändern. Diese Instrumente müssen bei bekannten Feuchtigkeitswerten geeicht werden und gestatten dann, an einer Teilung die relative Feuchtigkeit direkt abzulesen. Sie bedürfen indessen häufiger Kontrolle und Neujustierung, sind deshalb wenig geeignet für solche Zwecke, bei denen ein stets gebrauchsfertiges Instrument benötigt wird. Ein solches steht dagegen im Psychrometer zur Verfügung. Bei diesem wird der Wärmeverbrauch bei der Verdampfung des Wassers zur Bestimmung der Feuchtigkeit ausgenutzt. Von zwei gleichen Thermometern ist das Gefäß des einen mit einer dünnen Stoffhülle überzogen, die mit Wasser getränkt wird. Ist die Luft nicht mit Feuchtigkeit gesättigt, so findet von der feuchten Hülle Verdunstung statt, und ein Teil der Verdampfungswärme (§ 179) wird dem Thermometergefäß entzogen, so daß das sog. „feuchte Thermometer" seinen Stand erniedrigt. An dem anderen, dem sog. „trockenen Thermometer" wird gleichzeitig die Lufttemperatur abgelesen. Da die Verdampfungsgeschwindigkeit und damit der Wärmeverbrauch von dem Sättigungsdefizit abhängt, so kann aus dem Unterschied der beiden Thermometerangaben ein Schluß auf die Luftfeuchtigkeit gezogen werden. Zum praktischen Gebrauch hat man Tafeln entworfen, aus denen man sofort für jede Differenz in den Angaben beider Thermometer die relative Feuchtigkeit wie auch den herrschenden Dampfdruck entnehmen kann. Beim Assmannschen Aspirations-Psychrometer wird durch einen Ventilator ein gleichmäßiger Luftstrom an den Thermometergefäßen vorbeigeführt, um den störenden Einfluß wechselnder Windgeschwindigkeit bei dem Verdampfungsvorgang auszuschalten.

Von der räumlichen Verteilung des Dampfdruckes sei hier nur erwähnt, daß er mit der Höhe rasch abnimmt und schon in 8000 m auf rund 1% seines Bodenwertes gesunken ist, so daß sich darüber praktisch genommen kein Wasserdampf mehr vorfindet. Ganz unregelmäßig erweist sich die Anordnung der relativen

Feuchtigkeit, an deren Verhalten die Entstehung der Kondensationsprodukte geknüpft ist.

Erniedrigt sich die Temperatur der Erdoberfläche unter den Taupunkt der auflagernden Luft, so kommt es je nach der herrschenden Temperatur zu Tau- oder Reifbildungen. Abkühlung bodennaher Luftschichten unter den Taupunkt erzeugt Nebel. Bei unseren Herbstnebeln ist die Abkühlung der Luft meist auf Ausstrahlung zurückzuführen; die meisten Seenebel verdanken ihre Entstehung dem Umstand, daß kalte Luft über warmes Meerwasser streicht.

Die Wolken sind die sichtbaren Kondensationsprodukte höherer Luftschichten. Ihr Schweben erklärt sich leicht aus dem geringen Gewicht der Wolkenteilchen, welche infolge der Luftreibung nur minimale Fallgeschwindigkeit erreichen können (§ 116). Die Mehrzahl der Wolken besteht aus Wassertröpfchen; auch bei Temperaturen bis weit unter den Gefrierpunkt handelt es sich häufig um unterkühlte Tröpfchen flüssigen Wassers (§ 174). Da der Sättigungsdruck über stark konvex gekrümmten Oberflächen größer ist, als über ebenen Wasserflächen, bedarf es zur Bildung der Kondensationströpfchen einer Übersättigung nach der gewöhnlichen Definition, die sich auf die Verhältnisse über ausgedehnten Wasserflächen bezieht. Der Beginn der Kondensation vollzieht sich in der freien Atmosphäre an Kondensationskernen, die aus Staub-, über den Ozeanen aus Salzteilchen bestehen können, vor allem aber auch aus Spuren nitroser Gase (hauptsächlich NO_2), welche so stark hygroskopisch sind, daß sie schon vor der Sättigung Wasserdampfmoleküle an sich ziehen und mit ihnen eine wäßrige Lösung bilden. Die höchsten Wolken von faserigem Aussehen bestehen immer aus Eiskristallen, die sich durch Sublimation (§ 183) bilden.

Da der Sättigungsdruck über Eis etwas niedriger als über unterkühltem Wasser von gleicher Temperatur ist[1]), sind in der freien Atmosphäre mehrere Zustände von Sättigung oder Übersättigung zu unterscheiden. Ist geringe Übersättigung in bezug auf Eis vorhanden, bilden sich Wolken, die aus Vollkristallen bestehen. Bei etwas stärkerer Übersättigung entstehen Kristallskelette, indem die Ecken der Kristalle ausschießen; das sind die Anfänge der Schneesterne. Steigt die Übersättigung in bezug auf Eis noch weiter, so bilden sich sog. Sphärokristalle, die Urformen der Graupeln. Tritt nun noch Übersättigung in bezug auf Wasser hinzu, so daß auch Tröpfchen kondensieren, so lagern sich letztere den Graupelkörnern an, erstarren und vergrößern die Graupeln. Der Hagel hat ein Graupelkorn zum Kern, das von klaren, glasigen Eisschalen umgeben ist. Letztere verdanken ihre Entstehung einer lebhaften Kondensation auf der Oberfläche des Eiskügelchens, die dann einsetzen muß, wenn das kalte Graupelkorn in warme Luftschichten gerät und dabei starke Übersättigung in seiner Umgebung schafft. Gefrieren der wäßrigen Hülle tritt ein, wenn das Hagelteilchen wieder in kalte Schichten gerät, was bei den einen Hagelfall begleitenden lebhaften Vertikalbewegungen leicht möglich ist. Beim großtropfigen Regen ist es zu einer Vereinigung von kleineren Kondensationströpfchen gekommen, die dann so schwer geworden sind, daß sie durch ihr Gewicht zur Erde gezogen werden.

Zu fast allen Niederschlägen bedarf es starker Kondensation und damit beträchtlicher Abkühlung der Luft. Diese wird bei der Mehrzahl der Nieder-

[1]) Sättigungsdruck des Wasserdampfes bei Temperaturen unter 0^0 über unterkühltem Wasser und über Eis:

	Wasser	Eis
0^0	4,58	4,58 mm
-10^0	2,16	1,95 „
-20^0	0,96	0,77 „

schläge adiabatisch, nämlich durch die beim Emporsteigen der Luft erfolgende Expansion wegen der damit verbundenen Druckerniedrigung verursacht.

207. Bewegungen der Luft. Der gewöhnliche Wind, die horizontale Luftbewegung, sucht die im gleichen Niveau entstandenen Luftdruckunterschiede auszugleichen. Seine Stärke ist deshalb im stationären Zustand und bei Vernachlässigung der Reibung dem Luftdruckgefälle proportional. Wie alle Bewegungen auf der Erde unterliegen nun die bewegten Luftmassen den Coriolis-Kräften der Erdrotation (§ 49), so daß ihre Bahn über die Erdoberfläche nicht in Richtung des stärksten Druckgefälles, sondern auf der Nordhalbkugel mit einer Abweichung nach rechts, auf der Südhalbkugel mit einer solchen nach links verläuft. In höheren Luftschichten, wo fast keine Reibung mehr stattfindet, ist diese Beeinflussung so groß, daß der Ablenkungswinkel 90^0 erreicht, daß also die Bewegung der Luft senkrecht zur Richtung des steilsten Gefälles, mithin in Richtung der Linien gleichen Drucks (Isobaren) vor sich geht. Dadurch wird die Erhaltung von Luftdruckunterschieden sehr begünstigt.

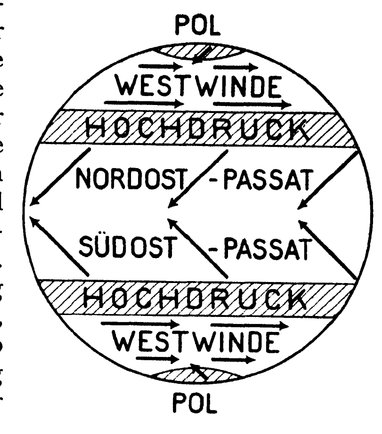


Abb. 179.
Schema des allgemeinen Luftkreislaufs.

Die am Boden des Luftmeeres zu beobachtenden Luftdruckunterschiede sind zum großen Teil auf Temperaturunterschiede in der Atmosphäre zurückzuführen. Temperaturerhöhung an einer Stelle der Erde dehnt die Luftsäule dort nach oben hin aus, erhöht dabei in einem bestimmten oberen Niveau den Druck durch die Hebung von Luft über dieses Niveau, so daß nun Abfluß nach der Seite stattfinden muß. Am Boden des Luftmeeres macht sich diese Massenverlagerung im Sinken des Drucks an der erwärmten Stelle und in Drucksteigerung in der Gegend des oberen Zuflusses bemerkbar, was wiederum Luftversetzungen auch in den unteren Schichten zur Folge hat.

Treten keine Störungen hinzu, so entwickelt sich eine geschlossene Zirkulation in dem eben geschilderten Sinne. Wir können eine solche bei den zwischen Tag und Nacht wechselnden Land- und Seewinden, die an der Erdoberfläche tagsüber Luft in das erwärmte Land hinein, nachts von dem abgekühlten Land seewärts führen und in der Höhe von Gegenströmungen begleitet sind, beobachten. Die Monsune sind in gleicher Weise jahreszeitlich wechselnde Land- und Seewinde. Bis zu einem gewissen Grade wird auch der allgemeine Kreislauf der Luftmassen auf der Erde von diesem Zirkulationsschema beherrscht. In den Passaten (Abb. 179) sehen wir den durch die Erdrotation abgelenkten unteren Zustrom von Luft in die wärmsten äquatornahen Gegenden der Erde, dort kommt die Luft zum Aufsteigen, um in der Höhe in den Gegenpassaten wieder polwärts abzufließen. Allerdings erstreckt sich die Zirkulation nun nicht bis zu den Polen, sondern findet bereits in etwa 30^0 Breite (Roßbreiten) ihr Ende, da aus den Gegenpassaten hier durch die ablenkende Kraft der Erdrotation schon fast reine Westwinde geworden sind, die auf den Abfluß vom Äquator her stauend wirken und Hochdruckgürtel erzeugen. Von diesen Hochdruckgebieten werden außer den Passaten auch die Westwinde der unteren Schichten in den gemäßigten Breiten gespeist. Erst an den Polen, den Kältezentren, entstehen wieder kleinere Hochdruckgebiete, von denen kalte Luft, sich nach der Seite hin ausbreitend, abfließt. Diese schematische Anordnung der Druckverteilung und der großen Strömungen des allgemeinen Luftkreislaufes erleidet zwar durch die unregelmäßige

Verteilung von Land und Meer auf der Erdoberfläche sowie durch störende Einflüsse, die mit der Zeit wechseln können, die mannigfachsten Abänderungen, läßt sich aber trotzdem fast stets noch bis zu einem gewissen Grade als Grundform erkennen.

Von ausschlaggebender Bedeutung für die Witterungsvorgänge sind die Vertikalbewegungen in der Atmosphäre, da ja die Expansion aufsteigender Luft zur Kondensation führt, die adiabatische Erwärmung herabsteigender Luft dagegen zur Austrocknung. Der Regenreichtum an den dem Winde zugekehrten Luvseiten der Gebirge, die Regenarmut ihrer vom Winde abgekehrten Leeseiten zeigt uns deutlich diese Folgeerscheinungen. In besonderen Fällen wird das Herabsinken der Luft vom Gebirge durch Fallwinde noch stärker bemerkbar, die den Namen Föhn tragen und die adiabatische Zustandsänderung durch die Wärme und Trockenheit der unten ankommenden Luft erkennen lassen.

Die wichtigsten vertikalen Bewegungen in der freien Atmosphäre sind folgende: Luftmassen kleineren Umfangs, die einen beträchtlichen Temperaturüberschuß über ihre Umgebung aufweisen, erlangen einen Auftrieb und strudeln empor, die einzelnen Haufenwolken sind sichtbare Zeugen solchen Aufquellens der Luft. Der Aufstieg geht so weit, bis durch Expansion die Temperatur der aufsteigenden Luft der der Umgebung gleich geworden ist. Das vertikale Temperaturgefälle in der Umgebung längs der Aufstiegstrecke bestimmt auch die Geschwindigkeit des Emporsteigens. Vertikalbewegungen ausgedehnter Luftmassen finden an Grenzflächen der Atmosphäre statt, die häufig zwei Luftkörper verschiedener Dichte sprunghaft voneinander trennen. Solche Grenzflächen entstehen, wenn zwei Luftkörper verschiedener Herkunft, die ihre Eigenschaften nur langsam geändert haben, infolge der Strömungsverhältnisse aneinander geführt werden. Da diese Grenzflächen der Regel nach schräg liegen, verschieben sich die Massen der leichteren Luft an denen der schwereren ähnlich wie an Gebirgsabhängen.

Fast alle Bewegungen der Luft vollziehen sich in turbulenter Strömungsform. Zum Teil erzwingen Unebenheiten der Erdoberfläche diese ungeordnete Bewegung, daneben sorgt auch die vertikale Anordnung der Temperaturen häufig dafür, daß sich den horizontalen Luftversetzungen auf- und absteigende Bewegungen beigesellen. Je größer das Temperaturgefälle nach oben hin, desto lebhafter werden letztere und damit die turbulente Durchmischung.

208. **Das Wetter.** In manchen Gegenden der Erde, so in den Passatzonen, gibt es fast keine Änderung des Wetters, in anderen, z. B. in den Monsungebieten, wechselt die Witterung nur jahreszeitlich, bei uns in den gemäßigten Zonen dagegen sehr häufig und unregelmäßig. Man ist erst durch Einführung der sog. synoptischen Arbeitsmethode, d. h. durch die Darstellung gleichzeitiger Vorgänge über größeren Gebieten der Erde auf Wetterkarten, zu einem besseren Verständnis unserer Wettervorgänge gekommen. Auf den Wetterkarten (vgl. das Beispiel Abb. 180) wird außer den Witterungszuständen der einzelnen Beobachtungsstellen vor allem die Luftdruckverteilung durch Isobaren (Kurven gleichen Druckes) zur Anschauung gebracht, und man findet auf Wetterkarten aufeinanderfolgender Tage in der Regel eine Verschiebung der Witterungsvorgänge mit den Gebieten tiefen und hohen Luftdruckes. In den gemäßigten Zonen geht diese Wanderung fast stets dem allgemeinen Luftkreislauf entsprechend von Westen nach Osten vor sich, nicht selten unter wellenartigen Änderungen des Luftdrucks, indem Hoch- und Tiefdruckgebiete einander ablösen.

Der Luftdruck ist indessen nicht bestimmend für das Wetter, die Beschriftung der Barometer mit Wetterangaben daher irreführend, vielmehr sind die Druckänderungen meist nur Begleiterscheinungen anderer Vorgänge, deren Wesen es zu erforschen gilt. Man kann häufig wesentlich tiefer in das Verständnis der

Dinge eindringen, wenn man die Luftströmungen und damit die Massenversetzungen in der Atmosphäre betrachtet. Die großen Luftströme bringen nämlich die Eigenschaften der Luft, Temperatur, Feuchtigkeitsverhältnisse, mehr oder weniger starken Staubgehalt u. a. aus den Gebieten ihrer Herkunftsstätten mit und verpflanzen somit Wettereigentümlichkeiten in andere Gegenden. Besondere Wetter-

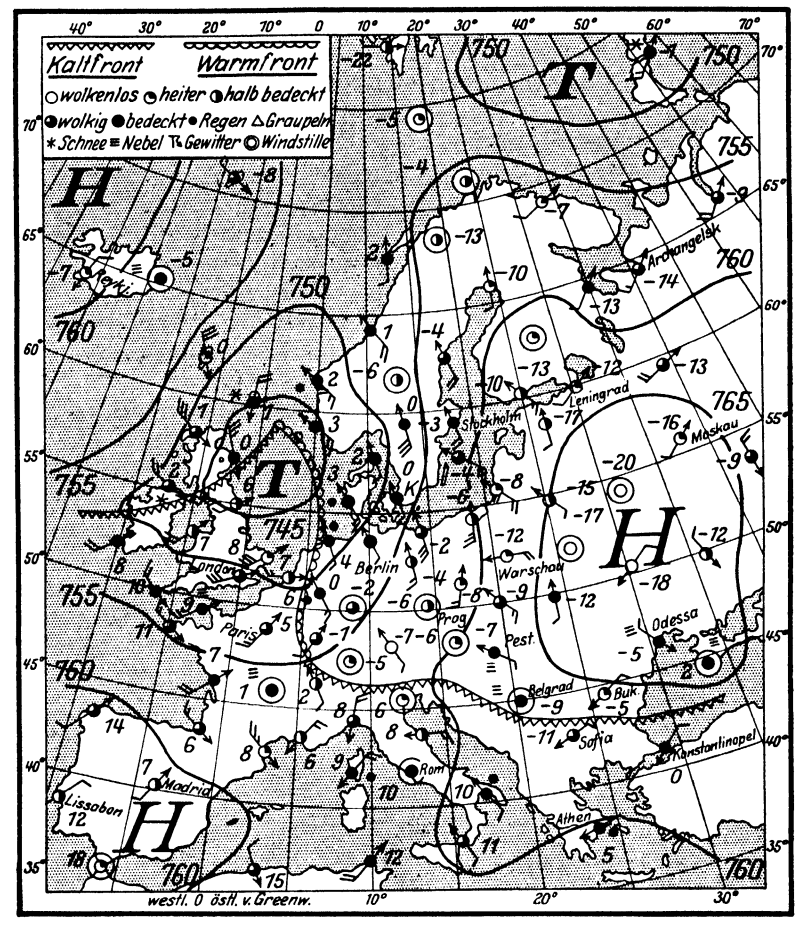


Abb. 180. Beispiel einer winterlichen Wetterkarte.

DieWetterkarten der üblichen Form veranschaulichen durch Isobaren für das Meeresniveau die Luftdruckverteilung eines bestimmten Zeitpunktes. Auf dem hier wiedergegebenen Beispiel ist ein gut entwickeltes Tiefdruckgebiet (auch Zyklone genannt) über Westeuropa, ein deutliches Hochdruckgebiet über Osteuropa zu erkennen. Die Winde an den einzelnen telegraphisch meldenden Beobachtungsstellen sind durch Pfeile dargestellt, deren Befiederung die Windstärke ablesen läßt, die Lufttemperaturen sind in Zahlen neben den Stationskreisen vermerkt. Eine durch den Kern der Zyklone *T* verlaufende gezackte Linie gibt die Grenze zwischen Luftkörpern verschiedener Herkunft und Temperatur an. Im Tiefdruckgebiet dringt die warme Luft im sog. warmen Sektor mit spitzwinkliger Begrenzung in die kalte Luftmasse hinein vor. Diese Anordnung der Temperatur in Verbindung mit den Strömungsverhältnissen ergibt wichtige Schlußfolgerungen über den vertikalen Aufbau der Atmosphäre im Tiefdruckgebiet, über Einzelheiten der Witterung an den Grenzflächen der Luftkörper und über das Verhalten der gesamten Zyklone.

vorgänge aber kommen da zur Entwicklung, wo Luftströme verschiedener Eigenschaft und Herkunft miteinander in Berührung treten. Es ist oben schon erwähnt worden, daß sie sich dann nicht einfach vermischen, sondern aneinander längs Grenzflächen verschieben. Strömt nun warme Luft gegen kältere an, so gleitet sie vermöge ihrer geringeren Dichte an der schrägliegenden Grenzfläche der kalten Luft empor. Ähnlich wie beim Aufsteigen an einem Gebirge treten dabei Kon-

densationserscheinungen, Wolken und Niederschläge auf, in diesem Falle Schichtwolken und länger anhaltende gleichmäßige Niederschläge, die durch die darunterliegende kalte Luft hindurch zum Boden fallen. Dringt dagegen kalte Luft gegen warme vor, so drängt sie sich kraft ihrer größeren Dichte keilförmig unter die warme, preßt letztere empor, so daß ebenfalls Wolken und Niederschläge entstehen, diesmal aber infolge des ungestümeren Vordringens der Kaltluft hochgetürmte, geballte Wolkenmassen und kürzere, dafür aber auch stärkere Niederschläge. Außerdem führt der Kaltlufteinbruch eine böenartige Verstärkung des Windes herbei. Man nennt die Schnittlinien der Grenzfläche zwischen zwei Luftkörpern mit dem Erdboden, im Falle vordringender Kaltluft also deren vordersten Rand, eine Kaltfront, im Falle vordringender warmer Luft also die Linie, von der aus das Emporgleiten der warmen Luft über die kältere beginnt, eine Warmfront.

In den Tiefdruckgebieten werden häufig Luftkörper verschiedener Herkunft aneinandergeführt, wobei sich Bilder ähnlich dem unseres Wetterkartenbeispiels ergeben, welches beide Arten von Fronten aufweist. Das gewöhnliche Schicksal der in die Tiefdruckgebiete hineingeführten Warmluftmassen ist ihre schließliche Verdrängung durch kältere Luft nach oben, wobei sich dann ihr Vorhandensein in der Höhe noch durch das Anhalten ihrer Kondensation und dementsprechend durch Schlechtwettergebiete bemerkbar macht. Der bei uns vorherrschende veränderliche Wettercharakter verdankt seine Entstehung dem sich ständig wiederholenden Zusammentreffen kalter und warmer Luftkörper, die aus verschiedenen geographischen Breiten in die meist mit dem großen Weststrom schwimmenden Tiefdruckgebiete hineingezogen werden, um mit ihm ostwärts zu triften.

In der Mehrzahl der Fälle gelingt es, aus einer sorgsamen Analyse der Wetterlage und unter Zuhilfenahme von Erfahrungsregeln die Weiterentwicklung der eingeleiteten Witterungsvorgänge richtig abzuschätzen und so eine wissenschaftlich begründete Wettervorhersage aufzustellen. Doch gestattet diese Methode wegen des häufigen Hinzutretens neuer Erscheinungen im allgemeinen nur eine Voraussicht auf kurze Zeit, deren Dauer sich selten über einen Tag hinaus erstrecken kann.

Länger anhaltende Wettereigentümlichkeiten, wie trockene Sommer, kalte Winter u. dgl. gehen immer mit merkbaren Abweichungen des allgemeinen Luftkreislaufs vom normalen Verhalten einher, die sich am deutlichsten in den großen Zügen der Luftdruckverteilung widerspiegeln. Man spricht dann von einer Änderung der Großwetterlage, die Ursachen der mannigfaltigsten Art haben kann. Durch Änderungen in der zugestrahlten Sonnenenergie, durch anormale Temperatur und Erstreckung von Meeresströmungen, durch Wechsel in Schneebedeckung und Bodenfeuchtigkeitsgehalt der Festländer, durch die Eisverhältnisse in den Polargebieten, aber auch durch alle anderen Faktoren, die Einfluß auf die Temperatur- und Feuchtigkeitsverhältnisse gewinnen, können Störungen des allgemeinen Luftkreislaufs hervorgerufen werden, ohne daß man im Einzelfall schon in der Lage ist, die wahre Ursache anzugeben. Eine wissenschaftliche Vorhersage des Witterungscharakters ganzer Jahreszeiten ist deshalb heute noch ganz unmöglich.

Das ständige Ineinandergreifen aller Elemente, die Auswirkung jeder Einzelursache auf alle im Bereich der Möglichkeit liegenden Erscheinungen und deren Übertragung auf entfernte Gebiete der Erde macht die Witterungsgeschehnisse zu ungeheuer verwickelten physikalischen Vorgängen, denen leider experimentell fast gar nicht, mit theoretischen Berechnungen nur unter besonders vereinfachten Annahmen beizukommen ist. Aus diesen Gründen ist die Wetterforschung ein außerordentlich schwieriges Gebiet der angewandten Physik.

VI. Elektrizität und Magnetismus.

21. Kapitel.

Elektrostatik.

Die Elektrostatik ist die Lehre von den zwischen ruhenden elektrischen Ladungen wirkenden Kräften und von den durch diese Kräfte bedingten Gleichgewichtszuständen.

Zur Elektrizitätserzeugung bedienen wir uns der Bequemlichkeit halber in den in diesem Kapitel zu besprechenden Versuchen des bekannten Reibungsverfahrens, von dem in § 262 genauer die Rede sein wird.

209. **Elektrostatischer Grundversuch. Positive und negative Elektrizität.** An einem gut trockenen Seidenfaden sei ein leichter Körper (Papierzylinder, Holundermarkkugel od. dgl.) aufgehängt (Abb. 181). Eine Stange aus Hartgummi oder Schwefel werde mit einem weichen Fell, am besten Katzenfell, gerieben und dem aufgehängten Körper genähert. Man beobachtet alsdann folgendes:

1. Der Körper wird von der Hartgummistange angezogen.

2. Nachdem der Körper die Hartgummistange berührt hat, vor allem aber, wenn man die Stange an dem Körper sozusagen abgestrichen hat, verwandelt sich die Anziehung in eine Abstoßung.

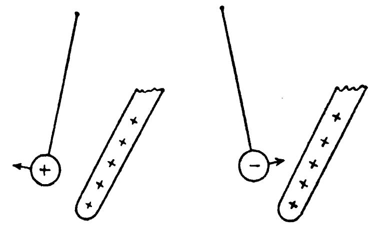


Abb. 181. Elektrostatischer Grundversuch.

Man überstreiche nunmehr den Körper mit der Hand (Entladung) und wiederhole den Versuch mit einer Glasstange, die vorher mit einem Seidenlappen oder einem amalgamierten Lederlappen gerieben wurde. Man beobachtet wieder die gleichen Erscheinungen wie mit der geriebenen Hartgummistange.

3. Der mit der geriebenen Glasstange bestrichene Körper wird von der Glasstange abgestoßen, von der geriebenen Hartgummistange aber angezogen. Wird jedoch die geriebene Hartgummistange an dem Körper abgestrichen, so ist das Umgekehrte der Fall.

Den Zustand, in den die Stangen durch das Reiben versetzt werden, bezeichnet man bekanntlich als den elektrischen Zustand, das an den geriebenen Körpern auftretende Etwas als Elektrizität. (Der Name stammt von GILBERT, 1600.) Von ihrer Natur wird später die Rede sein. Hier sei nur so viel gesagt, daß wir sie als eine Substanz anzusehen haben. Stellt man den gleichen Versuch mit andern geriebenen Stoffen an, so zeigt sich, sofern auf die angegebene Weise überhaupt eine Wirkung erzielt wird, daß die auftretende Elektrizität sich entweder wie die des geriebenen Glases oder wie die des geriebenen Hartgummis verhält. Ein Drittes gibt es nicht.

Man streiche an dem aufgehängten Körper erst die geriebene Hartgummistange, dann, ohne vorher wieder zu entladen, die geriebene Glasstange oder umgekehrt ab. Man beobachtet,

4. daß sich die Wirkungen der Glas- und der Hartgummielektrizität gegenseitig aufheben können. Durch das Hinzutreten der einen Art von Elektrizität wird die Wirkung der andern herabgesetzt, aufgehoben oder in ihr Gegenteil verwandelt, je nachdem in welchem Mengenverhältnis die beiden Elektrizitäten auf den Körper übertragen wurden.

Es ist üblich, die Glaselektrizität als positive Elektrizität, die Hartgummielektrizität als negative Elektrizität zu bezeichnen (LICHTENBERG 1777). Diese Wahl ist völlig willkürlich und zufällig; man hätte genau so gut, ja sogar besser, auch umgekehrt verfahren können. Der Unterschied der beiden Elektrizitäten wurde 1734 von DUFAY entdeckt.

210. Elektrizitätsmenge und elektrische Ladung. Indem wir uns von vornherein auf den Boden der Auffassung der Elektrizität als einer Substanz stellen — eine Auffassung, die später näher zu erklären sein wird —, sind wir berechtigt, von der Menge der auf einem Körper befindlichen Elektrizität zu sprechen, also den Begriff der Elektrizitätsmenge einzuführen. Man bezeichnet die auf einem Körper befindliche Elektrizitätsmenge (genauer den Überschuß der auf ihm vorhandenen positiven Elektrizitätsmenge über die auf ihm vorhandene negative Elektrizitätsmenge) als die elektrische Ladung des Körpers.

Man wird naturgemäß zwei Elektrizitätsmengen als gleich bezeichnen, wenn sie, am gleichen Orte befindlich, sowohl nach Größe wie nach Richtung unter gleichen Verhältnissen genau gleiche Wirkungen auf eine bestimmte andere Ladung hervorbringen. Als entgegengesetzt gleich wird man sie bezeichnen, wenn ihre Wirkungen auf eine bestimmte andere Ladung unter gleichen Verhältnissen der Größe nach gleich, aber entgegengesetzt gerichtet sind.

Ein mit gleichen Mengen positiver und negativer Elektrizität geladener Körper wirkt bei gleicher Verteilung beider Ladungsarten wie ein gar nicht geladener Körper. Einen Körper, der nach außen keine elektrischen Wirkungen zeigt, nennen wir elektrisch neutral.

Als Raumdichte einer elektrischen Ladung bezeichnet man den Betrag an Ladung, der sich in 1 ccm eines Raumes befindet, also die Ladung der Volumeinheit. Häufig befindet sich eine elektrische Ladung lediglich innerhalb einer äußerst dünnen Schicht an der Oberfläche eines Körpers. In diesem Falle bezeichnet man die auf je 1 qcm der Oberfläche entfallende Elektrizitätsmenge als die elektrische Flächendichte.

211. Das COULOMBsche Gesetz. Einheit der Ladung. Indem wir die Beobachtung 1, § 209, einer späteren Besprechung vorbehalten, ergeben die Beobachtungen 2 und 3 folgenden allgemeinen Schluß:

Ladungen gleichen Vorzeichens (gleichnamige Ladungen) stoßen sich ab, Ladungen entgegengesetzten Vorzeichens (ungleichnamige Ladungen) ziehen sich an.

Dieses allgemeine Ergebnis wird durch das Gesetz von COULOMB (1785, Vorläufer DANIEL BERNOUILLI, CAVENDISH) quantitativ präzisiert:

Die zwischen zwei Elektrizitätsmengen e und e' wirkende Kraft k ist dem Betrage jeder der beiden Elektrizitätsmengen proportional, dem Quadrat ihres Abstandes r umgekehrt proportional.

$$k = \text{const}\,\frac{e\,e'}{r^2}\,. \qquad (1)$$

Die Kraft wirkt in Richtung der Verbindungslinie der beiden Ladungen. Man sieht, daß sich, in Übereinstimmung mit dem Experiment, bei gleichem

Vorzeichen von e und e' Abstoßung (positives Vorzeichen von k, d. h. Vergrößerung des Abstandes r), bei entgegengesetztem Vorzeichen Anziehung ergibt, wenn die Konstante des Gesetzes positiv gewählt wird.

Die Gültigkeit dieses Gesetzes, das schon früher CAVENDISH auf Grund anderer Beobachtungen aufgestellt hatte, wurde von COULOMB durch genaue Versuche mittels einer elektrischen Drehwage festgestellt (Abb. 182), An einem horizontalen, an einem dünnen Faden drehbar und isoliert aufgehängten Balken befindet sich eine Kugel aus Holundermark. in gleicher Höhe mit ihr und im veränderlichen Abstande von ihr eine zweite, gleiche Kugel. Beiden Kugeln können elektrische Ladungen erteilt werden. Die Größe der anziehenden oder abstoßenden Kraft wird aus der Drehung des Balkens (der Torsion des Fadens, § 83) ermittelt.

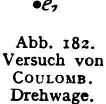


Abb. 182. Versuch von COULOMB. Drehwage.

Man beachte die völlige formale Gleichheit des COULOMBschen Gesetzes mit dem NEWTONschen Gravitationsgesetz (§ 63). Die Proportionalität der Kraft mit $1/r^2$, die in beiden Gesetzen auftritt, hat zur Folge, daß für die Bewegung zweier frei beweglicher elektrischer Ladungen entgegengesetzten Vorzeichens unter der Wirkung der gegenseitigen Anziehung die gleichen Gesetze gelten wie für zwei sich anziehende Massen. Diese Bewegungen gehorchen also auch dem 1. und 2. KEPLERschen Gesetz, ebenso wie die Planetenbewegungen (§ 66). Das 3. KEPLERsche Gesetz gilt jedoch nur dann, wenn für mehrere, das gleiche Anziehungszentrum („Sonne") umkreisende Ladungen („Planeten") das Verhältnis e/m aus ihrer Ladung e und ihrer Masse m gleich groß ist. Das Verhältnis e/m tritt in diesem Falle an die Stelle des Verhältnisses der schweren zur trägen Masse (§ 54). Dieses ist für alle Körper gleich groß, nämlich gleich 1. Das Verhältnis e/m kann aber sehr verschiedene Werte annehmen.

In Gl. 1 ist noch eine Konstante unbestimmt. Dies rührt daher, daß wir noch keine Festsetzung über die Maßeinheit von Elektrizitätsmengen getroffen haben. Das elektrostatische Maßsystem beruht auf der Festsetzung, daß die Einheit der Elektrizitätsmenge so gewählt werden soll, daß die Konstante im COULOMBschen Gesetz den Wert 1 erhält und eine reine Zahl ist, also aus dem Gesetz überhaupt verschwindet, wenn wir als Krafteinheit das dyn und als Längeneinheit das cm, also die Einheiten des CGS-Systems, wählen. (Dies ist eine natürlich erlaubte, aber völlig willkürliche Festsetzung, für die nur praktische Gesichtspunkte maßgebend sind. Wir werden später noch andere Maßsysteme kennenlernen. Man beachte, daß bei der Aufstellung des NEWTONschen Gravitationsgesetzes diese Freiheit der Festsetzung nicht besteht, weil die Masseneinheit bereits anderweitig, nämlich nach dem 2. NEWTONschen Axiom, festgelegt ist. Daher kann das Gravitationsgesetz nicht ohne die allgemeine Gravitationskonstante G geschrieben werden.)

Wir schreiben also nunmehr das COULOMBsche Gesetz in folgender einfacher Form:

$$k = \frac{e\,e'}{r^2}\ \text{dyn}\,. \tag{2}$$

Es ergibt sich dann zwangläufig die Definition der Einheit der Elektrizitätsmenge im elektrostatischen System:

Eine Elektrizitätsmenge ist gleich der (elektrostatischen) Einheit, wenn sie auf eine ihr gleiche im Abstande von 1 cm die Kraft 1 dyn ausübt.

Die elektrostatische (el. stat.) Einheit (oft abgek. E.S.E.) der Elektrizitätsmenge eignet sich nicht für die Bedürfnisse der Technik. (So fließen z. B. durch

bei räumlich verteilten Massen (ausgedehnter Körper, System mehrerer Körper) einen Schwerpunkt definieren kann, in dem man sich in vielen Fällen die Einzelmassen konzentriert denken kann, so kann man auch einen elektrischen Schwerpunkt einer räumlich verteilten elektrischen Ladung definieren, sofern es sich um Ladung eines Vorzeichens handelt. Sind positive und negative Ladungen gleichzeitig vorhanden, so ist für jede der Schwerpunkt besonders zu bestimmen. Man gewinnt so den gleichen Vorteil, wie im Falle von Massen, indem man sich, in Analogie zur Vorstellung des Massenpunktes, eine räumlich verteilte elektrische Ladung einheitlichen Vorzeichens oft durch eine gleich große, im elektrischen Schwerpunkt der Ladung befindliche „Punktladung" ersetzt denken kann.

Für die Bestimmung des Schwerpunktes einer elektrischen Ladung gelten die gleichen Gesetze wie für den Schwerpunkt einer räumlich verteilten Masse (§ 34). Der Schwerpunkt einer gleichmäßig über eine Kugelfläche verteilten Ladung liegt im Mittelpunkt der Kugel.

Ein Gebilde, das aus einer Punktladung $+e$ und einer gleich großen Punktladung $-e$ besteht (Abb. 183), die voneinander den Abstand l haben, bezeichnet man als einen elektrischen Dipol, die Größe $el = \mathfrak{M}$ als das elektrische Moment des Dipols. Sind die Ladungen keine Punktladungen, sondern räumlich ausgedehnt, so kann man das Ladungssystem in vielen Fällen auch noch als einen Dipol betrachten, indem man sich die positiven und negativen Ladungen einzeln in ihren Schwerpunkten vereinigt denkt und sie durch gleich große Punktladungen ersetzt. Bei komplizierteren Ladungsverteilungen ist das aber meist nicht mehr zulässig. Die Verbindungslinie der beiden Punktladungen eines Dipols nennt man seine elektrische Achse. Das elektrische Moment eines Dipols ist ein Vektor, der in der Richtung der Dipolachse von der negativen zur positiven Ladung weist.

$-e$ —— l —— $+e$

Abb. 183. Elektrischer Dipol.

215. Gute und schlechte Leiter. Nichtleiter. Der elektrostatische Grundversuch gelingt nicht, wenn z. B. die zur Aufhängung des Körpers benutzte Seidenschnur naß ist, wenn man einen Zwirnfaden oder einen Metalldraht statt des Seidenfadens benutzt oder wenn man den aufgehängten Körper während des Bestreichens mit der geriebenen Stange mit der Hand berührt. In allen diesen Fällen zeigt es sich, daß der Körper dann nicht in der Lage ist, den elektrischen Zustand längere Zeit beizubehalten, weil nämlich die auf den Körper übertragenen Elektrizitätsmengen durch die genannten Stoffe zur Erde abfließen.

Substanzen, welche die Eigenschaft haben, daß Elektrizität in ihnen fließen kann, nennt man Leiter, solche, bei denen dies nicht oder nur in äußerst geringem Maße der Fall ist, Nichtleiter, Isolatoren oder Dielektrika.

Die Fähigkeit, die Elektrizität zu leiten, ist den einzelnen Stoffen in sehr verschiedenem Grade eigen. Zwischen Leitern und Isolatoren besteht keine scharfe Grenze, sondern man findet in der Natur alle möglichen Übergänge zwischen sehr guten Leitern und fast vollkommenen Isolatoren (vgl. Tab. 22, § 246). Stoffe, die eine zwar geringe, aber doch noch merkliche Leitfähigkeit haben, also den Übergang zwischen den (guten) Leitern und den Dielektrika bilden, heißen Halbleiter.

Die vollkommensten Leiter sind die Metalle, unter diesen wieder Silber und Kupfer. Sehr gute Isolatoren sind z. B. Quarz, Glimmer, Bernstein, Hartgummi, Siegellack, Seide, Petroleum, ferner die Gase in ihrem normalen Zustande. Ein Halbleiter ist z. B. trockenes Holz. Der einzige absolute Nichtleiter ist das Vakuum. Auch die im praktischen Sinne vollkommensten materiellen Nichtleiter zeigen stets noch minimale Spuren von Leitfähigkeit.

Da nach § 213 zu jeder Elektrizitätsmenge ein materieller Ladungsträger gehört, so ist die Bewegung, das Fließen, einer Elektrizitätsmenge bedingt durch eine entsprechende Bewegung ihrer Ladungsträger. Demnach sind die Leiter Stoffe, in denen sich Ladungsträger frei bewegen können, Nichtleiter solche, in denen es keine oder nur äußerst wenige frei bewegliche Ladungsträger gibt.

216. Die Elektrizitätsbewegung in den Metallen. Unter Berücksichtigung des vorstehend Gesagten und ferner auf Grund von § 213 folgt schon aus der täglichen Erfahrung, daß beim Fließen elektrischer Ladungen durch die bekanntesten und besten festen Leiter, nämlich die Metalle, eine Bewegung positiver Elektrizität nicht stattfindet. Mit einem Fließen positiver Elektrizität ist notwendig stets ein Transport der sie tragenden Atome verbunden. Das müßte sich aber z. B. bei den Drähten in allen elektrischen Leitungen bemerkbar machen. So müßte allmählich das Lötzinn aus den Lötstellen der Drähte an andere Stellen wandern und durch zugewandertes Kupfer ersetzt werden. Die Wolfram-Drähte der Glühlampen würden sich im Laufe der Zeit verändern usw. Von derartigen Wirkungen ist nichts zu bemerken. Es folgt, daß das Fließen elektrischer Ladungen in festen metallischen Leitern, wenigstens unter gewöhnlichen Verhältnissen, immer nur in einer Bewegung von Elektronen, also negativen Ladungen, besteht, während die positiven Ladungen an ihren Plätzen bleiben.

Die Elektronen sind in den Metallen frei beweglich. Eine noch so kleine Kraft, die auf sie wirkt, setzt sie in Bewegung.

Es ist demnach die positive Aufladung eines metallischen Leiters so zu verstehen, daß ihm Elektronen entzogen werden, so daß sich die in ihm enthaltenen positiven und negativen Elektrizitätsmengen nicht mehr, wie im gewöhnlichen, elektrisch neutralen Zustande, in ihrer Wirkung nach außen gegenseitig aufheben, sondern nunmehr ein positiver Überschuß besteht, der nach außen hin wirksam wird. Die Entladung eines positiv geladenen metallischen Leiters besteht in dem Hinüberfließen einer so großen Zahl von Elektronen auf ihn, daß dadurch sein positiver Ladungsüberschuß kompensiert wird.

Aus der Zeit der älteren Elektrizitätstheorie ist heute noch die Gewohnheit geblieben, als Stromrichtung einer bewegten Elektrizitätsmenge diejenige Richtung zu bezeichnen, in der bei dem betreffenden Vorgang positive Elektrizität fließen würde. Die tatsächliche Bewegungsrichtung der Elektrizität in den Metallen ist also der so definierten Stromrichtung gerade entgegengesetzt.

217. Einige Versuche mit dem Elektroskop. Zum Nachweis von Elektrizitätsmengen kann das Elektroskop dienen. Die einfachste Konstruktion ist das Blättchenelektroskop (Abb. 184). In ein Metallgehäuse *A* (bei primitiven Instrumenten auch wohl ein Glasgefäß) ist isoliert (etwa durch einen Verschluß aus Hartgummi, Bernstein oder Siegellack) eine Metallstange eingeführt, welche oben einen Knopf, eine Klemmschraube, eine Platte od. dgl. und unten, in der Mitte des Gehäuses, zwei im ungeladenen Zustand unmittelbar aneinander herabhängende Blättchen *K* aus Aluminiumfolie oder Blattgold trägt. Wird eine elektrische Ladung auf den Knopf übertragen, so verteilt sie sich über die Stange und die Blättchen. Diese werden also beide mit Ladung gleichen Vorzeichens geladen und stoßen sich infolgedessen ab (eine noch etwas korrektere Beschreibung s. § 228, letzter Absatz, und § 231). Sie spreizen sich auseinander, und zwar um so stärker, je größer ihre Ladung ist. Bei manchen Elektroskopen läuft auch

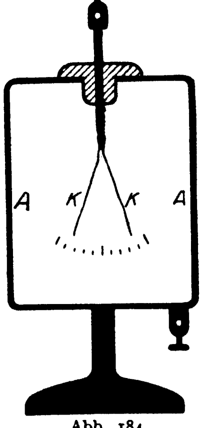


Abb. 184. Blättchenelektroskop.

die Stange unten in eine längliche Platte aus, an der ein einziges, bei der Ladung sich abspreizendes Blättchen herabhängt.

Ist ein Elektroskop mit einer Skala oder sonstigen Vorrichtung versehen, an der man die Größe der Wirkung ablesen kann, so bezeichnet man es als Elektrometer. Zur genauen Messung von Elektrizitätsmengen ist jedoch ein Elektrometer nur unter bestimmten Bedingungen zu verwenden (vgl. § 231, wo auch weitere Elektrometertypen beschrieben sind).

Wir können mit dem Elektroskop u. a. die folgenden lehrreichen Versuche anstellen.

1. Man nähere dem Knopfe bzw. der Platte des Elektroskops eine geriebene Hartgummi- oder Glasstange, ohne zu berühren. Das Elektroskop zeigt einen Ausschlag, der beim Entfernen der Stange wieder verschwindet.

2. Man berühre den Knopf des Elektroskops mit einer geriebenen Hartgummistange. Gibt dies einen zu großen Ausschlag, so übertrage man durch Abstreichen erst etwas von der Ladung der Stange auf eine an einem Hartgummi- oder Glasgriff isoliert befestigte Metallkugel von 1—2 cm Durchmesser und übertrage dessen Ladung auf das Elektroskop. Dieses zeigt einen Ausschlag, der auch nach Entfernen der Stange bzw. der Kugel bestehen bleibt. Das Elektroskop ist negativ geladen. Ebenso kann man mittels des geriebenen Glasstabes das Elektroskop positiv laden.

3. Man füge zu einer bereits vorhandenen positiven (negativen) Ladung negative (positive) hinzu. Der Ausschlag des Elektroskops wird kleiner oder verschwindet oder es stellt sich nach Durchgang durch die Nullage wieder ein Ausschlag ein.

4. Man nähere dem positiv geladenen Elektroskop die geriebene Glasstange, ohne zu berühren. Der Ausschlag wird größer, solange der Glasstab in der Nähe ist, und geht bei Entfernen wieder auf seinen alten Wert zurück. Nähert man die geriebene Hartgummistange, so wird der Ausschlag kleiner, solange die Stange in der Nähe ist. Nähert man das Fell, mit dem die Hartgummistange gerieben wurde, so wird der Ausschlag größer. Das Fell ist also positiv geladen, denn es wirkt wie der geriebene Glasstab. Ebenso erweist sich der Seidenlappen, mit dem der Glasstab gerieben wurde, als negativ geladen.

5. Man schlage den Knopf (die Platte) des Elektroskops leicht mit einem trockenen Seidenlappen. Das Elektroskop zeigt einen Ausschlag, der sich bei Prüfung durch Annäherung einer geriebenen Glasstange als negativ erweist.

Die Deutung von Versuch 1 und 4 kann erst später (§ 227) erfolgen; jedoch beweist der zweite Teil von 4, daß das Reibzeug die entgegengesetzte Ladung erhält wie der geriebene Stab, denn es hat auf das Elektroskop die entgegengesetzte Wirkung wie dieser.

Die Versuche 2 und 3 sind nach dem bereits früher gesagten ohne weiteres verständlich.

Versuch 5 beweist, daß auch das Metall des Elektroskopknopfes durch Reiben elektrisch wird. Diese Elektrisierung kann hier beobachtet werden, weil das geriebene Metall isoliert ist, die erzeugte Ladung also nicht abfließen kann, wie sie es tun würde, wenn man den Metallstab in der Hand hielte. Man kann auf diese oder ähnliche Weise den Nachweis führen, daß alle Stoffe durch Reiben elektrische Ladungen annehmen (vgl. § 262).

218. Elektrisches Feld. Feldstärke. In dem eine Ladung umgebenden Raume erfährt gemäß dem COULOMBschen Gesetz jede andere Ladung eine Kraftwirkung. Im Gegensatz zur älteren Auffassung, welche annahm, daß diese Kraft von der einen Ladung unvermittelt auf die andere wirke, ohne daß der zwischen ihnen liegende Raum daran beteiligt sei (Fernwirkungstheorie, vgl. § 68), steht die

heutige Physik auf dem Standpunkt, daß die Kraftwirkung auf eine Ladung nur durch einen bestimmten, am Orte dieser Ladung im Raume herrschenden Zustand hervorgerufen werden könne (Nahewirkungs- oder Feldtheorie). Da elektrische Kraftwirkungen auch im völlig leeren Raum (Vakuum) eintreten, so ist die etwa im Raum vorhandene Materie (z. B. die Luft) an diesen Vorgängen höchstens indirekt beteiligt, aber ihr Vorhandensein ist für diese Kraftwirkungen nicht Vorbedingung. Diese Tatsache würde sich anschaulich deuten lassen, wenn es gestattet wäre, anzunehmen, daß die ganze Welt, auch der scheinbar leere Raum, von einem unserer Wahrnehmung sonst entzogenen Stoff erfüllt sei, dessen Zustand sich unter der Wirkung einer in ihm enthaltenen elektrischen Ladung, und zwar nicht nur in ihrer unmittelbaren Umgebung, in irgendeiner Weise verändert, etwa so, daß in ihm mechanische Spannungen entstehen, welche dann die unmittelbare Ursache der Kraftwirkungen auf andere entfernte elektrische Ladungen sein könnten. Tatsächlich hat diese Ansicht, also eine in gewissem Sinne mechanische und anschauliche Deutung der elektrischen Kraftwirkungen, die Physik lange beherrscht. Man nannte diesen hypothetischen Stoff den Äther oder Lichtäther (weil er auch der Träger des Lichts sein sollte), und man nahm von ihm an, daß er unwägbar sei und das ganze Weltall samt allen in ihm vorhandenen Körpern erfülle. Aus Gründen, die später erörtert werden, kann heute an dieser anschaulichen Vorstellung nicht mehr festgehalten werden. Die elektrischen Kraftwirkungen sind nicht mechanisch zu deuten, sondern sind Erscheinungen eigener Art. Anschaulich sind nur mechanische Vorgänge, d. h. solche, von denen wir uns als von Bewegungen oder Zuständen materieller Körper eine bildliche Vorstellung machen können. Es ist grundsätzlich unmöglich, daß wir uns vom Wesen der elektrischen Kraftwirkungen eine mechanisch-anschauliche Vorstellung bilden, weil sie eben einem andern Erscheinungsbereich angehören. So werden wir dazu geführt, unter Verzicht auf Anschaulichkeit dem leeren Raum selbst die Eigenschaft zuzuschreiben, unter der Wirkung in ihm befindlicher elektrischer Ladungen gewisse Zustände anzunehmen, welche die Ursache der Kraftwirkungen auf andere elektrische Ladungen sind. Wir sagen: eine elektrische Ladung erzeugt in ihrer Umgebung ein elektrisches Feld, welches die unmittelbare Ursache für die Kraftwirkungen dieser Ladung auf andere Ladungen ist.

Das elektrische Feld einer Ladung erstreckt sich so weit, wie Kraftwirkungen der Ladung auftreten. Aus dem Coulombschen Gesetz folgt, daß sich das elektrische Feld jeder Ladung durch das ganze Weltall erstreckt, denn erst für $r = \infty$ wird die Kraftwirkung $k = 0$. (Sie kann allerdings „abgeschirmt" werden, d. h. durch die Kraftwirkung einer andern entgegengesetzten Ladung in gewissen Raumbereichen unwirksam gemacht werden. Trotzdem muß man strenggenommen sagen, daß sich die Kraftwirkungen beider Ladungen auch in diese Raumbereiche erstrecken, sich aber wegen entgegengesetzt gleicher Wirkung gegenseitig aufheben.) Selbstverständlich wird aber die Wirkung jeder Ladung in einer gewissen Entfernung unbeobachtbar klein.

Die Größe der elektrischen Kraft, die die Ladungseinheit in einem Punkte eines elektrischen Feldes erfährt, bezeichnet man als die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ in diesem Raumpunkte. Die elektrische Feldstärke ist die auf die Ladung $+1$ ausgeübte elektrische Kraft. Als Krafteinheit dient im elektrostatischen Maßsystem das dyn. Ebenso wie eine Kraft ist daher die elektrische Feldstärke ein Vektor. Der Feldvektor hat die gleiche Richtung wie die in dem Felde auf eine positive Ladung wirkende Kraft. Steht ein Raumpunkt unter der Wirkung mehrerer Ladungen, so überlagern

sich die Felder dieser Ladungen, und die elektrische Feldstärke ist die nach den Gesetzen der Vektor-Addition (§ 11) gebildete Resultierende der einzelnen Feldstärken.

Die auf eine Ladung von der Größe e ausgeübte Kraft ist gemäß der vorstehenden Definition der Feldstärke gleich dem Produkt aus Feldstärke $\mathfrak{E}$ und Ladung e:

$$k = e \cdot \mathfrak{E} \text{ dyn}. \tag{4}$$

Unter einem homogenen elektrischen Feld versteht man ein solches, in dem die elektrische Feldstärke überall gleiche Größe und gleiche Richtung hat.

219. Elektrische Spannung. Eine Ladung e befinde sich in einem Punkt A eines elektrischen Feldes. Wir wollen sie nunmehr nach einem anderen Punkt B überführen, und zwar auf einem beliebigen Wege $A\,B = s$ (Abb. 185). Bei dieser Überführung findet ein Umsatz von Energie statt. Je nach dem Vorzeichen der Ladung und je nachdem, ob die Richtung der Bahn der Ladung mit der Feldrichtung einen spitzen oder stumpfen Winkel bildet, hemmt oder fördert das Feld die Bewegung der Ladung. Es muß entweder Arbeit aufgewendet werden, um die Überführung zu bewirken, oder es wird bei der Überführung Arbeit gewonnen. Es seien ds die einzelnen Elemente der Bahn s, und es sei $\mathfrak{E}_s = \mathfrak{E} \cos(\mathfrak{E}, ds)$ die jeweils in der Richtung der Bewegung liegende Komponente der örtlichen elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$. Dann ist in jedem Punkte der Bahn die in die Bewegungsrichtung fallende Komponente der elektrischen Kraft $k_s = e\mathfrak{E}_s$ dyn, und die bei der Bewegung von A nach B an der Ladung e geleistete Arbeit beträgt

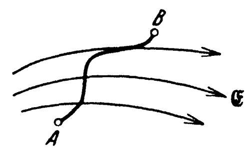


Abb. 185. Zur Ableitung des Begriffs Spannung.

$$A = -e\int_A^B \mathfrak{E}_s\, ds = eU_A^B \text{ erg}, \tag{5}$$

wobei

$$U_A^B = -\int_A^B \mathfrak{E}_s\, ds \text{ erg/el. stat. Ladungseinh.} \tag{6}$$

gesetzt ist. Das negative Vorzeichen ist in Gl. 5 deshalb zu setzen, weil E die an der Ladung geleistete Arbeit sein soll, und diese ist negativ, wenn e und $\mathfrak{E}_s$ beide positiv sind, weil dann die Bewegung in Richtung der elektrischen Kraft erfolgt.

Die durch die Gl. 6 definierte Größe U_A^B nennt man die elektrische Spannung des Punktes B gegen den Punkt A, auch kurz die zwischen A und B herrschende Spannung. Man sieht ohne weiteres, daß

$$U_A^B = -U_B^A. \tag{7}$$

Sofern wir es mit sog. wirbelfreien Feldern zu tun haben, ist der Wert der Spannung zwischen zwei Punkten eines elektrischen Feldes durch Gl. 6 eindeutig gegeben und von der Wahl des Weges, auf dem wir uns die Ladung von A nach B überführt denken, unabhängig. Ein wirbelfreies elektrisches Feld ist ein solches, in dem es keine in sich geschlossenen elektrischen Kraftlinien gibt (§ 111, vgl. dazu § 328). Diese Voraussetzung ist bei den in diesem Kapitel zu behandelnden rein elektrostatischen Feldern, d. h. den Feldern, die ihren Ursprung in ruhenden elektrischen Ladungen haben, immer erfüllt.

Wie man aus den Gl. 5 und 6 abliest, ist die Spannung U_A^B die Arbeit, die erforderlich ist, um die positive Ladungseinheit von A nach B zu überführen. Ein Punkt B besitzt gegenüber einem Punkt A die elektrostatische Einheit der Spannung, wenn die Arbeit 1 erg erforderlich ist, um die positive elektrostatische Ladungseinheit von A nach B zu überführen. Im praktischen Maßsystem dient als Spannungseinheit das Volt. Es ist

$$1 \text{ Volt} = \tfrac{1}{300} \text{ el. stat. Spannungseinheiten.}$$

(Vgl. § 240.)

Wir betrachten zwei Punkte A und B, die in einem homogenen elektrischen Felde derart gelegen sind, daß man, stets in der Feldrichtung fortschreitend, von A nach B gelangt, und deren Abstand s sei. Dann ist längs des Weges s überall $\mathfrak{E}_s = \mathfrak{E}$, also konstant, und es folgt aus Gl. 6

$$U_A^B = -\mathfrak{E}\, s, \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{E} = -\frac{U_A^B}{s}. \tag{8}$$

Es seien A, B, C, D, E, F Punkte in einem elektrischen Felde. Dann können wir die Spannung U_A^B auf verschiedene Weise berechnen. Einmal auf direktem Wege nach Gl. 6, aber auch so, daß wir von A zuerst nach F, von dort nach E, usw. und schließlich nach B gehen (Abb. 186). Da die Spannung U_A^B vom Wege, auf dem wir sie berechnen, unabhängig ist, so folgt

$$U_A^B = U_A^F + U_F^E + \cdots + U_C^B$$

oder unter Berücksichtigung von Gl. 7

$$U_A^B + U_B^C + \cdots + U_E^F + U_F^A = 0.$$

Abb. 186. Die Summe der Spannungen längs eines geschlossenen Weges ist Null.

In einem wirbelfreien Felde ist die Summe der Spannungen längs eines geschlossenen Weges gleich Null.

220. Elektrisches Potential. Wir wollen jetzt irgendeinen Punkt O im elektrischen Felde herausgreifen und die Spannungen in den übrigen Punkten auf diesen beziehen. Bei allen praktischen Anwendungen ist es bequem und üblich, als ausgezeichneten Punkt einen Punkt der Erdoberfläche zu wählen bzw. die Erde als Ganzes, da, wie wir noch sehen werden, überall auf dem Erdkörper die gleiche Spannung herrscht, weil er ein Leiter ist (§ 224). Die Spannung U_0^A in einem Punkte A des elektrischen Feldes gegenüber dem Punkt O nennt man das elektrische Potential im Punkt A. Wir wollen es allgemein mit P_e, seinen Wert in einem bestimmten Punkt A mit P_e^A usw. bezeichnen. Es ist demnach

$$P_e^A = U_0^A, \quad P_e^B = U_0^B \text{ usw.}$$

Daraus folgt, daß

$$U_A^B = U_0^B - U_0^A = P_e^B - P_e^A. \tag{9}$$

Die Spannung zwischen zwei Punkten ist also gleich der Differenz der zugehörigen Potentiale. Man bezeichnet deshalb die Spannung oft auch als Potentialdifferenz.

Es ist

$$P_e^A = U_0^A = -\int_0^A \mathfrak{E}_s\, ds \tag{10}$$

die Arbeit, die geleistet werden muß, um die positive Ladungseinheit vom Punkte O zum Punkte A zu befördern, und demnach ist $e \cdot P_e^A$ die entsprechende Arbeit für die Ladung e. Eine Ladung gewinnt oder verliert also potentielle

Energie bei einer Bewegung im elektrischen Felde, und ihr kommt in jedem Punkt des Feldes ein bestimmter Betrag an potentieller Energie — bezogen auf seine Energie im ausgezeichneten Punkt O — zu, genau wie einer Masse im Schwerefelde.

Durch partielle Differentiation von Gl. 10 folgt, unter Fortlassung des Index A

$$\frac{\partial P_e}{\partial s} = \frac{\partial U_o}{\partial s} = -\mathfrak{E}_s\,, \tag{11}$$

wobei P_e das Potential in irgendeinem Punkte des Feldes und $\mathfrak{E}_s$ die Komponente der elektrischen Feldstärke in Richtung von ds bedeuten. Ebenso folgt für die Richtung der drei Koordinatenachsen

$$\frac{\partial P_e}{\partial x} = -\mathfrak{E}_x\,, \qquad \frac{\partial P_e}{\partial y} = -\mathfrak{E}_y\,, \qquad \frac{\partial P_e}{\partial z} = -\mathfrak{E}_z\,, \tag{12a}$$

oder in vektorieller Schreibweise

$$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} P_e\,. \tag{12b}$$

Man nennt daher die Feldstärke auch den Potentialgradienten oder das Potentialgefälle. Die Gl. 8 ergibt sich als Spezialfall für homogene Felder aus Gl. 11 bzw. 12a.

Die Einheit des Potentials ist die gleiche wie die der Spannung, und es wird demnach im praktischen Maßsystem auch in Volt gemessen. Die Einheit der elektrischen Feldstärke im elektrostatischen Maßsystem ist

1 el. stat. Einh. der el. Feldstärke = 1 el. stat. Spannungseinheit/cm.

Entsprechend ist die Einheit der elektrischen Feldstärke im praktischen Maßsystem

1 Volt/cm = $\frac{1}{300}$ el. stat. Einh. der el. Feldstärke.

221. Elektrische Kraftlinien. Zur anschaulichen Darstellung elektrischer Felder bedient man sich entweder nach FARADAY (1852) der Kraftlinien (Feldlinien) oder der Flächen gleichen Potentials (§ 222). Die Kraftlinien sind gedachte Linien, für die folgende Festsetzungen gelten:

1. Die Richtung der Kraftlinien zeigt in jedem Raumpunkt die Richtung des elektrischen Feldes an.

2. Denken wir uns irgendwo im Raume eine zur Richtung des Feldes senkrechte Fläche, so sollen durch jedes Quadratzentimeter einer solchen Fläche so viele Kraftlinien hindurchtreten, wie der Maßzahl der Feldstärke in jenem Raumbereich entspricht. Ist die Feldstärke gleich $\mathfrak{E}$, so ist die Zahl n dieser Kraftlinien, die sog. Kraftliniendichte, gleich dem absoluten Betrage $|\mathfrak{E}|$ von $\mathfrak{E}$, also $n = |\mathfrak{E}|$.

Da die Kraftlinien die Richtung der Feldstärke haben, so sind sie, wie diese, stets von positiven Ladungen fort, auf negative Ladungen hin gerichtet. Im Raum um eine einzeln im Raume befindliche Punktladung verlaufen sie radial. Sofern das elektrische Feld lediglich von dem Vorhandensein elektrischer Ladungen herrührt, haben diese Kraftlinien also stets ihren Anfang auf einer positiven, ihr Ende auf einer negativen Ladung. Ein solches Feld ist, wie bereits erwähnt, ein wirbelfreies Feld. Später werden wir auch Felder mit in sich geschlossenen elektrischen Kraftlinien, also Wirbelfelder, kennenlernen.

Selbstverständlich sind die Kraftlinien keine realen physikalischen Gebilde, sondern nur ein bequemes Mittel zur Veranschaulichung der Verteilung der elektrischen Kräfte im Raum.

Man kann den Verlauf der Kraftlinien sichtbar machen, indem man etwa auf eine in das elektrische Feld gebrachte Glasplatte kleine Rutil- oder

Gipskristalle streut. Bei ausreichender Feldstärke ordnen sich die Kristalle (wie Eisenfeilspäne im magnetischen Felde) in Ketten, welche in Richtung der Kraftlinien verlaufen. Abb. 187 zeigt ein auf diese Weise erzeugtes Bild des Kraftlinienverlaufs im Felde einer positiven (A) und einer gleich großen negativen Ladung (K). Man sieht, daß Anfang und Ende jeder Kraftlinie sich auf den Ladungen befinden. (Den Richtungssinn der Kraftlinien kann man natürlich durch einen solchen Versuch nicht ermitteln.)

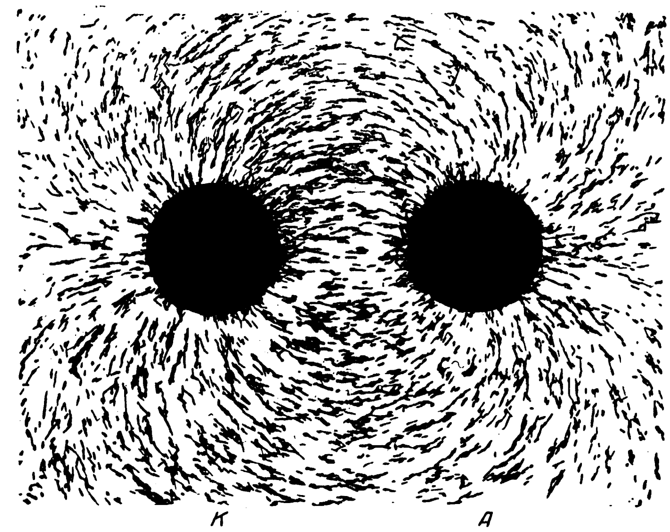


Abb. 187. Kraftlinienbild im Felde zweier gleich großer, entgegengesetzter elektrischer Ladungen. (Aus POHL, Elektrizitätslehre.)

222. Flächen gleichen Potentials. Alle Punkte eines elektrischen Feldes, die das gleiche Potential haben, zwischen denen also keine Spannung herrscht, liegen auf einer oder mehreren, stets geschlossenen Flächen, deren jede eine oder mehrere der Ladungen, die das Feld erzeugen, umhüllen (Flächen gleichen Potentials, Äquipotentialflächen, Niveauflächen).

Denkt man sich in einem elektrischen Felde eine Schar von Flächen gleichen Potentials derart ausgewählt, daß zwischen zwei aufeinanderfolgenden Flächen stets die gleiche Potentialdifferenz (Spannung) besteht, so liegen diese Flächen, wie man aus Gl. 12a leicht ableiten kann, um so dichter beieinander, je größer an der betreffenden Stelle die Feldstärke $\mathfrak{E}$ ist. Ein Beispiel s. § 223.

Die Flächen gleichen Potentials stehen überall senkrecht auf der Richtung der elektrischen Kraftlinien. Denn da für zwei Punkte A und B einer solchen Fläche $U_A^B = 0$ ist, so ist, wenn wir das Integral der Gl. 6 über eine in der Fläche liegende Strecke ausführen, überall $\mathfrak{E}_s = \mathfrak{E} \cos(\mathfrak{E}, ds) = 0$, d. h. die Feldstärke $\mathfrak{E}$ steht senkrecht zu ds, also auch zur Fläche.

223. Das elektrische Feld einer einzelnen Punktladung und eines Dipols. Die Kraft, die eine Ladung e' im Felde einer einzelnen Punktladung e erfährt, ist nach § 211 und 220 $k = e'\mathfrak{E} = e'e/r^2$. Demnach ist die Feldstärke in der Umgebung einer einzelnen Punktladung

$$\mathfrak{E} = \frac{e}{r^2}. \qquad (13a)$$

Das Feld ist bei einer positiven Punktladung radial nach außen, bei einer negativen radial nach innen gerichtet. Seine Stärke ist dem Quadrat des Abstandes r von der Punktladung umgekehrt proportional. Die Flächen gleichen Potentials sind Kugelflächen um die Ladung. In Abb. 188 ist eine Schar solcher Äquipotentialflächen dargestellt, die jeweils unter sich die gleiche Potentialdifferenz gegeneinander haben. Man sieht, daß die Flächen um so dichter beieinander liegen, je näher man der Ladung kommt, je größer also die Feldstärke ist.

Es ist üblich, bei einer einzelnen Punktladung der unendlich entfernten Äquipotentialfläche das Potential o zuzuschreiben. Dann ergibt sich das Potential im Abstande r von der Ladung zu

$$P_e = -\int_{\infty}^{r} \frac{e}{r^2}\, dr = \frac{e}{r}\,. \qquad (13\text{b})$$

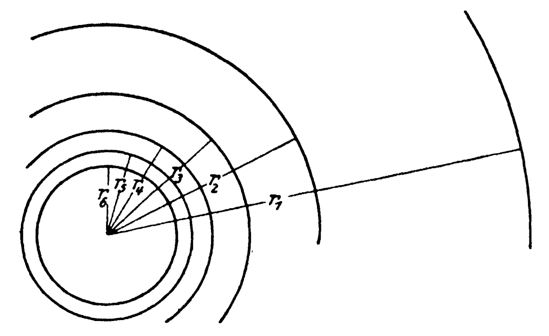


Abb. 188. Äquipotentialflächen im Felde einer Punktladung. Die inneren Äquipotentialflächen sind, weil sie zu dicht zusammenrücken, nicht gezeichnet.

Die Zahl der Kraftlinien, die durch irgendeine der Flächen gleichen Potentials hindurchtreten, ist nach § 221 und Gl. 13a

$$n = |4\pi r^2 \cdot \mathfrak{E}/r^2| = |4\pi e|\,. \qquad (14)$$

Sie ist natürlich unabhängig vom Abstande der betreffenden Fläche von der Ladung, da ja Kraftlinien nirgends im Raume frei beginnen oder endigen, sondern jede von der Ladung ausgehende Kraftlinie durch jede Fläche gleichen Potentials einmal hindurchtreten muß. Von einer Ladung $+e$ gehen demnach $4\pi e$ Kraftlinien aus, die gleiche Zahl endet in einer Ladung $-e$.

Aus der Gl. 13a kann man das Feld eines Dipols als Vektorsumme der Felder seiner beiden Pole leicht berechnen. Von besonderem Interesse sind die beiden sog. Hauptlagen. In einem Punkt in der Verlängerung der Dipolachse, dessen Abstand r vom Dipol groß gegen den Polabstand ist, beträgt die Feldstärke ($\mathfrak{M}$ = Moment des Dipols)

$$\mathfrak{E} = \frac{2\,\mathfrak{M}}{r^3} \quad (1.\ \text{Hauptlage})\,. \qquad (15\text{a})$$

In einem Punkt senkrecht zur Dipolachse auf einer den Dipol halbierenden Geraden beträgt sie

$$\mathfrak{E} = -\frac{\mathfrak{M}}{r^3} \quad (2.\ \text{Hauptlage})\,. \qquad (15\text{b})$$

In der 1. Hauptlage ist sie mit der Dipolachse gleichgerichtet, in der 2. Hauptlage der Dipolachse entgegengerichtet.

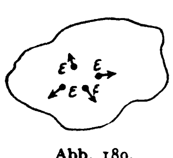


Abb. 189. Zum Potential auf einem Leiter.

224. Feldstärke und Potential in Leitern. Da die Elektronen in metallischen Leitern jeder auf sie wirkenden elektrischen Kraft folgen, also in Bewegung bleiben, solange eine solche Kraft besteht, und sei sie noch so klein, so kann auf einem solchen Leiter elektrisches Gleichgewicht, d. h. Ruhe der elektrischen Ladungen, nur bestehen, wenn in ihm kein elektrisches Feld wirkt. Es befinde sich z. B. eine (aus sehr vielen Elektronen ε bestehende) Ladung an der in der Abb. 189 bezeichneten Stelle eines Leiters. Diese Elektronen üben aufeinander abstoßende Kräfte aus; es besteht also im Innern des Leiters ein elektrisches Feld, dem die Elektronen folgen. Sie werden durch dieses Feld an die Oberfläche des Körpers getrieben. Hier findet ihre Beweglichkeit insofern eine Grenze, als sie im allgemeinen nicht aus der Oberfläche austreten können. Wohl aber können sie sich noch längs der Oberfläche bewegen, solange die herrschende Feldstärke eine Komponente parallel zur Oberfläche hat, also nicht senkrecht auf ihr steht. Die Bewegung der Elektronen hört daher erst dann auf, wenn

1. die Feldstärke im Innern des Leiters überall den Wert Null angenommen hat, und wenn

2. die Feldstärke an der Oberfläche senkrecht auf dieser steht.

Dieser Zustand stellt sich nun in Leitern, die nicht mit einer Stromquelle z. B. den beiden Klemmen eines Akkumulators, in Verbindung stehen, durch die Bewegung der Elektronen stets von selbst her, indem sich die Elektronen derart auf dem Leiter verteilen, daß durch die Überlagerung der Felder, die von den einzelnen Elektronen herrühren, erstens in jedem Punkte im Innern des Leiters die Feldstärke Null entsteht, zweitens die Richtung der elektrischen Kraft überall senkrecht zur Leiteroberfläche steht. Befindet sich irgendwo in einem Leiter positive Ladung im Überschuß (infolge eines Defizits an Elektronen an jener Stelle), so übt diese Ladung Kräfte auf die im Leiter befindlichen Elektronen aus (allerdings auch auf die positiven Ladungen, die sich aber in den Metallen ja nicht bewegen können). Das führt zu einer Änderung der Ladungsverteilung, die sich dann wieder so einstellt, daß die vorstehenden Bedingungen erfüllt sind. Die Ladungsverteilung ist schließlich genau die gleiche wie bei einem negativen Ladungsüberschuß, nur mit entgegengesetztem Vorzeichen. Also:

Im Innern eines im elektrostatischen Gleichgewicht befindlichen Leiters herrscht die Feldstärke $\mathfrak{E} = 0$.

Ist dieser Gleichgewichtszustand erreicht, so kann man eine im Innern des Leiters gedachte Ladung beliebig verschieben, ohne daß dazu ein Aufwand an Arbeit erforderlich wäre, denn das Produkt Kraft · Weg ist immer Null. (Wir denken uns hierbei die verschobene Ladung so klein, daß sie das elektrische Gleichgewicht nicht merklich beeinflußt.) Eine im Innern des Leiters befindliche Ladung hat also, wenn sich der Leiter im elektrostatischen Gleichgewicht befindet, überall die gleiche potentielle Energie. Auf die Ladungseinheit bezogen, bedeutet dies, daß das Potential im Innern eines Leiters überall das gleiche ist.

Das Innere eines im elektrischen Gleichgewicht befindlichen Leiters ist immer ein Raum konstanten Potentials.

Infolgedessen gilt auch:

Die Oberfläche eines im elektrostatischen Gleichgewicht befindlichen Leiters ist immer eine Fläche konstanten Potentials (Äquipotentialfläche). Denn auch zur Verschiebung einer Ladung längs der Oberfläche, also senkrecht zur dort herrschenden Kraft, ist Arbeit nicht erforderlich.

Herrscht im Innern eines Leiters überall die Feldstärke Null, so bedeutet das, daß die Kraftlinien, welche von etwa auf seiner Oberfläche befindlichen Ladungen ausgehen, sämtlich in den Raum außerhalb des Leiters austreten, aber nicht in das Innere. Und zwar stehen sie, wie gesagt, senkrecht auf der Oberfläche des Leiters. Diese ist ja eine Fläche gleichen Potentials. An diesem Zustande ändert sich nichts, wenn wir uns einen solchen Leiter ausgehöhlt denken, so daß er etwa aus einem rings geschlossenen Hohlkörper aus Blech besteht. Auch in dem von dem leitenden Hohlkörper umschlossenen Hohlraum herrscht überall — infolge des Fehlens von Kraftlinien — die Feldstärke Null und infolgedessen überall das gleiche Potential, wie es auf der Oberfläche des umschließenden Leiters besteht.

Diese Tatsache findet eine wichtige praktische Anwendung. Man schützt empfindliche Apparate vor äußeren elektrischen Störungen, indem man sie mit einem rings geschlossenen oder höchstens mit kleinen Beobachtungs- und Zuführungsöffnungen versehenen Metallkasten (FARADAY-Käfig) umgibt, den man mit der Erde leitend verbindet. Es können dann die Kraftlinien etwaiger äußerer elektrischer Felder nicht störend in das Innere des Kastens bis zu dem geschützten Instrument vordringen (elektrostatischer Schutz). In vielen Fällen genügt es auch schon, wenn man den Apparat mit einem nicht zu weitmaschigen Käfig aus Drahtnetz umgibt. In diesem Falle treten zwar einzelne Kraftlinien

durch die Maschen des Netzes, biegen aber in nächster Nähe des Netzes auf dieses zurück, so daß das Innere von Kraftlinien, also von elektrischen Feldern, weitgehend frei bleibt.

225. Sitz der Ladung eines Leiters an dessen Oberfläche. Wenn im Innern eines geladenen Leiters im Gleichgewichtszustand keine Kraftlinien verlaufen, sondern solche erst von der Oberfläche nach außen hin ausgehen, so bedeutet dies, daß seine Ladung (genauer ein Überschuß von Ladung eines Vorzeichens über solche entgegengesetzten Vorzeichens) sich lediglich an der Oberfläche befindet. Denn befänden sich Ladungen eines Vorzeichens an einer Stelle im Innern im Überschuß, so müßten auch Kraftlinien von ihnen ausgehen und im Innern verlaufen.

(Strenggenommen, gibt es auch im Innern eines Leiters stets elektrische Felder, nämlich solche, welche zwischen benachbarten atomaren Bestandteilen des Leiters, den Atomkernen und Elektronen, infolge ihrer elektrischen Ladungen verlaufen. Diese haben aber Anfang und Ende im Innern des Leiters und erstrecken sich nur über atomare Bereiche, sind also nach außen hin nicht wirksam, weil im Innern überall gleich viel positive und negative Ladung vorhanden ist. Lediglich an der Oberfläche kann dauernd in Bereichen, die groß sind gegen die Abstände der einzelnen Atome, ein Überschuß der einen Ladung über die andere herrschen, der nach außen hin wirkt. Wenn also von dem Fehlen von Ladungen im Innern eines Leiters gesprochen wird, so bedeutet das tatsächlich, daß sich in Volumelementen, die im gewöhnlichen Sinne sehr klein, aber gegenüber den gegenseitigen Abständen der Atome groß sind, keine Ladung eines Vorzeichens im Überschuß befindet.)

Zum Nachweis der Tatsache, daß die Ladung eines Leiters nur auf dessen Oberfläche sitzt, bedient man sich z. B. eines metallischen Gefäßes mit einer engen Öffnung, durch die eine isolierte Metallkugel gerade frei eingeführt werden kann[1] (Abb. 190). Das Gefäß wird isoliert aufgestellt und geladen. Berührt man das Gefäß von außen mit der isolierten Metallkugel und bringt diese dann in Berührung mit einem Elektroskop, so erweist sie sich als geladen. Führt man jedoch die Probekugel ins Innere und berührt die Innenwand des Gefäßes, so ist die Kugel nach dem Herausziehen ungeladen.

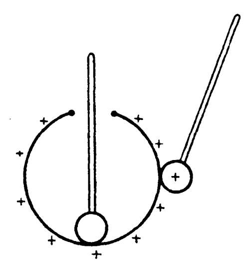


Abb. 190. Nachweis, daß die Ladung eines Leiters nur auf der Außenseite sitzt.

Ist umgekehrt anfänglich die Probekugel geladen, der hohle Metallkörper aber nicht, so kann man durch Berühren der Außenseite des letzteren mit der geladenen Kugel deren Ladung nicht vollständig auf ihn überführen, da die Kugel bei der Berührung einen Teil seiner äußeren Oberfläche bildet, also ein Teil der Ladung auf ihr sitzen bleibt. Um die Kugel an dem hohlen Metallkörper völlig zu entladen, muß man sie in das Innere desselben bringen.

Man stelle ein Blättchenelektroskop in das Innere eines isoliert aufgestellten Drahtkäfigs und verbinde die Blättchen durch einen Draht mit dem Käfig. Bei noch so starker Ladung des Käfigs zeigen die Blättchen keinen Ausschlag. Ebensowenig zeigt ein isoliert aufgestelltes, mit einem Metallgehäuse versehenes geladenes Elektroskop einen Ausschlag, wenn man die Blättchen mit dem Metallgehäuse leitend verbindet. In beiden Fällen gelangt, auch bei hoher Aufladung des Ganzen, keine Ladung auf die Blättchen.

[1] Die Öffnung darf keine scharfen Kanten haben, da sonst beim Hindurchführen der Kugel die Ladung auf diese überströmt (Spitzenentladung durch die Luft, § 226).

226. Spitzenwirkung. Abb. 191 zeigt die Flächen gleichen Potentials an einer aus einem geladenen Leiter herausragenden metallischen Spitze. Man sieht, daß diese Flächen in der Nähe der Spitze sehr dicht beieinander liegen, daß also hier ein besonders starkes elektrisches Feld herrscht. Die Feldstärke kann so groß werden, daß eine Entladung des Körpers durch die Luft stattfindet, dieser also seine Ladung an die umgebenden Körper verliert (Spitzenwirkung, § 288). Die wichtigste technische Anwendung der Spitzenwirkung ist der von BENJAMIN FRANKLIN (1750) erfundene Blitzableiter. Infolge der an ihm auftretenden Spitzenwirkung bietet er dem Blitz einen bequemen Übergang zur Erde dar. Sein Nutzen besteht darin, daß er den Blitz auf einem unschädlichen Wege zur Erde ableitet und den Einschlag an unerwünschter Stelle verhindert. (Die manchmal angenommene blitzverhindernde Wirkung, die darin bestehen soll, daß ein Blitzableiter einen allmählichen und unschädlichen elektrischen Ausgleich zwischen der Erde und den Wolken herbeiführt und dadurch das Auftreten von Blitzen verhindert, dürfte wegen der Größe der auszugleichenden Ladungen kaum in Betracht kommen.)

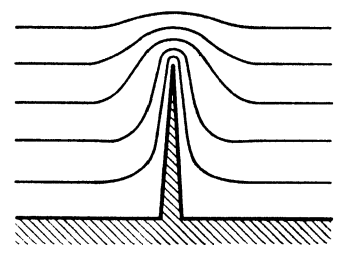


Abb. 191. Flächen gleichen Potentials an einer Spitze.

227. Influenz. Wird ein ungeladener Leiter in ein elektrisches Feld gebracht, z. B. durch Annähern einer Ladung e (Abb. 192), so gilt wegen der Beweglichkeit der Elektronen nach wie vor die Gleichgewichtsbedingung des § 224. Das Innere eines Leiters ist bei elektrischem Gleichgewicht auch jetzt ein Raum gleichen Potentials. Es tritt zwar zunächst in seinem Innern ein elektrisches Feld auf, da seine einzelnen Teile sich in Gebieten verschiedenen Potentials befinden. Infolgedessen erfahren aber die in ihm enthaltenen Elektronen Verschiebungen, welche so lange andauern, bis sein elektrostatisches Gleichgewicht, welches durch das Feld gestört wurde, wieder hergestellt ist, d. h. bis die Ladungsverteilung im Innern des Leiters sich derart eingestellt hat, daß das von ihr herrührende Feld das äußere Feld in jedem Punkt im Innern des Leiters, indem es sich ihm überlagert, gerade aufhebt, und bis die Kraftlinien des Feldes überall auf der Leiteroberfläche senkrecht stehen. Die Summe der Ladungen ist auf dem anfänglich ungeladenen Leiter auch nach Herstellung der neuen Ladungsverteilung noch Null, aber die positiven und negativen Ladungen sind jetzt anders verteilt als ohne das Vorhandensein des äußeren Feldes. In einem Teil des Körpers befindet sich positive, im andern negative Ladung e' im Überschuß. Der Betrag von e' hängt davon ab, wieviele von den Kraftlinien des äußeren Feldes auf dem Leiter endigen. Er kann nie größer sein als e. Diese Erscheinung heißt Influenz. Abb. 192 zeigt die Influenz, die an einem Leiter im Felde einer Ladung $+e$ eintritt. Der Leiter wird durch die Influenzwirkung zu einem elektrischen Dipol (§ 214); er wird, wie man auch sagt, polarisiert.

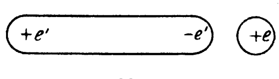


Abb. 192. Influenz durch eine Ladung.

Wird das linke Ende des Leiters (Abb. 192), in dem die Influenzwirkung stattfindet, leitend mit der Erde verbunden, so strömt die an diesem Ende angesammelte Ladung zur Erde ab (genauer: es strömen Elektronen von der Erde her in den Leiter und neutralisieren die Ladung $+e'$), und der Leiter hat nach Trennung der leitenden Verbindung mit der Erde einen, im Falle der Abb. 192 negativen, Ladungsüberschuß. Wir lernen hier ein wichtiges Verfahren kennen,

um elektrische Ladungen zu trennen (in etwas nachlässiger Ausdrucksweise: zu erzeugen, § 212). Man trennt die Ladungen in einem Leiter durch Influenz und läßt die Ladung eines Vorzeichens durch eine vorübergehend hergestellte leitende Verbindung zur Erde oder auf irgendeinen andern Leiter überfließen, so daß die Ladung des andern Vorzeichens allein auf dem Leiter zurückbleibt.

Eine isoliert aufgestellte metallische Kugel A werde etwa positiv geladen (Abb. 193). Alsdann nähere man ihr einen gleichfalls isolierten Metallzylinder B. In diesem wird sich dann die in Abb. 192 dargestellte Ladungsverteilung herstellen. Jetzt bringe man eine isolierte Metallkugel C an das der geladenen Kugel A zugekehrte Ende des Zylinders B (Abb. 193a). C bildet jetzt mit B zusammen einen zusammenhängenden Leiter, und die negative Ladung fließt in die Kugel C. Man kann mittels eines Elektroskops nachweisen, daß sie, wenn A positiv ist, negativ geladen ist. Ebenso kann man zeigen, daß sich nunmehr auf B eine positive Ladung befindet. Entlädt man jetzt den Zylinder B und wiederholt den gleichen Versuch aber so, daß man das von A abgewandte Ende von B mit der Kugel C berührt (Abb. 193b), so hat C eine positive und B eine negative Ladung.

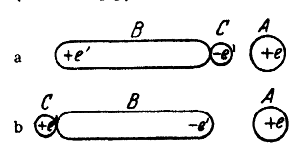


Abb. 193.
Zum Nachweis der Influenz.

Nähert man einen geladenen Körper, z. B. eine geriebene Glasstange, einem ungeladenen Elektroskop, ohne zu berühren, so zeigen die Blättchen einen Ausschlag, der bei Entfernung des geladenen Körpers wieder verschwindet. Dies ist eine Wirkung der Influenz auf die Stange mit den Blättchen (Abb. 194). Hiermit ist die Erklärung der Versuche 1 und 4 in § 217 gegeben.

Indem so im Innern eines in ein elektrisches Feld gebrachten Leiters das Feld durch die neu entstehende Ladungsverteilung zum Zusammenbrechen gebracht, d. h. durch das Feld der Influenzladungen genau kompensiert wird, überlagern sich auch im Außenraum die Wirkungen des influenzierenden Feldes mit denen des Feldes der Influenzladungen. Dies hat eine Verzerrung des Feldes in der Umgebung des Leiters zur Folge, die daher rührt, daß ein Teil der Kraftlinien an der Oberfläche des Leiters beginnen bzw. endigen und durch den Leiter auf einer gewissen Strecke unterbrochen sind. Abb. 195 zeigt, wie im Innern eines Leiters im Felde $\mathfrak{E}$ ein feldfreier Raum besteht, und wie im Außenraum die Kraftlinien des Feldes der Influenzladungen an den Enden mit denen des äußeren Feldes gleichsinnig verlaufen und das Feld dort verstärken, während sie ihnen an den Seiten entgegenlaufen und das Feld schwächen.

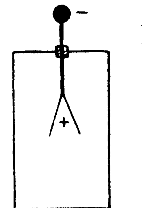


Abb. 194.
Influenz im Elektroskop.

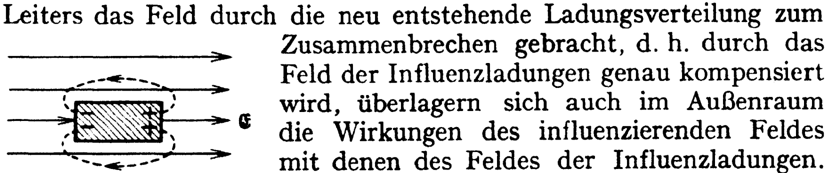


Abb. 195. Überlagerung der Kraftlinien in der Umgebung eines Leiters im homogenen Felde.

228. Kraftwirkungen elektrischer Felder auf Dipole und auf ungeladene Leiter. Befindet sich ein elektrischer Dipol in einem homogenen elektrischen Felde $\mathfrak{E}$, so wirken auf seine beiden „Pole", d. h. auf seine beiden entgegengesetzt gleichen Ladungen gleich große, entgegengesetzt gerichtete Kräfte, $+e\mathfrak{E}$ und $-e\mathfrak{E}$. Diese beiden Kräfte bilden also ein Kräftepaar, welches ein Drehmoment auf den Dipol ausübt, so daß er sich mit seiner elektrischen Achse in die Richtung der elektrischen Kraft einzustellen sucht (Abb. 196a). Ist l der Abstand (der Schwerpunkte) seiner beiden Ladungen $+e$ und $-e$, also sein elektrisches Moment (§ 214) $\mathfrak{M} = el$, so ist die Größe dieses Drehmoments $N = el\mathfrak{E}\sin\varphi = \mathfrak{M}\mathfrak{E}\sin\varphi$. Ein homogenes Feld hat also auf einen Dipol lediglich eine richtende, keine beschleunigende Wirkung.

Ist aber das Feld, in dem sich ein elektrischer Dipol befindet, inhomogen, so ist die Feldstärke am Ort seiner positiven und negativen Ladung im allgemeinen nicht die gleiche, sondern sowohl nach Größe wie nach Richtung verschieden (Abb. 196b). Die Summe der auf den Dipol wirkenden Einzelkräfte ergibt dann im allgemeinen Fall ein Kräftepaar und eine resultierende Einzelkraft R. Die letztere treibt den Dipol nach derjenigen Seite — wenn auch im allgemeinen Falle nicht genau in diejenige Richtung —, nach der die größere Feldstärke weist. Er bewegt sich in Richtung wachsender Feldstärke; er wird, wie man sagt, in das Feld hineingezogen.

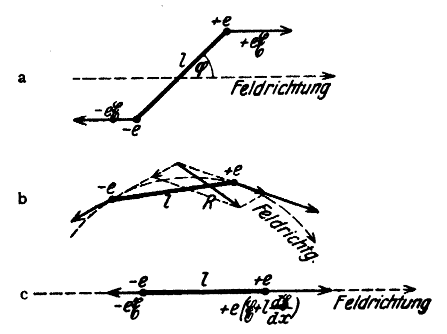


Abb. 196. Dipol a im homogenen, b und c im inhomogenen Felde.

Wir wollen den einfachen Fall betrachten, daß das Feld am Ort des Dipols überall die gleiche Richtung (x-Achse eines Koordinatensystems) habe und daß der Dipol mit seiner Achse bereits in der Feldrichtung liege (Abb. 196c). Die Stärke des Feldes nehme in der positiven Feldrichtung zu. Es sei $\mathfrak{E}$ die Feldstärke am Orte der negativen Dipolladung $-e$. Dann herrscht bei nicht zu schneller örtlicher Änderung der Feldstärke am Orte der Dipolladung $+e$ die Feldstärke $\mathfrak{E} + l\frac{d\mathfrak{E}}{dx}$. Die Resultierende der beiden entgegengesetzt gerichteten Kräfte liegt dann in Richtung des Feldes und hat die Größe

$$+e\left(\mathfrak{E} + l\frac{d\mathfrak{E}}{dx}\right) - e\mathfrak{E} = el\frac{d\mathfrak{E}}{dx} = \mathfrak{M}\frac{d\mathfrak{E}}{dx}\ \text{dyn}. \qquad (16)$$

Maßgebend für die auf den Dipol wirkende Kraft ist daher erstens nicht die Feldstärke selbst, sondern ihr Differentialquotient, ihr örtliches Gefälle. Die Kraft ist um so größer, je größer $d\mathfrak{E}/dx$, also je inhomogener das Feld ist. Zweitens hängt sie nicht von den Ladungen e an sich, sondern wieder von dem elektrischen Moment $\mathfrak{M}$ des Dipols ab. Wir sehen, daß für das Verhalten von Dipolen stets das Moment, nicht die Polstärke, die maßgebende Größe ist.

Bringt man einen ungeladenen Leiter in ein elektrisches Feld, so wird er, wie wir gesehen haben, durch Influenz zu einem elektrischen Dipol. Es muß daher auch für einen solchen das vorstehend Gesagte gelten. Ist das Feld homogen, so kann es nur eine drehende Wirkung auf den Leiter ausüben. Bei jedem länglich geformten Leiter muß das zur Folge haben, daß er sich mit seiner Längsachse in die Feldrichtung einzustellen sucht. Liegt er nämlich so im Felde, wie es Abb. 197a zeigt, und dreht er sich nur ein wenig aus dieser Lage heraus, so ändert sich sofort die Verteilung der Influenzladung auf ihm (Abb. 197b), so daß nunmehr ein ihn mit seiner Längsachse in die Feldrichtung drehendes Kräftepaar auftritt. Das Gleichgewicht der Abb. 197a ist labil und geht in das stabile Gleichgewicht über, bei dem die Längsachse des Leiters in der Feldrichtung liegt.

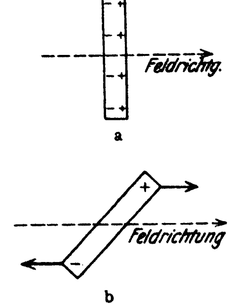


Abb. 197. Ungeladener Leiter im homogenen Felde.

Im inhomogenen Felde muß sich ein durch Influenz zu einem Dipol gewordener Leiter genau so verhalten wie der oben betrachtete Dipol. Auch er wird in Richtung wachsender Feldstärke getrieben, in das Feld hineingezogen. Sehr inhomogene Felder haben wir im allgemeinen in der

Nähe nicht sehr ausgedehnter geladener Körper. Die Feldstärke nimmt mit der Entfernung mehr oder weniger schnell ab. Die Folge ist, daß jeder ungeladene Leiter in Richtung auf die das Feld erzeugende Ladung getrieben wird, ein geladener Körper zieht einen ungeladenen Leiter an. Damit haben wir jetzt auch die Erklärung für die Beobachtung 1 beim elektrostatischen Grundversuch (§ 209) gefunden.

Wie wir später sehen werden (§ 502), sind die Moleküle elektrische (und oft auch magnetische) Dipole oder können durch elektrische Felder zu solchen werden. Daher finden die vorstehenden Überlegungen eine wichtige Anwendung bei der Erklärung der auf Moleküle wirkenden Kräfte.

Die Anziehung zwischen einem geladenen und einem ungeladenen Körper ist natürlich eine gegenseitige (drittes NEWTONsches Axiom). Steht daher eine Ladung der Oberfläche eines leitenden Körpers gegenüber, so wird sie von diesem angezogen. Man kann zeigen, daß diese Kraft so groß ist, wie wenn sich eine Ladung von entgegengesetztem Vorzeichen hinter der Oberfläche befände, und zwar im Falle einer Ebene eine gleich große Ladung am Orte des Spiegelbildes der Ladung. Man spricht daher von dem elektrischen Bild einer Ladung und nennt die anziehende Kraft die Bildkraft.

Aus dem Vorstehenden folgt, daß es zur Anstellung von quantitativ einwandfreien elektrostatischen Versuchen nötig ist, alle beteiligten Ladungen von leitenden Körpern und auch vom Erdboden möglichst entfernt zu halten, damit nicht durch die Bildkräfte störende Einflüsse auftreten.

Wir können jetzt auch die Wirkungsweise des Elektroskops etwas strenger fassen, als es früher geschehen ist. Bringt man auf den inneren, isolierten Teil des Elektroskops eine Ladung, so erzeugt sie durch Influenz eine Influenzladung entgegengesetzten Vorzeichens auf der Innenwand des leitenden und mit der Erde verbundenen Gehäuses. Es verlaufen also alle von den Blättchen ausgehenden Kraftlinien auf das Gehäuse hin, und im Raum innerhalb desselben, aber nicht zwischen den auf gleichem Potential befindlichen Blättchen, besteht ein elektrisches Feld. Die Kraft dieses Feldes ist es, die die Blättchen in der Richtung auf das Gehäuse treibt.

229. Kapazität. Es seien A und B zwei Leiter, die sich, von anderen Leitern weit entfernt, in einem gewissen Abstande voneinander befinden. Auf A befinde sich eine positive Ladung $+e$, auf B eine ebenso große negative Ladung $-e$. Alle von A ausgehenden elektrischen Kraftlinien endigen dann auf B, und es besteht zwischen A und B ein elektrisches Feld. Daraus folgt, daß zwischen A und B auch eine Spannung herrschen muß. Denn wir erhalten, wenn wir nach § 221 das Integral $U = -\int_A^B \mathfrak{E}_s ds$ für irgendeinen die Leiter verbindenden Weg s ausführen, einen bestimmten endlichen Wert der Spannung U. Und zwar hat der positiv geladene Leiter A gegenüber B eine positive Spannung. Nun ist aber die Feldstärke in jedem Punkt des die Leiter umgebenden Raumes dem Absolutbetrag e der auf ihnen befindlichen Ladungen proportional, so daß wir setzen können $\mathfrak{E}_s = -e \cdot \psi_s$, wobei die Größe ψ_s lediglich eine Funktion der Raumkoordinaten ist, d. h. sie hängt in jedem Raumpunkt nur von der geometrischen Konfiguration des Systems, — von der Gestalt und der gegenseitigen Lage der beiden Leiter —, ab. Es ist daher

$$U = e\int_A^B \psi_s ds = \frac{e}{C}, \quad \text{wobei} \quad \frac{1}{C} = \int_A^B \psi_s ds.$$

Für die durch vorstehende Gleichung definierte Größe C gilt das gleiche, was über die

Funktion ψ gesagt wurde, sie ist lediglich durch die geometrische Konfiguration des Leitersystems gegeben. Da die Spannung U unabhängig vom Wege s ist, über den das obige Integral ausgeführt wird, so ist auch C durch die vorstehende Gleichung eindeutig gegeben. Man nennt C die Kapazität des Leitersystems $A\,B$, und es ist also

$$\text{die Spannung zwischen } A \text{ und } B\colon\ U = \frac{e}{C} \tag{17a}$$

$$\text{bzw. der Betrag der Ladungen auf } A \text{ und } B\colon\ e = C\,U. \tag{17b}$$

Es besteht demnach zwischen zwei Leitern, welche gleich große, entgegengesetzte Ladungen tragen, eine dem Betrage dieser Ladungen proportionale Spannung (Gl. 17a). Durch Umkehrung der vorstehenden Überlegungen folgt aber sofort auch, daß auf zwei Leitern, zwischen denen eine Spannung herrscht, gleich große Ladungen entgegengesetzten Vorzeichens sitzen müssen, deren Betrag der Spannung proportional ist (Gl. 17b). Dabei ist vorausgesetzt, daß Kraftlinien nur zwischen den beiden Leitern verlaufen, aber nicht auch von ihnen nach anderen Körpern in der Umgebung.

Ein System von zwei Leitern besitzt die elektrostatische Einheit der Kapazität, wenn bei Anlegung einer Spannung gleich der elektrostatischen Spannungseinheit auf ihnen eine Ladung gleich der elektrostatischen Ladungseinheit auftritt. Diese Einheit der Kapazität heißt 1 cm. (Daß hier eine Länge als Einheit auftreten muß, kann man sich leicht klarmachen, wenn man bedenkt, daß $U \cdot e = e^2/C$ eine Arbeit, e^2/r^2 eine Kraft [§ 211] und Arbeit = Kraft × Weg ist.)

Die praktische Einheit der Kapazität ergibt sich, wenn man in der vorstehenden Definition die elektrostatischen durch die praktischen Einheiten (Volt, Coulomb) ersetzt. Sie heißt 1 Farad (F) bzw. 1 Mikrofarad (μF). Es ist

$$1 \text{ Farad} = 10^6 \text{ Mikrofarad} = 9 \cdot 10^{11} \text{ cm}.$$

Wir wollen die Kapazität in einem Sonderfall berechnen, und zwar für eine Kugel vom Radius R, die sich in sehr großem Abstande von anderen Leitern befinde. Die Kugel trage eine Ladung $+e$, und die anderen Leiter seien so weit entfernt, daß das Feld dieser Ladung am Ort der Leiter schon sehr schwach ist. Dann können wir ohne ins Gewicht fallenden Fehler diese entfernten Leiter durch eine zu unserer Kugel konzentrische leitende Hohlkugel vom Radius $R' \gg R$ ersetzt denken. Auf der Innenfläche dieser Hohlkugel entsteht durch Induktion von der Ladung $+e$ der Kugel eine gleich große Ladung $-e$, und alle von $+e$ ausgehenden Kraftlinien endigen auf $-e$. Die radial gerichtete Feldstärke beträgt im Abstande r vom Kugelzentrum $\mathfrak{E} = e/r^2$ (§ 223), und wir erhalten für die zwischen den Kugelflächen herrschende Spannung

$$U = -\int_{R'}^{R} \frac{e\,dr}{r^2} = e\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right)$$

oder da $R' \gg R$

$$U = \frac{e}{R} = \frac{e}{C}; \qquad C = R \text{ cm}, \tag{18}$$

wie man durch Vergleich mit Gl. 17a erkennt. Die Kapazität einer leitenden Kugel gegenüber einer weit entfernten leitenden Umgebung ist also im elektrostatischen Maßsystem gleich ihrem in Zentimeter gemessenen Radius. Das gilt z. B. schon recht genau für eine metallische Kugel gegenüber den Wänden eines Zimmers, wenn sie nur ausreichend weit von ihnen entfernt ist.

Der Radius der Erde beträgt 6370 km. Demnach hat die Erde gegenüber den anderen Himmelskörpern eine Kapazität von $6{,}37 \cdot 10^8$ cm oder rund 700 Mikrofarad.

230. Kondensatoren. Vorrichtungen, welche ihrer Kapazität wegen hergestellt und benutzt werden, bezeichnet man als Kondensatoren. In einzelnen einfachen Fällen kann man die Kapazität eines Kondensators leicht berechnen.

Eine praktisch besonders wichtige Kondensatorform ist der Plattenkondensator. Er besteht aus zwei im Abstande d voneinander befindlichen, meist gleich großen Metallplatten, deren Fläche F sei (Abb. 198).

Legt man an die beiden Platten eine Spannung U und sei C die Kapazität des Kondensators, so befindet sich auf der einen Platte die Ladung $e = + CU$, auf der andern eine gleich große negative Ladung. Ist der Plattenabstand d klein gegen die Dimensionen der Flächen F, so verlaufen die Kraftlinien dieser beiden Ladungen praktisch sämtlich senkrecht von einer Platte zur andern[1]). Auf der Flächeneinheit der Platten befinden sich die Ladungen $+e/F$ bzw. $-e/F$. Es laufen also von jedem Quadratzentimeter der positiven Platte $4\pi\, e/F$ Kraftlinien zur negativen Platte (§ 223). Daher ist die Feldstärke im Innern des Kondensators auch $\mathfrak{E} = 4\pi\, e/F$. Die beiden Platten sind als Leiter Äquipotentialflächen. Ihre Potentialdifferenz beträgt U. Dann besteht zwischen U und $\mathfrak{E}$ nach Gl. 8, § 219, von dem hier bedeutungslosen Vorzeichen abgesehen, die Beziehung $U = \mathfrak{E} d$. Es ergibt sich also

$$U = \frac{4\pi d}{F}\, e = \frac{e}{C}, \quad \text{und die Kapazität beträgt} \quad C = \frac{F}{4\pi d}. \qquad (19)$$

Man kann mehrere Kondensatoren durch geeignete Verbindung ihrer Platten in verschiedener Weise zusammenschalten und dadurch andere Kapazitätsbeträge herstellen. Es seien C_1 und C_2 zwei Kondensatoren (Abb. 199a), welche in der

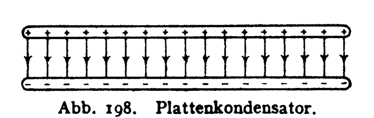


Abb. 198. Plattenkondensator.

a Abb. 199. b
a Kondensatoren in Reihenschaltung, b in Parallelschaltung.

dargestellten Weise miteinander leitend verbunden (in Reihe geschaltet) sind. Legt man an die beiden nicht miteinander verbundenen Kondensatorplatten eine Spannung U und sei C die Kapazität der Kombination, so erhalten diese Platten Ladungen vom Betrage $e = CU$. Durch Influenz aber laden sich auch die beiden miteinander verbundenen Platten auf die gleichen Ladungsbeträge $e = CU$ auf. Denn alle Kraftlinien, die in den Kondensatoren verlaufen, beginnen und endigen an den Platten. Seien U_1 und U_2 die Teilspannungen an C_1 und C_2, so folgt $U = U_1 + U_2 = e\,(1/C_1 + 1/C_2) = e/C$. Es ist daher $C = C_1 C_2/(C_1 + C_2)$. Dieser Ausdruck ist stets kleiner als C_1 und C_2 einzeln, z. B. wenn $C_1 = C_2$, $C = C_1/2$.

Abb. 199b stellt eine Parallelschaltung zweier Kondensatoren C_1 und C_2 dar. Legt man an diese Kombination die Spannung U, so tritt in C_1 die Ladung $e_1 = UC_1$, in C_2 die Ladung $e_2 = UC_2$ auf. Die Gesamtladung der Kom-

[1]) Tatsächlich sind bei einem Plattenkondensator die Kraftlinien am Rande ein wenig nach außen gekrümmt. Dies bewirkt eine geringe Vergrößerung der Kapazität, die aber um so weniger ins Gewicht fällt, je kleiner der Plattenabstand d gegenüber dem Durchmesser der Plattenflächen ist. Auch ist hier vorausgesetzt, daß sich in der nächsten Umgebung des Kondensators keine anderen Leiter befinden.

bination ist also $e = e_1 + e_2 = U(C_1 + C_2) = UC$, so daß die Kapazität des Systems $C = C_1 + C_2$ ist.

Kondensatoren von größerer Kapazität kann man so herstellen, daß man zwei voneinander isolierte Systeme von unter sich verbundenen parallelen Platten ineinandergreifen läßt. Macht man das eine Plattensystem drehbar, so daß es sich mehr oder weniger weit zwischen die Platten des andern Systems hineinschieben läßt, so erhält man einen Drehkondensator (Abb. 200) von veränderlicher Kapazität. Solche finden zu Meßzwecken und insbesondere auch in der drahtlosen Telegraphie und Telephonie (Rundfunkapparate) Verwendung.

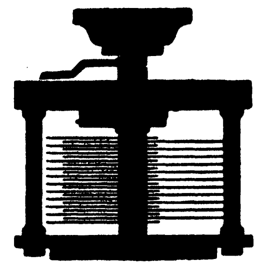


Abb. 200. Drehkondensator. (Aus POHL, Elektrizitätslehre.)

Technische Kondensatoren werden vielfach so hergestellt, daß man zwei lange Stanniolstreifen durch Streifen aus paraffingetränktem Papier gegeneinander isoliert und zwecks größerer Handlichkeit aufrollt. Man kann auf diese Weise große Flächen F und kleine Abstände d, also große Kapazitäten, erzielen. Der Einfluß, den das paraffinierte Papier (Dielektrikum) hat — bisher haben wir stets Luft als zwischen den Platten befindlich angenommen —, wird im § 234 erörtert werden.

Einer beliebigen Verkleinerung des Plattenabstandes ist durch die Bedingung eine Grenze gesetzt, daß das elektrische Feld ($\mathfrak{E} = U/d$) zwischen ihnen nicht so groß werden darf, daß schon bei nicht sehr hoher Spannung ein Durchschlag erfolgt.

Die gesamte Ladung, die sich auf den beiden Platten eines Kondensators befindet, ist wegen der gleichen Größe der positiven und negativen Ladung Null. Es ist aber üblich, als Ladung eines Kondensators den Betrag der Elektrizitätsmenge zu bezeichnen, welche sich auf jeder einzelnen ihrer Platten befindet. Man sagt also, daß ein Kondensator die Ladung e trägt, wenn sich auf seinen Platten die Ladungen $+e$ und $-e$ befinden.

231. **Das Elektrometer als Spannungsmesser.** Wir sind nunmehr in der Lage, die Wirkungsweise der in § 217 bereits kurz erwähnten Elektrometer genauer zu verstehen. Dabei sei vorweg bemerkt, daß man zwar mittels dieser Instrumente, wie in § 217 besprochen, Elektrizitätsmengen nachweisen und unter Umständen auch messen kann, daß aber ihr wichtigster Verwendungszweck die Messung von Spannungen ist.

Wenn man mit dem Elektrometer eine Spannung messen will, so legt man diese zwischen das isolierte bewegliche System (z. B. die Blättchen) und das Gehäuse des Elektrometers (Abb. 201). Letzteres wird stets mit der Erde leitend verbunden (geerdet). Damit ist das Innere des Elektrometers vor äußeren elektrischen Störungen geschützt (§ 225). Das Elektrometer mit seinen beiden voneinander isolierten Teilen (Blättchen einerseits, Gehäuse andrerseits) bildet eine Leiterkombination von der in § 229 betrachteten Art und hat als solche eine bestimmte Kapazität, die durch seine geometrischen Verhältnisse bedingt ist. Demnach befindet sich auf dem isolierten Teil nach Anlegen einer Spannung gegen das Gehäuse eine Ladung $e = CU$ und auf dem Gehäuse eine entgegengesetzt gleich große Ladung. Ein Teil der Ladung des isolierten Teils sitzt auf den beweglichen Blättchen, und da wegen der Spannung zwischen Blättchen und Gehäuse in dessen Innern ein elektrisches Feld besteht, so werden die geladenen Blättchen von diesem in Richtung auf das Gehäuse getrieben. (Es

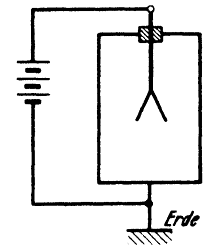


Abb. 201. Schema der Spannungsmessung mit dem Elektrometer.

liegt hier ein ganz analoger Fall zu der in § 233 zu besprechenden Anziehung der Platten eines Kondensators vor.) Nun wächst das elektrische Feld im Innern mit der angelegten Spannung U, und das gleiche gilt für die Ladung der Blättchen. Die auf die Blättchen wirkende Kraft ist dem Produkt aus Feldstärke und Ladung proportional, der Ausschlag wächst also mit der Größe der angelegten Spannung.

Ist das Elektrometer einmal mit Hilfe bekannter Spannungen geeicht, so kann es zur Messung von Spannungen dienen. Und zwar bleibt die einmal vorgenommene Spannungseichung auch dann noch gültig, wenn die Kapazität der an das Elektrometer angeschlossenen Gebilde (Zuleitungen usw.) sich ändert. Es geht zwar dann beim Anlegen einer Spannung eine andere Elektrizitätsmenge auf die Apparatur als Ganzes über, aber an den Verhältnissen innerhalb des Gehäuses ändert sich bei gleichbleibender Spannung nichts.

Natürlich kann man prinzipiell ein Elektrometer auch auf Elektrizitätsmengen eichen. Diese Eichung gilt aber nur, solange sich die Kapazität der mit den Blättchen leitend verbundenen Gebilde nicht ändert. Ist einmal eine bestimmte Elektrizitätsmenge auf das Elektrometer gebracht, so verteilt sie sich dort auf den Blättchenträger und die Zuleitungen im Verhältnis der betreffenden Kapazitäten. Ändert man nun dieses Verhältnis, so ändert sich auch die Verteilung und infolgedessen auch den Ausschlag, der nur von der Größe desjenigen Ladungsanteils abhängt, der auf die Blättchen entfällt. (Vgl. hierzu den in § 232 [Abb. 205] beschriebenen Versuch.)

Wir wollen im folgenden noch einige wichtigere Elektrometertypen kurz besprechen. Von dem Blättchenelektrometer ist bereits in § 217 die Rede gewesen. Zum gleichen Typus gehört prinzipiell auch das BRAUNsche Elektrometer (Abb. 202).

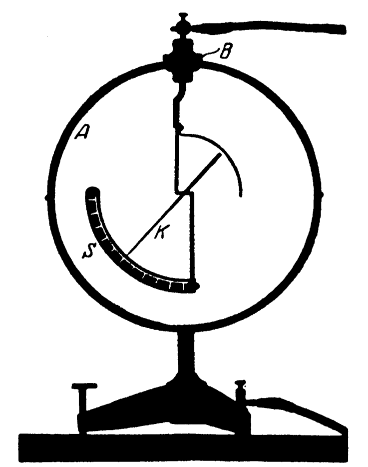


Abb. 202. BRAUNsches Elektrometer. (Aus POHL, Elektrizitätslehre.)

Das Quadrantelektrometer besteht aus einer in vier Quadranten Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 geteilten kreisförmigen metallischen Schachtel. Die Quadranten sind isoliert und durch schmale Zwischenräume voneinander getrennt (Abb. 203). Innerhalb der Schachtel hängt an einem sehr dünnen Metalldraht, Metallband oder metallisierten Quarzfaden der bewegliche Teil N des Instruments, den man auch hier als Nadel zu bezeichnen pflegt, ein etwa 8-förmiges Gebilde aus dünnem Aluminium oder metallisiertem Papier. Das Ganze ist in ein metallisches Gehäuse eingeschlossen. Die Quadranten sind zu je zwei kreuzweise miteinander leitend verbunden. Befindet sich auf dem einen Quadrantenpaar etwa eine positive, auf dem andern eine negative Ladung und ist ferner die Nadel ebenfalls geladen, so dreht sich diese aus ihrer natürlichen Ruhelage, je nach dem Vorzeichen ihrer Ladung, auf das positive oder negative Quadrantenpaar zu, und

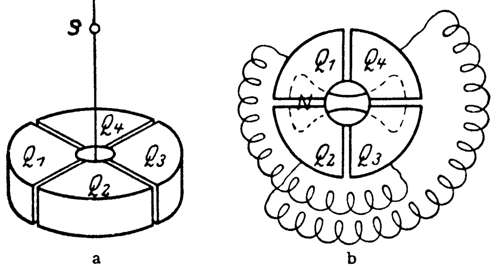


Abb. 203. Quadrantelektrometer. Schema.

zwar infolge der in der Aufhängung auftretenden zurücktreibenden Torsion um so weiter, je größer die Ladungen sind. Die Drehungen werden meist mittels Spiegelablesung, d. h. mit Hilfe eines mit der Nadel fest verbundenen Spiegelchens S gemessen. Es gibt noch eine größere Zahl verwandter Konstruktionen.

Bei den Saiten- oder Fadenelektrometern besteht der bewegliche Teil aus einem oder zwei feinen Platindrähten. Abb. 204 zeigt das Schema eines Zweifaden-Elektrometers. Den beiden Fäden K, welche zwecks Regulierung der Empfindlichkeit unten an einem verstellbaren Quarzbügel Q befestigt sind, stehen zwei metallische, mit dem Gehäuse verbundene Schneiden A gegenüber. Bei Aufladung spreizen sich die Fäden auseinander. Ihr Abstand wird mit einem Mikroskop mit Okularmikrometer abgelesen.

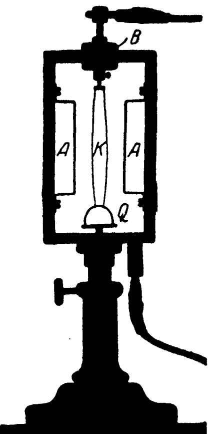
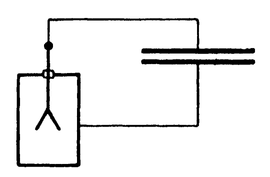


Abb. 204. Schema eines Zweifaden-Elektrometers. (Aus POHL, Elektrizitätslehre.)

232. Einige Versuche mit dem Plattenkondensator. Man verbinde die eine Platte eines Plattenkondensators, dessen Plattenabstand man verändern kann, oder das eine Plattensystem eines Drehkondensators mit den Blättchen eines Elektroskops, die andere Platte, bzw. das andere Plattensystem, mit dessen Gehäuse (Abb. 205), so daß die Kapazitäten des Kondensators und des Elektroskops parallel geschaltet sind (§ 230), sich also addieren, und bringe auf den Kondensator eine Ladung, deren Vorhandensein durch einen Ausschlag des Instruments angezeigt wird. Ändert man jetzt die Kapazität des Kondensators durch Änderung des Plattenabstandes bzw. Drehen des einen Plattensystems, so ändert sich auch der Ausschlag. Je kleiner die Kapazität des Kondensators ist, um so größer ist der Ausschlag. Denn die Ladung auf dem ganzen, aus Kondensator und Elektroskop bestehenden System, dessen Kapazität C sei, ist konstant, daher auch nach Gl. 17b, § 229, das Produkt UC. Die vom Elektroskop angezeigte Spannung U ist also bei gegebener Ladung e der Kapazität C des Systems umgekehrt proportional.


Abb. 205. Nachweis der Veränderlichkeit einer Kapazität.

Auf Grund dieser Tatsache kann man noch Spannungen mit einem wenig empfindlichen Elektroskop nachweisbar machen, die, wenn man sie ohne weiteres an das Instrument legen würde, ihrer Kleinheit wegen keinen beobachtbaren Ausschlag geben würden, z. B. die Spannung von etwa 2 Volt eines Akkumulators. Man benutzt dazu eine der Abb. 205 entsprechende Vorrichtung. Man mache zuerst die Kapazität des Kondensators so groß wie möglich. Dann verbinde man die eine Klemme des Akkumulators mit dem Gehäuse des Elektroskops; mit einem von der andern Klemme herkommenden Draht mit isolierter Handhabe berühre man kurz die Zuleitung zu den Blättchen. Der Kondensator und das Elektroskop sind jetzt auf 2 Volt aufgeladen, aber es zeigt sich kein meßbarer Ausschlag, weil die Spannung zu klein ist. Verkleinert man jetzt die Kapazität des Kondensators in ausreichendem Maße, zo zeigt sich ein solcher. Ist U die Spannung des Akkumulators und C_1 die Anfangskapazität des Systems Kondensator + Elektroskop, C_2 die Endkapazität, so ist zunächst die Elektrizitätsmenge $e = UC_1$ in das System geflossen. Diese ändert sich bei der Verkleinerung von C nicht, so daß auch $e = U'C_2$, wenn U' die Spannung nach Änderung der Kapazität bedeutet. Es ist also $U' = UC_1/C_2$. Ist z. B. $C_1/C_2 = 100$, so wird die Spannung auf das 100fache gesteigert. Man kann diesen Versuch leicht mit

einem gewöhnlichen Elektroskop und einem Drehkondensator von etwa 500 cm Kapazität, wie sie für Rundfunkapparate gebraucht werden, anstellen.

233. Die Energie eines geladenen Kondensators. Die Anziehung der Kondensatorplatten. Elektrische Energiedichte. Um die in einem geladenen Kondensator aufgespeicherte Energie zu berechnen, verfährt man am einfachsten so, daß man die Arbeit berechnet, die notwendig ist, um die Ladung des Kondensators schrittweise herzustellen. Dazu kann folgendes Gedankenexperiment dienen. Es herrsche in dem Kondensator bereits die Spannung U, seine Ladung sei also $e = CU$. Wir wollen jetzt seine Ladung um den sehr kleinen Betrag de vergrößern, indem wir der negativen Platte noch eine positive Ladung $+de$ entziehen und sie gegen die Richtung des im Kondensator bereits herrschenden Feldes $\mathfrak{E} = U/d$ auf die positive Platte bringen. (Oder richtiger: indem wir der positiven Platte Elektronen im Betrage de entziehen und sie gegen die Kraft des Feldes auf die negative Platte bringen. Der Effekt ist natürlich der gleiche.) Dazu ist nach Gl. 5, § 219, die Arbeit $dA = U de$ erg aufzuwenden. Wir erhalten demnach die Arbeit, die insgesamt notwendig ist, um den Kondensator von Null bis zur Ladung e aufzuladen, durch Integration

$$A = \int_0^e U\,de = \frac{1}{C}\int_0^e e\,de = \frac{1}{2}\frac{e^2}{C} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}eU \text{ erg}. \tag{20}$$

Auf der rechten Seite bedeutet jetzt U die Endspannung des Kondensators, $U = e/C$. A ist also der Betrag der in dem geladenen Kondensator aufgespeicherten Energie. Sie wird bei Entladung wieder frei.

Zwischen den Platten des geladenen Kondensators besteht wegen des entgegengesetzten Vorzeichens der Ladung seiner beiden Platten eine anziehende Kraft k, die wir aus Gl. 20 berechnen können. Es sei x der Abstand der beiden Platten eines Plattenkondensators. Wir vergrößern ihn jetzt um den Betrag dx. Dann ist die dabei zu leistende Arbeit $dA = k \cdot dx$ erg. Wir erhalten also k, indem wir aus Gl. 20 $k = dA/dx$ bilden, also

$$k = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\frac{e^2}{C}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}U^2 C\right) \text{ dyn}. \tag{21a}$$

Führen wir aus Gl. 19, § 230 (unter Ersetzung von d durch x), den Ausdruck für die Kapazität $C = F/4\pi x$ ein, so ist $A = e^2 \cdot \frac{2\pi x}{F}$ und

$$k = \frac{2\pi e^2}{F} = \frac{2\pi C^2 U^2}{F} = \frac{F}{8\pi x^2} \cdot U^2 = \frac{F}{8\pi} \cdot \mathfrak{E}^2, \tag{21b}$$

da $U/x = \mathfrak{E}$ die Feldstärke im Kondensator ist.

Daß die Kraft k bei gegebener Ladung e ($k = 2\pi e^2/F$) nicht vom Plattenabstande abhängt, erklärt sich ohne weiteres dadurch, daß sich ja bei einer Änderung des Abstandes die Zahl der im Kondensator verlaufenden Kraftlinien, also die Feldstärke im Kondensator, nicht ändert. Und diese ist es, die die Kraft auf die Ladungen der Platten ausübt. (Dabei ist allerdings von der Randwirkung [§ 230, Fußnote] abgesehen, die bewirkt, daß die Kraft mit Vergrößerung des Abstandes tatsächlich allmählich abnimmt.) Die Spannung zwischen den Platten wächst bei konstanter Ladung proportional mit dem Abstande. Bei konstanter Spannung dagegen nimmt die Kraft mit zunehmendem Abstande wie $1/x^2$ ab. Denn je größer der Abstand ist, um so kleiner ist die Kapazität und sind damit die Ladungen und die zwischen ihnen wirkenden Kräfte.

Die zwischen den Platten eines geladenen Plattenkondensators wirkende Kraft kann dazu dienen, Spannungen auf rein mechanischem Wege zu messen. Man verfährt dabei so, daß man die eine Platte an eine Wage hängt und ihr die andere fest gegenüberstellt. Die Anziehung der ersten Platte durch die zweite wird gemessen, indem man sie durch Auflegen von Gewichten auf die andere Seite der Wage kompensiert (Potentialwage, absolutes Elektrometer von W. THOMSON). Es ist dann nach Gl. 21b $U^2 = 8\pi x^2 k/F$.

Bei der obigen Ableitung der in einem Kondensator aufgespeicherten Energie haben wir uns vorgestellt, daß Ladungsträger von der einen Platte des Kondensators zur andern überführt werden. An den Ladungsträgern an sich ist dabei keinerlei Veränderung vorgegangen. Was sich geändert hat, ist die Feldstärke im Kondensator, hier liegt also die eigentliche Veränderung, und es ist demnach folgerichtig, als Sitz der im Kondensator aufgespeicherten Energie das elektrische Feld zwischen seinen Platten zu betrachten. (Ebenso wie die Energie, die in einem aus zwei durch eine gespannte Feder verbundenen Massen bestehenden System enthalten ist, ihren wirklichen Sitz in der Feder hat.) Setzen wir in Gl. 20 $C = F/4\pi d$, so ist die Feldenergie im Kondensator $A = FU^2/8\pi d$ erg. Ist $\mathfrak{E}$ die Feldstärke im Kondensator, so ist $U = \mathfrak{E} d$ und $A = \frac{1}{8\pi}\mathfrak{E}^2 \cdot Fd$ erg. Nun ist aber Fd das Volumen des felderfüllten Raumes zwischen den Kondensatorplatten. Demnach ist der auf die Volumeinheit des Feldes entfallende Energiebetrag, die Energiedichte des Feldes,

$$\varrho_e = \frac{1}{8\pi}\mathfrak{E}^2 \text{ erg} \cdot \text{cm}^{-3}. \tag{22}$$

Diese Gleichung gilt allgemein für jedes elektrische Feld im Vakuum (vgl. aber § 234, Gl. 26).

234. Dielektrika. Dielektrische Polarisation. Bisher haben wir im allgemeinen stillschweigend angenommen, daß sich zwischen den Platten eines Kondensators Luft befindet. Bringt man statt dessen einen andern Isolator zwischen die Platten, so ändert sich die Kapazität. Zum Nachweis können wir uns der in Abb. 205 dargestellten Versuchsanordnung bedienen. Der Kondensator sei geladen, so daß das Elektroskop einen Ausschlag zeigt. Jetzt bringen wir zwischen die Platten des Kondensators eine Glas- oder Hartgummiplatte. Der Ausschlag des Elektroskops wird kleiner, ein Beweis, daß — ebenso wie bei einer Annäherung der Platten — die Kapazität größer geworden ist. Die gleiche Erscheinung zeigt sich bei derEinführung aller isolierenden Materialien (Dielektrika), aber in verschieden starkem Grade. Wird das Dielektrikum wieder entfernt, so stellt sich der frühere Ausschlag wieder her, ein Beweis, daß die Ladung des Kondensators sich nicht geändert hat.

Diese Erscheinung erklärt sich auf folgende Weise: Auch die Dielektrika sind aus elektrisch geladenen, atomistischen Bestandteilen aufgebaut, enthalten aber keine frei beweglichen Ladungsträger wie die Metalle und die anderen leitenden Substanzen. Bei einem festen Dielektrikum werden die atomistischen Ladungsträger in ihren Ruhelagen durch atomare elektrische Kräfte festgehalten und durch elektrische Kräfte aus diesen nur ein wenig herausbewegt, um so mehr, je stärker das auf sie wirkende elektrische Feld ist. Daher hat ein solches Feld zur Folge, daß sich die positiv elektrischen Bestandteile des festen Dielektrikums ein wenig in der Richtung des Feldes, die negativen etwas gegen dieselbe verschieben, so daß an den Grenzflächen Oberflächenladungen auftreten. Die Wirkung einer solchen Verschiebung ist grob schematisch in Abb. 206 dargestellt. Die Erscheinung heißt dielektrische Polarisation (FARADAY 1837).

In einem flüssigen oder gasförmigen Dielektrikum sind die Moleküle nicht an eine feste Ruhelage gebunden, auch sind sie elektrisch neutral, d. h. die Summe ihrer positiven und negativen Elementarladungen ist Null. Daher übt ein homogenes elektrisches Feld, d. h. ein solches, dessen Kraftlinien parallel verlaufen, keine fortbewegende Kraft auf sie aus. Aber der Schwerpunkt ihrer positiven und ihrer negativen Ladungen liegt im elektrischen Felde nicht an der gleichen Stelle des Moleküls. Ein Molekül bildet entweder schon an sich einen elektrischen Dipol oder wird unter der Wirkung des Feldes zu einem solchen. Da seine Ladungen durch ein auf sie wirkendes homogenes elektrisches Feld mit gleich großer Kraft nach entgegengesetzter Richtung getrieben werden, so wirkt auf einen solchen Dipol ein Drehmoment, welches ihn so einzustellen sucht, daß die Verbindungslinie des negativen mit dem positiven Ladungsschwerpunkt in Richtung des elektrischen Feldes liegt. Die Wirkung einer solchen Richtung der molekularen Dipole ist offenbar derjenigen in einem festen Dielektrikum, wie sie in Abb. 206 dargestellt ist, analog. Es ist augenscheinlich, daß die thermische Bewegung der Moleküle der richtenden Kraft des Feldes ordnungszerstörend entgegenwirkt. Die Dielektrizitätskonstante (s. u.) der Gase und Flüssigkeiten ist daher, wenigstens bei denjenigen Stoffen, deren Moleküle von Natur Dipole sind, von der Temperatur abhängig.

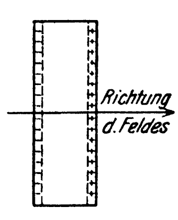
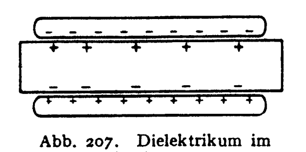


Abb. 206. Zur Theorie der dielektrischen Polarisation.

Befindet sich ein Dielektrikum zwischen den Platten eines geladenen Kondensators, so findet in ihm durch das in dem Kondensator herrschende Feld eine dielektrische Polarisation statt. An der der positiven Platte zugekehrten Seite entsteht eine fest am Dielektrikum haftende negative, an der negativen Platte eine entsprechende positive Oberflächenladung, also eine Ladungsverteilung, die im Dielektrikum ein Feld hervorbringt, das dem Feld der auf dem Kondensator befindlichen Ladung gerade entgegengesetzt gerichtet ist, dieses also zum Teil aufhebt (Abb. 207).


Abb. 207. Dielektrikum im Kondensator.

Die Oberflächenladungen e' des Dielektrikums sind der Ladung e des Kondensators proportional, $e' = \alpha e$. Die Größe α ist ein Maß für die Verschiebbarkeit der Ladungsträger im Dielektrikum. Das von der Ladung des Kondensators herrührende Feld beträgt nach § 230 $\mathfrak{E}_0 = 4\pi e/F$, das von der Ladung e' herrührende Feld $\mathfrak{E}' = -4\pi e'/F = -4\pi\alpha e/F = -\alpha\mathfrak{E}_0$. Durch die Überlagerung dieser beiden Felder entsteht im Kondensator ein Feld von der Stärke

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 + \mathfrak{E}' = \mathfrak{E}_0(1-\alpha) = \frac{1}{\varepsilon}\mathfrak{E}_0 .$$

$\varepsilon = 1/(1-\alpha)$ heißt die Dielektrizitätskonstante des Dielektrikums. So ergibt sich die zwischen den Platten des Kondensators herrschende Spannung zu

$$U = \mathfrak{E} d = \frac{1}{\varepsilon}\mathfrak{E}_0 d = \frac{U_0}{\varepsilon}, \tag{23}$$

wenn U_0 die Spannung bedeutet, die der Kondensator ohne das Dielektrikum bei gleicher Ladung e haben würde. Es sei C_0 die Kapazität des Kondensators ohne, C diejenige mit Dielektrikum. Dann ist bei gleicher Ladung e

$$e = U_0 \cdot C_0 = U \cdot C = \frac{1}{\varepsilon} U_0 \cdot C, \tag{24}$$

so daß

$$C = \varepsilon C_0 . \tag{25}$$

Der kleinste Wert, den ε annehmen kann, ist 1, wenn nämlich die molekularen Ladungsträger überhaupt nicht verschiebbar sind ($\alpha = 0$) — was bei wirklichen Stoffen streng nie vorkommt — oder wenn gar keine solchen Ladungsträger vorhanden sind. Dieser Fall liegt nur beim Vakuum vor. Die Dielektrizitätskonstante des Vakuums hat also den Wert 1. Der höchste Wert, den α annehmen kann, ist 1, dann wird nämlich $e' = e$. In diesem Falle ist die Dielektrizitätskonstante $\varepsilon = \infty$. Das ist der Grenzfall, daß sich ein Leiter zwischen den Platten befindet. Die Dielektrizitätskonstanten aller wirklichen Körper sind also größer als 1. In der Tabelle 19 sind einige Dielektrizitätskonstanten zusammengestellt:

Tabelle 19. Dielektrizitätskonstanten.

Paraffinöl	2,2	Glimmer	6—8
Petroleum	2,0	Hartgummi	2,7
Wasser	81	Luft	1,0006
Bernstein	2,8	Vakuum	1,0000
Glas	5—7		

Alle Gase haben, wie die Luft, eine von 1 nur sehr wenig verschiedene Dielektrizitätskonstante. Es macht daher nur äußerst wenig aus, ob sich Luft oder Vakuum zwischen den Platten eines Kondensators befindet. Glimmer ist mit seiner hohen Dielektrizitätskonstanten (und auch aus sonstigen Gründen) zur Herstellung von Kondensatoren besonders geeignet und wird daher zu diesem Zweck viel verwandt. Zur Erhöhung der Kapazität von technischen Kondensatoren wird vielfach eine Ölfüllung verwandt. Das ist außerdem auch deshalb vorteilhaft, weil durch das Öl hindurch ein Funkenübergang (Durchschlag) erst bei höheren Feldstärken stattfindet als durch Luft. Man kann daher an solche Kondensatoren höhere Spannungen anlegen als an Luftkondensatoren. Ein Kondensator mit Dielektrikum (Glas) ist auch die älteste Kondensatorform, die bekannte Leidener oder Kleistsche Flasche (Abb. 208).

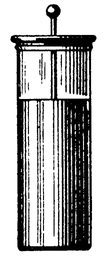


Abb. 208. Leidener Flasche.

Gewisse bei Zimmertemperatur nichtleitende feste Stoffe besitzen die Eigenschaft, im geschmolzenen Zustande im elektrischen Felde eine Polarisation anzunehmen, die fixiert werden kann, wenn man den Stoff im Felde wieder erstarren läßt. Der Körper behält dann auch nach Aufhören der Feldwirkung noch eine Polarisation, d. h. sein eines Ende bleibt positiv, sein andres negativ geladen. Man kann auf diese Weise Stäbe herstellen, die ein gewisses elektrisches Analogon zu einem Magneten bilden und deshalb Elektret genannt werden.

Da die Ladung eines Kondensators mit Dielektrikum bei gegebener Spannung U um den Faktor ε größer ist als im Vakuum, so ist auch die Arbeit, die zu seiner Aufladung auf diese Spannung aufgewendet werden muß, um diesen Faktor größer. Hieraus ergibt sich leicht, daß auch die elektrische Energiedichte (§ 233) im Felde $\mathfrak{E}$ bei Anwesenheit eines Dielektrikums εmal größer ist als im Vakuum. Statt der Gl. 22 ist also allgemeiner zu schreiben

$$\varrho_e = \frac{\varepsilon}{8\pi}\,\mathfrak{E}^2\,\mathrm{erg}\cdot\mathrm{cm}^{-3}\,. \qquad (26)$$

235. Dielektrische Verschiebung. Wir haben in § 234 mit $\mathfrak{E}_0 = \frac{4\pi e}{F}$ die Feldstärke bezeichnet, die im Kondensator bei der Ladung e herrschen würde, wenn sich zwischen seinen Platten kein materielles Dielektrikum, sondern Vakuum befinden würde. Es ist üblich, für diese Größe nicht $\mathfrak{E}_0$, sondern $\mathfrak{D}$ zu

schreiben, und es ist demnach in einer Substanz von der Dielektrizitätskonstante ε

$$\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}. \tag{27}$$

Nach § 234 beträgt die Ladung eines auf die Spannung U aufgeladenen Plattenkondensators

$$e = \varepsilon \frac{F}{4\pi} \frac{U}{d} = \varepsilon \frac{F}{4\pi} \mathfrak{E} = \frac{F}{4\pi} \mathfrak{D}. \tag{28}$$

Diese Ladung fließt beim Anlegen der Spannung in ihn hinein. Sie ist der Größe $\mathfrak{D}$ proportional, und deshalb bezeichnet man $\mathfrak{D}$ als die dielektrische Verschiebung im Kondensator. Jedoch ist dieser Begriff nicht auf den Kondensator beschränkt, sondern er wird gemäß Gl. 27 in allen Fällen angewandt, wo in einem Dielektrikum ein Feld $\mathfrak{E}$ besteht. Im Vakuum ist $\mathfrak{D} = \mathfrak{E}$, in allen andern Fällen aber größer als $\mathfrak{E}$.

236. **Verallgemeinerung des COULOMBschen Gesetzes.** Eine Ladung e sei in ein Medium der Dielektrizitätskonstante ε eingebettet. Im Felde der Ladung tritt eine dielektrische Polarisation des umgebenden Dielektrikums ein, und genau wie im Kondensator tritt an der Grenzfläche des Dielektrikums gegen die Ladung eine Ladung $-\alpha e = -(1 - 1/\varepsilon)e$ auf. Das Feld dieser Ladung überlagert sich dem Felde der Ladung e im Außenraume und schwächt es. Es bleibt nur die Wirkung der Ladung $e - (1 - 1/\varepsilon)e = e/\varepsilon$ übrig. Infolgedessen wird die auf eine im Felde befindliche zweite Ladung e' wirkende Kraft durch die Anwesenheit des Dielektrikums auf den Bruchteil $1/\varepsilon$ derjenigen Größe geschwächt, die die Kraft hat, wenn sich die beiden Ladungen im Vakuum befinden. Die Gl. 2, § 211, stellt also nur den Spezialfall des COULOMBschen Gesetzes im Vakuum dar ($\varepsilon = 1$). Das allgemeine COULOMBsche Gesetz lautet

$$k = \frac{1}{\varepsilon} \frac{e e'}{r^2} \text{ dyn}. \tag{29}$$

(Daß auch die Ladung e' sich mit einer Hülle von Polarisationsladung umgibt, hat auf die Kraftwirkung auf e' keinen Einfluß.)

237. **Kraftwirkung elektrischer Felder auf Dielektrika.** Befindet sich ein dielektrischer Körper in einem elektrischen Felde, so wird er durch die dielektrische Polarisation zu einem elektrischen Dipol. Es gilt daher das gleiche, was in § 228 über die Wirkung elektrischer Felder auf Dipole gesagt ist, sofern sich der dielektrische Körper im Vakuum befindet. Ist jedoch der ihn umgebende Körper ein zweites Dielektrikum, so hängt die Größe und Richtung der auf ihn wirkenden drehenden oder beschleunigenden Kräfte davon ab, ob seine Dielektrizitätskonstante größer oder kleiner ist als die des umgebenden Mediums. Ist sie größer, so bestehen qualitativ die gleichen Verhältnisse wie bei einem ungeladenen Leiter im elektrischen Felde. Im homogenen Felde stellt er sich mit seiner Längsachse in die Feldrichtung ein, im inhomogenen Felde bewegt er sich in Richtung wachsender Feldstärke. Ist jedoch seine Dielektrizitätskonstante die kleinere, so stellt er sich im homogenen Felde mit seiner Längsachse senkrecht zur Feldrichtung, im inhomogenen Felde wird er in Richtung abnehmender Feldstärke beschleunigt, also aus dem Felde herausgetrieben.

238. **Piezo- und Pyroelektrizität. Elektrostriktion.** Die Kristalle bestehen, wie im § 528 ausführlicher auseinandergesetzt wird, aus gitterartig angeordneten Atomen oder aus Ionen entgegengesetzter Ladung. Wir haben bereits bei der dielektrischen Polarisation gesehen, daß eine durch elektrische Kräfte hervorgerufene Verschiebung der positiven und negativen Ladungen eines solchen Gitters das Auftreten von Ladungen an den Grenzflächen eines Kristalls bewirkt. Das

gleiche kann auch durch mechanische Einwirkungen geschehen. Es gibt Kristalle, z. B. Quarz, bei denen an der Oberfläche Ladungen, also eine Polarisation, auftreten, wenn man sie durch Druck deformiert. Die Polarisation ist dem Druck proportional. Diese Erscheinung heißt Piezoelektrizität. Eine ähnliche Wirkung kann auch eine Erwärmung eines Kristalls haben (Pyroelektrizität). Zum Nachweis dieser Ladungen bestäubt man den Kristall z. B. mit einem Gemisch von Schwefel- und Mennigepulver. In einem solchen ist durch Berührung (Reibung, § 262) der Schwefel negativ, die Mennige positiv elektrisch. Daher haftet das gelbe Schwefelpulver an den positiv elektrischen, das rote Mennigepulver an den negativ elektrischen Stellen der Kristalloberfläche.

Die Piezoelektrizität hat ein Gegenstück. Nicht nur bewirkt bei piezoelektrischen Körpern eine elastische Deformation eine Polarisation, sondern umgekehrt bewirkt auch eine durch ein elektrisches Feld, also durch eine an den Körper gelegte Spannung, erzwungene Polarisation eine elastische Deformation des Körpers (Elektrostriktion), und zwar bei allen Dielektrika. Legt man an den Körper eine Wechselspannung (eine elektrische Schwingung), deren Frequenz gleich der elastischen Eigenfrequenz des Körpers ist, so gerät der Körper in mechanische Resonanz. Ein Beispiel hierfür ist der Quarz. Diese Erscheinung findet heute eine wichtige technische Anwendung zur Konstanthaltung der Wellenlänge von Rundfunksendern (Schwingkristall, Quarzresonatoren).

239. Elektrophor. Influenzmaschinen. Der Elektrophor ist ein Apparat zur Erzeugung (Trennung) elektrischer Ladungen. Er besteht aus einer Platte aus irgendeiner durch Reibung leicht zu elektrisierenden Masse[1]) (dem „Kuchen") und einer Metallplatte (dem „Deckel") mit einem isolierenden Handgriff (Abb. 209). Der Kuchen wird durch Reiben oder noch besser Schlagen mit einem Katzenfell negativ elektrisiert. Stellt man den Deckel auf ihn, so tritt an seiner Unterseite durch Influenz positive, an seiner Oberseite negative Ladung auf. Leitet man letztere durch Berühren mit dem Finger zur Erde ab, so bleibt auf dem Deckel positive Ladung übrig, die man nun auf andere Körper übertragen kann. Da hierbei die Ladung des Kuchens nicht vermindert wird (sie befindet sich in der obersten Schicht und kann aus ihr nur sehr schwer austreten), so kann man diesen Versuch sehr oft wiederholen, ohne daß die Wirkung merklich abnimmt.

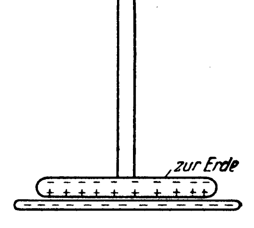


Abb. 209. Elektrophor.

Weit wirksamer als der Elektrophor sind die Influenzmaschinen. Die modernen Influenzmaschinen sind sehr kompliziert. Es soll daher lediglich eine einfache Vorrichtung besprochen werden, die praktisch nicht in Gebrauch ist, aber das Grundsätzliche gewisser Typen von Influenzmaschinen zu erläutern gestattet. Zunächst sei ein einfaches Gedankenexperiment vorausgeschickt (Abb. 210).

Zwei isolierte Metallplatten α und β werden im Felde eines geladenen Kondensators (A, K) miteinander in Berührung gebracht (a) und laden sich durch Influenz entgegengesetzt auf. Alsdann werden sie voneinander getrennt (b) und ihre Ladungen z. B. auf den Blättchenträger und die Außenhülle eines isoliert aufgestellten Elektroskops gebracht (c), welches die Ladungen durch einen Ausschlag anzeigt. Da aber die beiden Metallstücke bei dieser Berührung einen Teil der Oberflächen des Elektroskops bilden, geht ihre Ladung nicht vollständig auf dieses über (§ 225). Man entlädt nunmehr die beiden Metallstücke vollends, indem man sie in die beiden, an den Kondensatorplatten befestigten Blech-

[1]) Besonders empfohlen wird eine Mischung aus 2 Teilen Kolophonium und 1 Teil fein gepulvertem Gips.

taschen F_1 und F_2 steckt (d). Dabei wird die Ladung des Kondensators vergrößert. Man beachte, daß seine Ladung sich vorher noch nicht verändert hatte. Wiederholt man jetzt das gleiche Verfahren, so sind die Influenzladungen

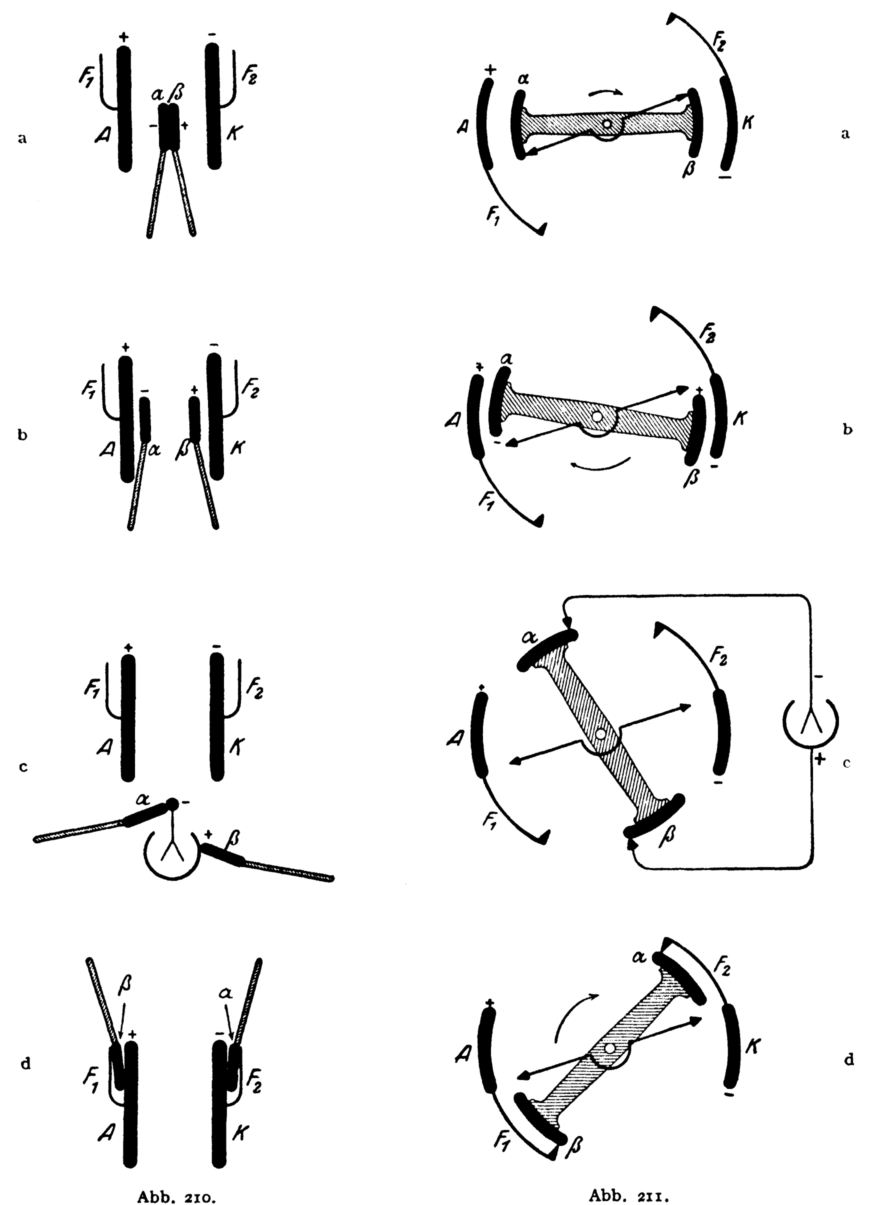


Abb. 210. Abb. 211.
Wirkungsweise einer Influenzmaschine nach dem Multiplikatorverfahren. (Aus Pohl, Elektrizitätslehre.)

der beiden Metallstücke ein wenig größer als beim ersten Male, da ja die Feldstärke im Kondensator gewachsen ist. So kann man prinzipiell die Ladung des Elektrometers durch fortgesetzte Wiederholung des Verfahrens beliebig steigern. Das Verfahren heißt „Multiplikation", weil die ursprünglich wirksame Ladung dabei ständig vergrößert wird.

Abb. 211 zeigt die gleichen Phasen in etwas größerer Annäherung an die Wirklichkeit bei einem rotierenden Apparat. A und K bilden den Kondensator. Die beiden Metallstücke α und β sitzen auf einer isolierenden Speiche und werden, wenn sie A und K gegenüberstehen, durch eine metallische Querverbindung in leitende Berührung miteinander gebracht (a). (Die Pfeilspitzen bedeuten gleitende Kontakte, etwa Büschel aus feinen Metallfäden.) Beim Weiterdrehen im Sinne des Uhrzeigers sind α und β durch Influenz entgegengesetzt geladen (b). Sie berühren dann zwei weitere Schleifkontakte, die zum Elektroskop führen (c) und geben schließlich (d) ihre noch verbleibende Restladung an die metallischen Verlängerungen F_1 und F_2 von A und K, die den Blechtaschen des vorhergehenden Versuchs entsprechen, ab. Der Erfolg ist eine Aufladung des Elektrometers und eine Erhöhung der Ladungen auf A und K. Die bei der nächsten Umdrehung auftretende Wirkung ist dementsprechend stärker usw.

Der letzte Versuch gibt das auf eine ganz einfache Form gebrachte Schema einer gewissen Type von Influenzmaschinen. Andere Typen arbeiten nach einem etwas anderen Verfahren. Damit die Maschine zu arbeiten beginnt, genügt es, wenn auf einer der Kondensatorplatten eine winzige Anfangsladung sitzt. Das ist fast stets von selbst der Fall. Die Maschinen erregen sich also selbst, aber das Vorzeichen der Ladungen ist vom Zufall abhängig. Die Spannung der Influenzmaschinen steigt so lange, bis die Ladungsverluste durch mangelhafte Isolation, insbesondere infolge von Entladungen durch die Luft, der neu erzeugten Ladung gleich werden. Man läßt daher meist die Ladungen in die beiden Belegungen eines Kondensators (Leidener Flasche) fließen, dessen Kapazität die Ansammlung größerer Ladungen ohne zu schnellen Spannungsanstieg erlaubt. Man kann mit solchen Maschinen Spannungen von vielen tausend Volt erzeugen.

240. Die wichtigsten Gleichungen der Elektrostatik in Einheiten des praktischen Maßsystem. Wir haben uns bei der Behandlung der Elektrostatik der Einheiten des elektrostatischen Maßsystems bedient, welches gemäß § 211 durch die Festsetzung begründet wird, daß die Konstante des COULOMBschen Gesetzes für das Vakuum den Zahlenwert 1 annehmen soll. Die Verwendung dieses Maßsystems gestaltet im allgemeinen die Formeln übersichtlicher und einfacher, und deshalb wird es auch in der theoretischen Physik meist benutzt. Bei praktischen Anwendungen kommt aber meist das praktische Maßsystem mit den Einheiten Coulomb (Amperesekunde), Volt, Ampere, Farad (oder Mikrofarad) usw. in Frage. Wir wollen deshalb hier die wichtigsten Gleichungen der Elektrostatik auch noch in den Einheiten des praktischen Maßsystems ausdrücken. Zwischen den Einheiten der beiden Systeme bestehen die folgenden Beziehungen:

Tabelle 20. Elektrostatische und praktische Einheiten.

Elektrizitätsmenge	1 el. stat. Einh.	$= \frac{1}{3} \cdot 10^{-9}$ Coulomb (Amperesec).
Stromstärke (vgl. § 244)	„	$= \frac{1}{3} \cdot 10^{-9}$ Ampere.
Spannung	„	$= 300$ Volt.
Feldstärke	„	$= 300$ Volt/cm.
Kapazität	„	$= \frac{1}{9} \cdot 10^{-11}$ Farad $= \frac{1}{9} \cdot 10^{-5}$ Mikrofarad.
Widerstand (vgl. § 246)	„	$= 9 \cdot 10^{11}$ Ohm.

Als Einheit der Energie dient im praktischen Maßsystem die Wattsekunde (Joule) $= 10^7$ erg, und dem entspricht es, daß als Krafteinheit die Kraft 10^7 dyn auftritt. Die Einheit der Feldstärke ist daher so definiert, daß eine Elektrizitätsmenge von 1 Coulomb im Felde $\mathfrak{E} = 1$ Volt/cm die Kraft 10^7 dyn erfährt.

Bei Benutzung des praktischen Maßsystems ist es zur Vereinfachung der Schreibweise nützlich, die Konstante

$$D = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^{11}} = 8{,}84 \cdot 10^{-4}$$

einzuführen. Wir erhalten damit die folgende Schreibweise für die wichtigsten Gleichungen der Elektrostatik im praktischen Maßsystem:

Gl. 2, § 211. $k = \frac{1}{4\pi D} \cdot \frac{e_1 e_2}{r^2} \cdot 10^7$ dyn.

Gl. 4, § 218. $k = e \cdot \mathfrak{E} \cdot 10^7$ dyn.

Gl. 5, § 219. $A = e\, U_A^B \cdot 10^7$ erg $= e\, U_A^B$ Joule (Wattsec).

Gl. 8, § 219. Gilt auch im praktischen Maßsystem.

Gl. 13a, § 223. $\mathfrak{E} = \frac{1}{4\pi D} \cdot \frac{e}{r^2}$ Volt/cm.

Gl. 13b, § 223. $P_e = \frac{1}{4\pi D} \cdot \frac{e}{r}$ Volt.

Gl. 14, § 223. Von der Elektrizitätsmenge e Coulomb gehen e/D Kraftlinien aus. Dabei soll der Feldstärke 1 Volt/cm 1 Kraftlinie/cm² entsprechen.

Gl. 17a und b, § 229. Gelten auch im praktischen Maßsystem.

Gl. 19, § 230. $C = D \frac{F}{d}$ Farad.

Gl. 20, § 233. $A = \frac{1}{2} eU \cdot 10^7$ erg $= \frac{1}{2} eU$ Joule (Wattsec).

Gl. 21b, § 233. $k = \frac{1}{2} \frac{e^2}{FD} \cdot 10^7 \text{ dyn} = \frac{1}{2} \frac{C^2 U^2}{FD} \cdot 10^7 \text{ dyn} = \frac{1}{2} FD \frac{U^2}{x^2} \cdot 10^7 \text{ dyn}$
$= \frac{1}{2} FD \mathfrak{E}^2 \cdot 10^7$ dyn.

Gl. 23—25, § 234. Gelten auch im praktischen Maßsystem.

Gl. 27, § 235. $\mathfrak{D} = D \varepsilon \mathfrak{E}$.

Gl. 29, § 236. $k = \frac{1}{4\pi D \varepsilon} \cdot \frac{e_1 e_2}{r^2} \cdot 10^7$ dyn.

Die Konstante D wird auch als die absolute Dielektrizitätskonstante des Vakuums bezeichnet, die Produkte $D\varepsilon$ als die absoluten Dielektrizitätskonstanten der materiellen Stoffe (s. Gl. 27).

241. Die Dimensionen der elektrischen Größen im elektrostatischen Maßsystem. Durch die Art der Festsetzung der elektrostatischen Einheiten wird eine formale Verknüpfung dieser Einheiten mit denen des CGS-Systems hergestellt, und die elektrischen Größen erhalten daher auch eine Dimension im CGS-System (§ 52). Jedoch ist diese spezielle Verknüpfung eine willkürliche, und wir werden später (§ 313) eine andere Art der Verknüpfung kennenlernen, die zu anderen Dimensionen führt.

Da die Größe $e_1 e_2/r^2$, also auch e^2/r^2, die Dimension einer Kraft, also $|mlt^{-2}|$, hat, so folgt für die Elektrizitätsmenge e die Dimension $|m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{3}{2}} t^{-1}|$. Das Produkt Ue aus Spannung und Elektrizitätsmenge ist eine Arbeit, hat also die Dimension $|ml^2t^{-2}|$, so daß für die Spannung U die Dimension $|m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{1}{2}} t^{-1}|$ folgt und für die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ die Dimension $|m^{\frac{1}{2}} l^{-\frac{1}{2}} t^{-1}|$. Die Kapazität C hat, wie wir bereits erwähnten, im elektrostatischen System die Dimension einer Länge, also $|l|$. Der Vollständigkeit halber nehmen wir sogleich auch noch die später zu besprechende Stromstärke i und den Widerstand R

hinzu. Die Stromstärke hat nach § 244 die Dimension Elektrizitätsmenge/Zeit, also $|m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{3}{2}} t^{-2}|$. Der Widerstand ist nach § 246 definiert als das Verhältnis U/i von Spannung und Strom, seine Dimension ist also $|l^{-1} t|$.

Diese Dimensionsbeziehungen sind in der Tabelle 21 noch einmal zusammengestellt.

Tabelle 21. Dimensionen im elektrostatischen Maßsystem.

Elektrizitätsmenge	$\|m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{3}{2}} t^{-1}\|$
Spannung	$\|m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{1}{2}} t^{-1}\|$
Feldstärke	$\|m^{\frac{1}{2}} l^{-\frac{1}{2}} t^{-1}\|$
Kapazität	$\|l\|$
Stromstärke	$\|m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{3}{2}} t^{-2}\|$
Widerstand	$\|l^{-1} t\|$

22. Kapitel.

Elektrische Ströme in festen Leitern.

242. Stromquellen. Elektromotorische Kraft. In diesem Kapitel muß — vorbehaltlich näherer Erörterung, insbesondere im 27. Kapitel — vorausgesetzt werden, daß es Instrumente gibt, welche die Größe der in 1 sec durch sie hindurchfließenden Elektrizitätsmenge — die elektrische Stromstärke — anzeigen (Strommesser, falls in Ampere geeicht auch Amperemeter genannt). Instrumente zur Messung elektrischer Spannungen sind bereits in § 231 besprochen worden (Elektrometer, elektrostatische Spannungsmesser). Bei den in der Folge zu besprechenden Versuchen bedient man sich jedoch meist anderer Spannungsmesser (falls in Volt geeicht, auch Voltmeter genannt), die auf dem gleichen Prinzip beruhen wie die Strommesser (§ 368).

Wir müssen ferner — vorbehaltlich einer näheren Besprechung in § 276, 277 und 373 — voraussetzen, daß es Vorrichtungen gibt (Elemente, Akkumulatoren, Generatoren usw.), mittels derer man bewirken kann, daß in einem Leiter, der die beiden Klemmen (Pole) einer solchen Vorrichtung verbindet, ein dauernder, zeitlich konstanter elektrischer Strom fließt. Wir wollen solche Vorrichtungen allgemein als Stromquellen bezeichnen.

Eine Stromquelle bildet mit einem ihre Klemmen verbindenden Leiter ein in sich geschlossenes Leitersystem. In den in der Elektrostatik behandelten Fällen herrscht auf einem zusammenhängenden Leitersystem im Gleichgewichtszustand überall das gleiche Potential, d. h. es besteht zwischen seinen einzelnen Punkten keine Spannung, und die in ihm befindlichen, an sich beweglichen Ladungsträger befinden sich in Ruhe. Enthält dagegen das Leitersystem eine Stromquelle, so ist das nicht der Fall. Die Stromquelle bewirkt, daß in dem Leiter ein dauernder, in sich geschlossener Strom von elektrischen Ladungsträgern fließt. Es besteht also in dem System kein elektrostatisches Gleichgewicht.

Da die Einschaltung einer Stromquelle eine dauernde Bewegung elektrischer Ladungen in einem angeschlossenen Leitersystem bewirkt, so sagt man, daß die Stromquelle der Sitz einer elektromotorischen Kraft, abgekürzt EMK., ist. Wir bezeichnen sie mit E. Die elektromotorische Kraft ist, wie wir in § 249 sehen werden, so definiert, daß sie die gleiche physikalische Dimension hat wie

eine Spannung. Sie wird also im praktischen Maßsystem, wie eine Spannung, in Volt gemessen. Es ist aber erforderlich, zwischen den Begriffen elektromotorische Kraft E und Spannung U einen scharfen Unterschied zu machen.

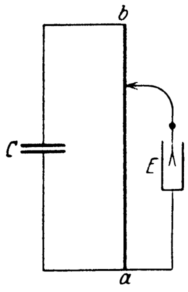


Abb. 212a. Spannungsabfall in einem von Elektrizität durchströmten Holzstab.

243. Der Spannungsverlauf in einem von Elektrizität durchströmten Leiter. a) Man verbinde die beiden Belegungen einer geladenen Batterie C größerer, parallel geschalteter Leidener Flaschen (also einen Kondensator) durch Kupferdrähte mit den Enden eines 1—2 m langen, dünnen, trockenen Holzstabes $a\,b$ (Halbleiter). Man verbinde ferner das Gehäuse eines als Spannungsmesser dienenden Elektrometers E von geeigneter Empfindlichkeit mit dem einen Ende (a) des Stabes und befestige an der Zuführung zu den Blättchen des Elektrometers einen Draht, den man mittels eines isolierten Handgriffes an dem Holzstab entlang führen kann (Abb. 212a). An dem Ausschlag des Elektrometers erkennt man, daß die Spannung zwischen dem Punkt a und den einzelnen Stellen des Holzstabes in der Richtung von a nach b stetig ansteigt. Je mehr man den berührenden Draht dem Ende b nähert, um so größer wird der Ausschlag. Die Ausschläge werden aber mit der Zeit geringer und verschwinden schließlich ganz. Die Batterie erweist sich dann als ungeladen. Die Ladungen auf ihren Belegungen haben sich durch den Holzstab allmählich ausgeglichen. Der Versuch ist nichts anderes als ein Beweis der Tatsache, daß sich Spannungen innerhalb eines Leiters — die ganze Versuchsanordnung ist ja ein zusammenhängendes System von Leitern — auszugleichen suchen. Ferner beweist er, daß, wenn zwischen zwei Punkten eines Leiters (des Holzstabes) eine Spannung besteht, das Potential in den zwischen ihnen liegenden Punkten des Leiters in der Richtung vom höheren zum niedrigeren abfällt, und daß ein solches Spannungsgefälle besteht, solange noch eine Strömung der Elektrizität stattfindet.

b) Wir wiederholen den Versuch auf andere Weise. An Stelle der Batterie von Leidener Flaschen benutzen wir einen Akkumulator S, zwischen dessen Klemmen eine dauernde Spannung von etwas über 2 Volt besteht, an Stelle des Holzstabes einen dünnen, ausgespannten Eisendraht $a\,b$ von 2—3 m Länge, statt des Elektrometers einen elektromagnetischen Spannungsmesser V. Zum Nachweis der durch den Draht strömenden Elektrizität schalten wir zwischen den Akkumulator und den Eisendraht einen Strommesser A (Abb. 212b).

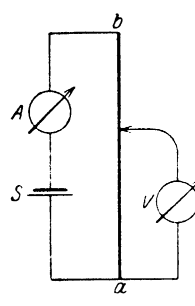


Abb. 212b. Spannungsabfall in einem von Elektrizität durchströmten Draht.

Fahren wir an dem von Elektrizität durchflossenen Draht mit dem einen zum Spannungsmesser führenden Drahte entlang, so zeigt jetzt der Spannungsmesser durch seine Ausschläge an, daß sich die Spannung gegen das Ende a in dem Drahte von Punkt zu Punkt stetig ändert. Die Ausschläge nehmen jetzt nicht mit der Zeit ab, weil die Spannung am Akkumulator konstant ist und nicht wie die der geladenen Batterie von Leidener Flaschen allmählich absinkt. Das Ergebnis des Versuchs (vom Konstantbleiben der Spannung abgesehen) ist das gleiche wie das des vorher beschriebenen Versuches. Gleichzeitig ist durch diesen Versuch mit Hilfe des Strommessers das Strömen der Elektrizität nachgewiesen.

Die Ursache für das Fließen eines Stromes im ersten Fall ist die Spannung am Kondensator, von dem die elektromotorische Kraft für die Ladungsbewegung

im Stromkreise ausgeht, im zweiten Fall die elektromotorische Kraft der Stromquelle S. Ihre Folge ist das Auftreten von Spannungen zwischen den einzelnen Punkten des Leitersystems. Diese Spannungen sind um so größer, je weiter die beiden Punkte, längs des Leiters gemessen, voneinander entfernt sind.

244. Elektrischer Strom. Als Maß der Stärke eines elektrischen Stromes, kurz Stromstärke i genannt, dient die in der Zeiteinheit durch irgendeinen Querschnitt des Leiters fließende Elektrizitätsmenge. Diese Menge ist im stationären Zustand in allen Querschnitten des Leiters die gleiche, ganz gleich, ob dieser Querschnitt an verschiedenen Stellen verschieden groß ist oder nicht, denn es findet nirgends in einem stromdurchflossenen Leiter eine dauernde Ansammlung elektrischer Ladungen, d. h. keine ständig wachsende Aufladung des Leiters, statt. Betrachten wir ein durch zwei beliebige Querschnitte q_1 und q_2 begrenztes Stück eines Leiters, so muß demnach stets durch den einen Querschnitt in das Leiterstück ebensoviel Elektrizität eintreten, wie durch den andern in der gleichen Zeit aus ihm austritt.

Fließt durch einen zur Stromrichtung senkrechten Querschnitt q eines Leiters der Strom i, so entfällt auf je 1 qcm des Querschnitts der Strom

$$\frac{i}{q} = j. \tag{1}$$

Diese Größe heißt Stromdichte.

Es sei de die in der Zeit dt durch einen Querschnitt eines Leiters fließende Elektrizitätsmenge. Dann ist gemäß der vorstehend gegebenen Definition der Stromstärke

$$i = \frac{de}{dt}, \tag{2a}$$

die in 1 sec durch den Querschnitt fließende Elektrizitätsmenge, also die Stromstärke im Leiter. Bei der Stromstärke i fließt daher in der Zeit t die Elektrizitätsmenge

$$e = \int_0^t i\,dt, \tag{2b}$$

bzw. bei konstanter Stromstärke i die Elektrizitätsmenge

$$e = it \tag{2c}$$

durch jeden Querschnitt des Leiters.

Je nachdem wir der Messung der Stromstärke die elektrostatische oder die praktische Ladungseinheit (das Coulomb) zugrunde legen, kommen wir zur elektrostatischen oder zur praktischen Einheit der Stromstärke. Die elektrostatische Einheit der Stromstärke kommt einem Strome zu, bei dem in der Sekunde eine elektrostatische Ladungseinheit durch einen Querschnitt des Leiters fließt. Fließt in der Sekunde 1 Coulomb durch einen solchen Querschnitt, so ist die Stromstärke gleich der praktischen Einheit, welche 1 Ampere (abgek. A) heißt. Entsprechend dem Umrechnungsverhältnis zwischen elektrostatischer Ladungseinheit und Coulomb (§ 240) ist

1 Ampere (A) $= 3 \cdot 10^9$ elektrostatischen Einheiten der Stromstärke.

Eine viel benutzte, vom Ampere abgeleitete Einheit ist 1 Milliampere (mA) $= 10^{-3}$ A.

Da ein Strom von i A in der Zeit t sec die Elektrizitätsmenge $e = it$ Coulomb mit sich führt, so nennt man 1 Coulomb, d. h. die vom Strome 1 A in 1 sec transportierte Elektrizitätsmenge, auch 1 Amperesekunde. Als größere Einheit dient vielfach die auf die Stunde als Zeiteinheit bezogenen Amperestunde (Ah) $= 3600$ Amperesekunden oder Coulomb.

Man beachte, daß ein metallischer Leiter, in dem ein elektrischer Strom fließt, elektrisch ungeladen ist, d. h. daß sich in jedem Volumelement eines solchen Leiters gleichviel positive und negative (atomistische) Elektrizität befindet. Wird an zwei Punkte eines metallischen Leiters eine Spannung gelegt, etwa durch Verbinden mit den beiden Klemmen eines Akkumulators, so setzen sich die in ihm befindlichen Elektronen derart in Bewegung, daß sie die Spannung zu beseitigen suchen. Während das in den in der Elektrostatik behandelten Fällen meist sehr schnell stattfindet, ist das hier nicht der Fall. Vielmehr sorgt der Akkumulator für Aufrechterhaltung der Spannung und damit des elektrischen Stromes. Für die aus dem einen Ende des Leiters austretenden Elektronen strömen am andern Ende aus dem Akkumulator neue Elektronen in gleicher Zahl in ihn ein. Der Akkumulator wirkt wie eine Zirkulationspumpe in einem ringförmig geschlossenen Rohrsystem. Die Ladung des Leiters ändert sich daher beim Strömen der Elektrizität nicht, er bleibt im ganzen und in allen seinen Teilen elektrisch neutral, denn die negative Ladung der bewegten Elektronen wird durch die positive Ladung der ortsfesten Ionen des Metalls kompensiert. Die Elektronen bewegen sich mit der gleichen Dichte, die sie hatten, ehe der Strom floß, durch den Leiter zwischen den ruhenden positiven Bestandteilen desselben hindurch. In den nicht metallischen Leitern liegen die Verhältnisse häufig nicht so einfach.

Abweichungen von dem geschilderten Verhalten treten auch bei metallischen Leitern dann ein, wenn Teile eines Leitersystems, die sich auf verschiedener Spannung befinden, einander sehr nahe sind. Denn dann wirken sie wie die Belegungen eines Kondensators, der auf eine Spannung aufgeladen ist, und es treten an solchen Stellen Ladungen auf (sog. Kapazitätswirkungen). Das ist z. B. bei parallel geführten Hin- und Rückleitungen der Lichtnetze der Fall.

Wird an zwei Punkte eines Leiters eine Spannung gelegt, indem man ihn mit den Klemmen einer Stromquelle verbindet, so besteht in seinem Innern ein elektrisches Feld. Bei beliebiger Form des Leiters kann dieses sehr kompliziert gestaltet sein. Bei einem einfachen Draht verlaufen seine Kraftlinien der Achse des Drahtes parallel und folgen jeweils der Richtung des Drahtes, auch wenn dieser gekrümmt ist. Infolgedessen ist die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ in einem homogenen Draht von konstantem Querschnitt und der Länge l, an dessen Enden eine Spannung U liegt, nach § 219 $\mathfrak{E} = U/l$, und zwar unabhängig von der Form, in die der Draht gebogen ist. Dieses elektrische Feld liefert die treibende Kraft für die Strömung der Elektronen im Draht, die sich — wegen ihrer negativen Ladung — in ihm in Richtung abnehmender Spannung bewegen.

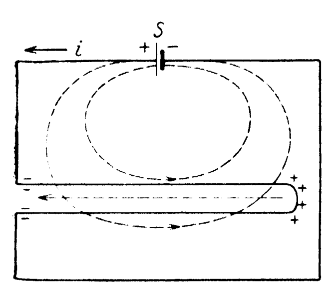


Abb. 213. Zum Zustandekommen der Feldverteilung in einer Stromschleife.

Es ist sehr lehrreich, sich das Zustandekommen der endgültigen Feldverteilung etwas genauer klarzumachen. Wir betrachten als Beispiel einen Stromkreis von der in Abb. 213 dargestellten Form, und zwar insbesondere die in ihm enthaltene Drahtschleife. Vor dem Einschalten des Stromes verlaufen die von dem positiven und dem negativen Pol der Stromquelle S herkommenden Kraftlinien in gekrümmten Kurven vom positiven zum negativen Pol, und diese Feldverteilung besteht auch noch im Augenblick des Einschaltens. Das schon vorher bestehende Feld setzt die Elektronen im Draht gegen die positive Feldrichtung in Bewegung. Man erkennt, daß sich dann in der Drahtschleife zunächst eine Ladungsverteilung bilden muß, wie sie Abb. 213 zeigt. Rechts entsteht

in ihr ein positiver, links ein negativer Ladungsüberschuß. Von diesen Ladungen gehen aber Kraftlinien aus, die von der positiven zur negativen Ladung verlaufen, den Kraftlinien des ursprünglichen Feldes entgegengerichtet sind, es also schwächen. Die Ansammlung von Ladungen geht nun so lange vor sich, bis das von ihnen herrührende zusätzliche Feld das ursprüngliche Feld in der Hauptsache aufgehoben hat. Es stellt sich schließlich ein Zustand ein, bei dem das ursprüngliche Feld in der oberen Hälfte der Schleife nahezu, aber noch nicht völlig aufgehoben ist, das ursprüngliche Feld in der unteren Hälfte aber bereits ein wenig überkompensiert ist. Damit ist der endgültige Zustand erreicht, daß das Feld im Draht überall gleichsinnig, d. h. innerhalb des Drahtes vom positiven zum negativen Pol der Batterie gerichtet ist.

Wie bereits erwähnt, bezeichnet man als Richtung eines elektrischen Stromes diejenige Richtung, in der positive Ladungen fließen würden, wenn die Strömung aus solchen bestände. Die wahre Strömungsrichtung, nämlich die der Elektronen, ist aber bei der Leitung in den Metallen gerade die entgegengesetzte Richtung. Die alte Bezeichnungsart ist jedoch so sehr eingebürgert, daß wir uns ihr hier auch anschließen werden. Wir bezeichnen also als Richtung eines elektrischen Stromes stets diejenige von höherem zu niedrigerem Potential, d. h. von der positiven zur negativen Klemme der Stromquelle.

245. Elektrizitätsleitung in Metallen. Zahlreiche Gesetzmäßigkeiten der Elektrizitätsleitung in den Metallen können auf Grund einer einfachen Vorstellung über den Leitungsmechanismus gedeutet werden, die wir uns hier zunutze machen wollen, obgleich es sich nur um ein etwas grobes Bild handelt. Nach dieser Vorstellung bewegen sich die Elektronen durch das Gefüge eines Metalles unter der Wirkung eines elektrischen Feldes wie in einem reibenden Medium, also etwa so wie kleine Körper beim Fall durch die Luft. Wir haben im § 116 gesehen, daß solche Körper schnell eine Geschwindigkeit annehmen, bei der die der Geschwindigkeit v proportionale Reibungskraft αv der treibenden Schwerkraft mg gleich und entgegengesetzt gerichtet ist, so daß diese beiden Kräfte sich gegenseitig aufheben und der Körper mit konstanter Geschwindigkeit fällt. Wir übertragen diese Verhältnisse auf die Elektronen in einem Metall, indem wir nur an Stelle der Schwerkraft mg die vom elektrischen Felde $\mathfrak{E}$ auf die die Ladung ε (Elementarquantum, § 213) tragenden Elektronen ausgeübte Kraft $\varepsilon\mathfrak{E}$ setzen. Wir erhalten demnach die Beziehung

$$\alpha v = \varepsilon \mathfrak{E} \quad \text{oder} \quad v = \frac{\varepsilon}{\alpha} \mathfrak{E}. \tag{3}$$

(Tatsächlich wird ein solches Elektron keine geradlinige Bahn im Metall beschreiben, sondern infolge fortgesetzter Zusammenstöße mit den Metallatomen [bzw. Metallionen] eine Zickzackbahn. Unter v ist hier lediglich die Komponente der Geschwindigkeit in der Richtung des elektrischen Feldes zu verstehen. Ihre Größe wird zwar ständig wechseln, aber, über eine größere Zeit genommen, einen konstanten Mittelwert, nämlich v, haben.) Die Größe ε/α nennt man die Beweglichkeit der Elektronen, denn je größer sie ist, um so größer ist bei gegebener Feldstärke $\mathfrak{E}$ die Geschwindigkeit v.

Abb. 214. Zum Mechanismus des elektrischen Stromes.

Wir betrachten ein Stück eines stromdurchflossenen Leiters (Abb. 214) von der Länge l und dem Querschnitt q und nehmen an, daß in jedem Kubikzentimeter dieses Leiters n Elektronen für den Stromtransport verfügbar sind. Die Bewegung der Elektronen erfolge von rechts nach links. Durch den linken Querschnitt q treten in einer Sekunde so viele Elektronen nach links aus, wie sich rechts von ihm in einem Stück von der Länge v befinden, nämlich nqv; denn diejenigen

Elektronen, welche v cm von dem linken Querschnitt q entfernt sind, erreichen ihn gerade noch am Schluß der nächsten Sekunde, alle näher gelegenen schon vor dem Ende der Sekunde. Es ist also die in einer Sekunde durch einen Querschnitt tretende Elektrizitätsmenge, d. h. die Stromstärke im Leiter,

$$i = n \varepsilon q v. \tag{4}$$

Zwischen den Enden des ganzen Leiterstücks von der Länge l herrsche die Spannung U. Dann ist nach § 219, Gl. 8, die Feldstärke im Leiter

$$\mathfrak{E} = \frac{U}{l}. \tag{5}$$

Aus den Gl. 3, 4 und 5 erhält man

$$i = \frac{n \varepsilon^2}{\alpha} \cdot \frac{q}{l} \cdot U. \tag{6}$$

246. Das OHMsche Gesetz. Widerstand. In der Gl. 6 ist das OHMsche Gesetz (1827) ausgesprochen, dem man in der Regel die folgende Form gibt:

$$i = \frac{U}{R} \quad \text{oder} \quad U = i R. \tag{7}$$

Die Größe R bezeichnet man als den Widerstand des betreffenden Leiterstücks. Nach Gl. 6 und 7 ist

$$R = \frac{\alpha}{n \varepsilon^2} \cdot \frac{l}{q} = \varrho \frac{l}{q}. \tag{8}$$

Der Widerstand setzt sich aus zwei Teilen zusammen. Der eine, $\varrho = \alpha/n\varepsilon^2$, ist durch den Stoff, aus dem der Leiter besteht, bedingt; denn die Zahl n der für den Stromtransport verfügbaren Elektronen und die ihrer Bewegung widerstehenden Kräfte (von α abhängig) sind in den verschiedenen leitenden Materialien sehr verschieden. Der zweite Teil, der „Formfaktor" l/q, hängt von der geometrischen Form des Leiterstücks ab. ϱ bezeichnet man als den spezifischen Widerstand des Leitermaterials. Es ist das derjenige Widerstand, den ein Leiterstück des betreffenden Materials von 1 cm Länge und 1 qcm Querschnitt hat. Der reziproke Wert des spezifischen Widerstandes heißt spezifisches Leitvermögen. Ist der Querschnitt q nicht überall der gleiche, so ergibt sich der Widerstand durch ein der Gl. 8 entsprechendes Integral

$$R = \varrho \int_0^l \frac{dl}{q}. \tag{8a}$$

Die Einheit des Widerstandes im praktischen Maßsystem ist 1 Ohm. Das ist derjenige Widerstand, in dem bei einer Spannung von 1 Volt ein Strom von 1 Ampere fließt. Für sehr große Widerstände benutzt man auch die abgeleitete Einheit 1 Megohm = 10^6 Ohm. Die Widerstandseinheit im elektrostatischen Maßsystem ist gleich 10^{-9} Ohm.

Von der Definition des Ohm aus dem OHMschen Gesetz als das Verhältnis $R = U/i$, dem sog. absoluten Ohm, ist die gesetzliche Definition des Ohm zu unterscheiden, das internationale Ohm, definiert als der Widerstand einer Quecksilbersäule von 1 qmm Querschnitt und 106,3 cm Länge bei 0° (vgl. § 314).

In Tab. 22 sind die spezifischen Widerstände ϱ einer Reihe von Metallen nebst einigen anderen, weiter unten zu erörternden Daten wiedergegeben. Ferner enthält sie Angaben über die Widerstände einiger besonders schlechter Leiter, also praktischer Isolatoren. (Wegen der weiteren Angaben s. § 248 und 255.)

Tabelle 22. Spezifische Widerstände in Ohm · cm.

Metalle	$\varrho \cdot 10^4$	$\alpha \cdot 10^3$	λ	$\varrho \cdot \lambda \cdot 10^4$	Sehr schlechte Leiter	ϱ
Ag	0,016	+ 4,1	1,01	0,0162	Schiefer . . .	10^8
Cu	0,017	4,3	0,90	0,0153	Marmor . . .	10^{10}
Zn	0,060	4,2	0,27	0,0162	Glas	$5 \cdot 10^{13}$
Fe	0,086	6,6	0,16	0,0155	Quarz ‖ Achse .	10^{14}
Pt	0,107	3,92	0,17	0,0228	Siegellack . .	$8 \cdot 10^{15}$
Bi	1,20	4,5	0,019	0,0182	Quarz ⊥ Achse	$3 \cdot 10^{16}$
Manganin . .	0,43	± 0,02	—	—	Glimmer . . .	$5 \cdot 10^{16}$
Konstantan .	0,50	± 0,05	0,027	0,0270	Quarzglas . .	$> 5 \cdot 10^{18}$

Bemerkenswert ist, daß der Widerstand des Quarzes, als eines anisotropen Körpers, von der Richtung abhängt. Der bei den Metallen in der Tabelle angegebene Wert $\varrho \cdot 10^4$ ergibt gerade den Widerstand eines Drahtes von 1 m Länge und 1 qmm Querschnitt.

Zur Prüfung des OHMschen Gesetzes bzw. zur Messung von Widerständen kann man sich der in Abb. 215 dargestellten Schaltung[1]) bedienen. Durch Verwendung von Stromquellen von verschiedener elektromotorischer Kraft kann man die Enden des Widerstandes R auf verschiedenen hohe Spannungen gegeneinander bringen. Man findet dann, daß das Verhältnis $U/i = R$, d. h. der Widerstand des Leiters, stets den gleichen Wert hat, den man auf diese Weise bestimmen kann (sog. OHMsche Methode). (Bei der Ausführung des Versuchs muß darauf geachtet werden, daß der Widerstand R groß ist gegenüber dem inneren Widerstand der Stromquelle, und daß keine merkliche Erwärmung des Leiters stattfindet; vgl. § 255 u. 258.)

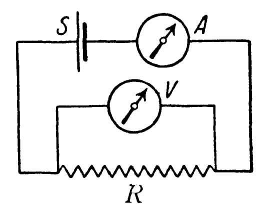


Abb. 215. Prüfung des OHMschen Gesetzes, bzw. Widerstandsmessung. S = Stromquelle, A = Strommesser, V = Spannungsmesser, R = Widerstand.

247. Die Geschwindigkeit der Elektrizitätsbewegung in den Metallen. Wird an einen Leiter plötzlich eine Spannung angelegt, so breitet sich längs des Leiters das die Elektronen antreibende elektrische Feld etwa mit Lichtgeschwindigkeit (§ 327) aus. Der Strom in einem Leiter setzt also praktisch sofort beim Einschalten in allen Teilen des Leiters ein. Die Geschwindigkeit der Elektronen im Leiter dagegen, die eigentliche Strömungsgeschwindigkeit, ist sehr klein. (Ebenso pflanzt sich das Einsetzen einer Flüssigkeitsströmung in einem Rohr — die die Strömung einleitende Druckwelle — mit der Geschwindigkeit des Schalls in der Flüssigkeit fort, während die Strömungsgeschwindigkeit durch ganz andere Ursachen bedingt und viel kleiner ist.)

Einen Begriff von der Größenordnung dieser Geschwindigkeit erhält man durch folgende Überschlagsrechnung. In einem Silberdraht von 1 qmm Querschnitt fließe ein Strom von 1 A = 1 Coulomb/sec. Wir wollen, was jedenfalls der Größenordnung nach richtig ist, annehmen, daß auf jedes Silberatom ein „Leitungselektron" entfalle. Dann ist die Zahl der in 1 ccm enthaltenen Leitungselektronen rund $n = 5{,}9 \cdot 10^{22}$, denn so groß ist die Zahl

1) In den Spaltungsskizzen bedienen wir uns folgender Bildzeichen:

(↗) Strom- oder Spannungsmesser.

| Akkumulator oder sonstige konstante Stromquelle.

ʌʌʌ Leiter mit merklichem Widerstand

—— Leiter mit so kleinem Widerstand, daß er vernachlässigt werden kann (Drahtverbindungen).

der Atome in 1 ccm Silber. Dann ergibt sich, unter Einsetzung des Wertes von $\varepsilon = 4{,}79_4 \cdot 10^{-10}$ el. stat. Einh. $= 1{,}59_8 \cdot 10^{-19}$ Coulomb, in Gl. 4 (§ 245)

$$v = 0{,}0106\,\text{cm/sec} \quad \text{oder rund} \quad \frac{1}{100}\,\text{cm/sec}.$$

248. Das WIEDEMANN-FRANZsche Gesetz. Zwischen dem spezifischen elektrischen Widerstand ϱ, bzw. seinem reziproken Wert, dem spezifischen elektrischen Leitvermögen $1/\varrho$ und dem Wärmeleitvermögen λ besteht bei den Metallen ein naher Zusammenhang. In Tab. 22 (§ 246) ist neben dem spezifischen Widerstand auch das Wärmeleitvermögen der Metalle eingetragen. Es zeigt sich, wie aus der Tabelle ersichtlich, daß das Produkt $\varrho \cdot \lambda$, also das Verhältnis $\lambda : 1/\varrho$, bei den meisten Metallen bei gegebener Temperatur etwa den gleichen Wert hat (Gesetz von WIEDEMANN und FRANZ). Die Wärmeleitfähigkeit und die elektrische Leitfähigkeit der Metalle sind einander nahezu proportional. Dies ist darin begründet, daß die Wärmeleitung in den Metallen ebenso wie die Elektrizitätsleitung auf der Bewegung der freien Elektronen beruht. In beiden Fällen ist also die Beweglichkeit der Elektronen für die Leitung maßgebend.

249. Die KIRCHHOFFschen Sätze. Für die Berechnung der Strom- und Spannungsverhältnisse in einem zusammenhängenden Leitersystem gelten die beiden KIRCHHOFFschen Sätze:

1. KIRCHHOFFscher Satz. In jedem Punkt eines Leitersystems ist die Summe der ankommenden Ströme gleich der Summe der abfließenden Ströme. Besonders wichtig ist dies im Falle von Stromverzweigungen, d. h. wenn in einem Punkt drei oder mehr Leiterzweige zusammenstoßen. Ein Beispiel ist in Abb. 216 dargestellt. In diesem Falle ist $i = i_1 + i_2 + i_3 + i_4$. Gibt man den auf einen Verzweigungspunkt hinfließenden positiven Strömen positives Vorzeichen, den von ihm fortfließenden positiven Strömen negatives Vorzeichen, so kann man den 1. KIRCHHOFFschen Satz auch in der Form

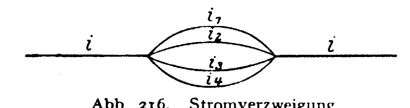


Abb. 216. Stromverzweigung.

$$\sum i_k = 0 \tag{9}$$

schreiben, wo die i_k die in den einzelnen Leiterzweigen fließenden Ströme bedeuten.

Der 1. KIRCHHOFFsche Satz folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß nirgends in einem stromdurchflossenen Leitersystem eine dauernde Ansammlung elektrischer Ladungen stattfindet. Demnach muß von jedem Punkt des Leitersystems die gleiche Elektrizitätsmenge abfließen, wie ihm in der gleichen Zeit zuströmt.

2. KIRCHHOFFscher Satz. Es seien R_k die Widerstände der verschiedenen Teile eines Leitersystems, i_k die Stromstärken in diesen. Dann ist für jeden beliebig herausgegriffenen, in sich geschlossenen Teil des Leitersystems sowie auch für das System als Ganzes die Summe aller diesem Teil zugehörigen Produkte $i_k R_k$, bzw. die Summe der im System enthaltenen Teilspannungen U_k gleich der Summe der in diesem Teil des Systems enthaltenen elektromotorischen Kräfte E,

$$\sum E = \sum i_k R_k = \sum U_k. \tag{10}$$

Bei der Bildung der Summe über die Teilspannungen ist an einem beliebigen Punkt des Leitersystems zu beginnen und dieses ist auf einer geschlossenen Bahn bis zum Ausgangspunkt zu durchlaufen. Bei Stromverzweigungen kann jeder beliebige Weg gewählt werden, es darf auch das gleiche Teilstück mehrmals durchlaufen werden. Das Produkt $i_k R_k$ ist mit positivem Vorzeichen zu ver-

sehen, wenn das betreffende Leiterstück im Sinne der positiven Stromrichtung durchlaufen wird, im entgegengesetzten Fall mit negativem Vorzeichen.

Wir bemerken schon hier, daß die KIRCHHOFFschen Sätze auch für Wechselstrom gelten und daß in diesem Falle in die Summe der Teilspannungen nicht nur die Produkte $i_k R_k$, sondern auch die Spannungen an im Stromkreise befindlichen Kondensatoren einzubeziehen sind.

Der 2. KIRCHHOFFsche Satz gibt eine genaue Definition des Begriffs der elektromotorischen Kraft. Da die elektromotorische Kraft einer in ein geschlossenes Leitersystem eingeschalteten Stromquelle gleich der Summe der Teilspannungen in diesem Leitersystem ist, so mißt man sie in der gleichen Einheit, in der Spannungen gemessen werden, im praktischen Maßsystem also in Volt. Für den Fall jedoch, daß das betreffende geschlossene Leitersystem keine elektromotorische Kraft enthält ($E = 0$), besagt der Satz, daß in einem solchen Leitersystem die Summe der Teilspannungen gleich Null ist. Ein Beispiel zeigt Abb. 217. Wir betrachten das zwischen den Punkten 1 und 2 eingeschlossene, aus den Widerständen R_1 und R_2 bestehende, in sich geschlossene Leitersystem. Wegen des Vorhandenseins der Stromquelle S fließt in R_1 und R_2 ein Strom, das betrachtete Leitersystem enthält aber selbst keine elektromotorische Kraft. Umlaufen wir das Leiterstück, bei 1 beginnend, im Sinne des Uhrzeigers, und bedenken wir, daß wir dabei R_1 im Sinne von i_1, R_2 gegen den Sinn von i_2 durchlaufen, so folgt $i_1 R_1 - i_2 R_2 = 0$ oder $i_1 R_1 = i_2 R_2$, eine Tatsache, die wir in § 250 auch aus dem OHMschen Gesetz ableiten werden. Das gleiche Resultat erhalten wir übrigens, wenn wir den 2. KIRCHHOFFschen Satz auf das ganze in Abb. 216 dargestellte Leitersystem anwenden, wobei wir vom inneren Widerstand der Stromquelle (§ 258) absehen. Da es uns freisteht, ob wir von 1 nach 2 über den Widerstand R_1 oder über den Widerstand R_2 gehen wollen, so erhalten wir $E = i_1 R_1$ und $E = i_2 R_2$, wenn wir, etwa bei 1 beginnend, einen geschlossenen Umlauf in der Stromrichtung um das ganze Leitersystem ausführen, der über die Stromquelle führt.

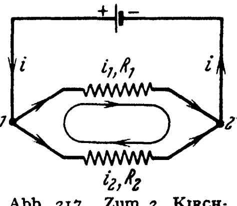


Abb. 217. Zum 2. KIRCHHOFFschen Satz.

250. Reihen- und Parallelschaltung von Leitern. Spannungsteilung. Zwei Leiter mit den Widerständen R_1 und R_2 seien hintereinander (in Reihe) geschaltet (Abb. 218). Liegt an ihren Enden eine Spannung U, so fließt in ihnen ein Strom, der nach dem 1. KIRCHHOFFschen Satz in beiden Leitern die gleiche Stärke i hat. Der Widerstand der Leiterkombination sei R, die an den Enden von R_1 und R_2 herrschenden Teilspannungen seien U_1 und U_2. Wenden wir das OHMsche Gesetz einmal auf die ganze Leiterkombination, dann auf jedes Teilstück einzeln an, so folgt

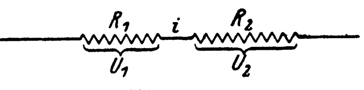


Abb. 218. Reihenschaltung. Spannungsteilung.

$$U = iR, \qquad U_1 = iR_1, \qquad U_2 = iR_2.$$

Ferner ist

$$U = U_1 + U_2.$$

Aus den vorstehenden Gleichungen folgt durch einfache Rechnung

$$R = R_1 + R_2 \tag{11}$$

und

$$U_1 : U_2 = R_1 : R_2 \tag{12}$$

sowie

$$U_1 = U \frac{R_1}{R_1 + R_2} = U \frac{R_1}{R} \quad \text{und} \quad U_2 = U \frac{R_2}{R_1 + R_2} = U \frac{R_2}{R}. \tag{13}$$

Demnach ist der Widerstand zweier in Reihe geschalteten Widerstände gleich der Summe dieser Widerstände. Die Teilspannungen an den Enden der Teilwiderstände verhalten sich wie diese Widerstände. Sie verhalten sich zur Gesamtspannung U wie die Teilwiderstände zum Gesamtwiderstand R. Wie man leicht zeigen kann, gilt das gleiche auch bei der Reihenschaltung von mehr als zwei Widerständen R_k. Es ist also allgemein bei Reihenschaltung

$$R = \sum R_k \tag{11a}$$

$$U_k = U \frac{R_k}{R}. \tag{13a}$$

Wir betrachten jetzt eine aus zwei Leitern mit den Widerständen R_1 und R_2 bestehende Stromverzweigung (Abb. 219). An ihren Enden liege die Spannung U, und in den Zuleitungen zu den Verzweigungspunkten herrsche die Stromstärke i, in den Zweigen die Stromstärken i_1 und i_2. Dann ist nach dem 1. KIRCHHOFFschen Satz

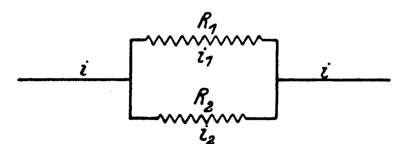


Abb. 219. Parallelschaltung.

$$i = i_1 + i_2.$$

Der Widerstand der Leiterkombination zwischen den Verzweigungspunkten sei R. Wenden wir jetzt das OHMsche Gesetz einmal auf die ganze Kombination, dann auf jeden Leiterzweig einzeln an, so folgt

$$U = iR = (i_1 + i_2)R, \quad U = i_1 R_1 = i_2 R_2.$$

Hieraus folgt ohne weiteres

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \text{bzw.} \quad R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{14}$$

und

$$i_1 : i_2 = R_2 : R_1. \tag{15}$$

Es ist also der reziproke Wert des Widerstandes zweier parallel geschalteter Leiter gleich der Summe der reziproken Werte ihrer Einzelwiderstände. Die Überlegung läßt sich leicht auf mehr als zwei parallel geschaltete Leiter R_k übertragen, und es ergibt sich dann

$$\frac{1}{R} = \sum \frac{1}{R_k}. \tag{14a}$$

Gl. 15 besagt, daß sich die Stromstärken in den beiden Zweigen einer aus zwei Leitern bestehenden Stromverzweigung umgekehrt wie die betreffenden Widerstände verhalten.

Die Gl. 13 führt zu einer wichtigen praktischen Anwendung, der Spannungsteilung (Potentiometerschaltung). Es kommt sehr oft vor, daß man eine Spannung benötigt, die kleiner ist als die gerade verfügbare elektromotorische Kraft. Es gibt z. B. keine Stromquellen von zuverlässig konstanter elektromotorischer Kraft unterhalb der Größenordnung von etwa 1 Volt. In diesem Fall verwendet man die in Abb. 220 dargestellte Schaltung und bemißt die Widerstände R_1 und R_2 so, daß die an den Enden des Widerstandes R_1 herrschende Teilspannung die gewünschte Größe hat. Diese Spannung wird dann an den Enden von R_1 abgegriffen, indem diese Enden sozusagen die Klemmen einer Stromquelle von der gewünschten elektromotorischen Kraft bilden.

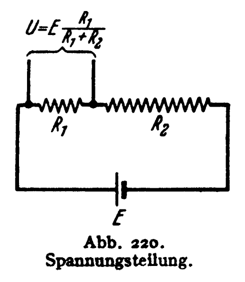


Abb. 220. Spannungsteilung.

251. Rheostaten. Als Rheostaten bezeichnet man Apparate, welche ihres Widerstandes wegen hergestellt und benutzt werden. Häufig ist ihr Widerstand veränderlich, gegebenenfalls in meßbarer Weise. Solche Rheostaten dienen vor allem

1. zur Einregulierung bestimmter Stromstärken, indem man sie in den betreffenden Stromkreis einschaltet und ihren Widerstand so lange verändert, bis die gewünschte Stromstärke erreicht ist,

2. als Vergleichsnormale zur Messung unbekannter Widerstände und zu sonstigen Meßzwecken.

Zur Regulierung von Stromstärken benutzt man vor allem die Schiebewiderstände oder Schieberheostaten (Abb. 221). Sie beruhen auf dem Prinzip, daß durch einen Schieber G, welcher längs eines als Widerstand dienenden spulenförmigen Drahtes verschoben werden kann, ein mehr oder weniger großer Teil dieses Drahtes in den Stromkreis eingeschaltet wird. Solche Schieberheostaten werden meist aus Manganindraht hergestellt, der am besten auf Schiefer oder Porzellan aufgewickelt ist. Das eine Ende A oder K des Drahtes und die den Schieber tragende Metallschiene $\mathfrak{S}$ werden mit dem Stromkreise verbunden. Durch den Schieber wird also, je nach seiner Stellung, eine mehr oder weniger große Zahl von Windungen des Drahtes in den Stromkreis eingeschaltet; die Widerstandsänderung ist daher nicht ganz stetig, sondern erfolgt sprungweise. Legt man eine Spannung U an die Endklemmen A und K, so kann man z. B. zwischen A und $\mathfrak{S}$ einen je nach der Stellung des Schiebers G verschieden großen Bruchteil von U am Widerstande abgreifen (Spannungsteilung, § 250).

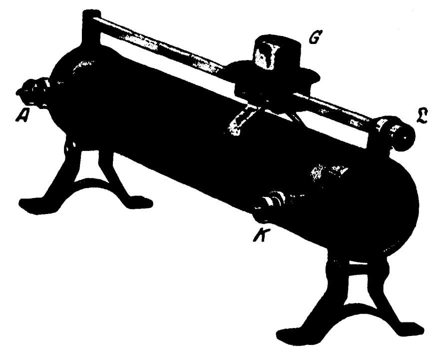


Abb. 221. Schieberheostat.

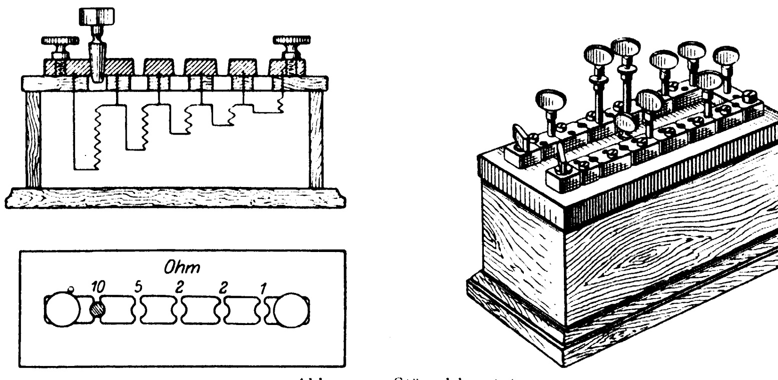


Abb. 222. Stöpselrheostat.

Als Vergleichsnormale benutzt man meist Stöpselrheostaten (Präzisionswiderstandssätze). Diese bestehen aus einer größeren Zahl von Widerständen aus auf Spulen aufgewickeltem Manganindraht, die an der Unterseite der oberen, aus Hartgummi bestehenden Platte eines geschlossenen Kastens angebracht sind (Abb. 222). Die Größe dieser Widerstände ist meist so abgestuft wie die Gewichte in einem Gewichtssatz (etwa 0,1, 0,2, 0,2, 0,5; 1, 2, 2, 5; 10, 20,

20, 50; 100, 200, 200, 500 Ohm usw., häufig auch 1, 2, 3, 4 Ohm usw.; je nach der Größe des Rheostaten). Die Enden jedes dieser Widerstände führen an Messingklötze auf dem Kastendeckel, und zwar je ein Ende je zweier aufeinanderfolgender Widerstände an denselben Messingklotz. Diese Messingklötze können durch Messingstöpsel leitend miteinander verbunden werden. Läßt man einen Strom am einen Ende der Reihe der Messingklötze ein- und am andern Ende austreten und sind die Klötze nicht durch Stöpsel verbunden, so muß der Strom sämtliche Widerstände des Rheostaten nacheinander durchlaufen. Der Widerstand des ganzen Rheostaten ist dann gleich der Summe aller in ihm enthaltenen Widerstände. Verbindet man jedoch zwei Messingklötze durch einen Messingstöpsel, so fließt praktisch der gesamte Strom an dieser Stelle durch den so gut wie widerstandslosen dicken Stöpsel, und es ist so, als wenn der Widerstand, dessen beide Enden an diesen beiden Klötzen liegen, gar nicht vorhanden wäre. Der betreffende Widerstand ist „kurzgeschlossen". Wirksam sind daher nur diejenigen Widerstände, deren Stöpsel herausgezogen sind.

252. Messung von Widerständen. Der direkteste Weg zur Messung des Widerstandes eines Leiters besteht in der unmittelbaren Anwendung des OHMschen Gesetzes, indem man erstens mit einem Strommesser den durch den Leiter fließenden Strom, zweitens mit einem Spannungsmesser die zwischen seinen Enden bestehende Spannung mißt und $R = U/i$ berechnet. Es ist dies genau die in Abb. 215 dargestellte Schaltung.

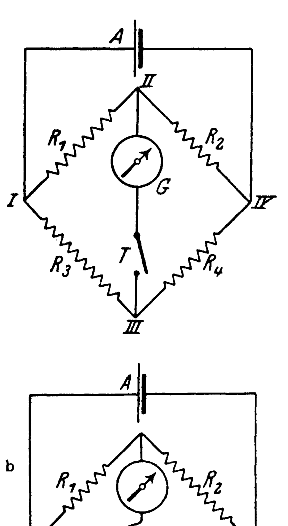


Abb. 223. Widerstandsmessung in der WHEATSTONEschen Brückenschaltung.

Die gebräuchlichste Methode der Widerstandsmessung ist die Messung in der WHEATSTONEschen Brückenschaltung. Es seien R_1, R_2, R_3 und R_4 vier in der aus Abb. 223a ersichtlichen Weise miteinander verbundene Widerstände. Mindestens einer dieser Widerstände muß meßbar veränderlich sein. Zwei gegenüberliegende Punkte (II, III) der Schaltung sind durch ein empfindliches Strommeßinstrument G (Galvanometer) miteinander verbunden. Zwischen den beiden anderen Ecken (I, IV) liegt ein Akkumulator oder Element A. In der das Galvanometer enthaltenden Leitung, der „Brücke", ist ein Taster T angebracht, d. h. ein Schalter, mit dem man diese Leitung leicht für ganz kurze Zeit schließen kann.

Ist die Galvanometerleitung geschlossen, so wird im allgemeinen auch durch sie ein Strom fließen und sich durch einen Ausschlag des Instrumentes bemerkbar machen, nämlich immer dann, wenn nicht gerade die Potentiale an den beiden Enden dieser Leitung (II, III) einander gleich sind, also in diesem Zweige die Spannung 0 herrscht. Durch Verändern der Widerstände, mindestens des einen von ihnen, kann man es aber stets erreichen, daß dies der Fall ist. Dann fließt durch die Galvanometerleitung kein Strom; das Instrument (das hier als sog. Null-Instrument dient) zeigt beim Schließen des Tasters T keinen Ausschlag. (Der Taster hat den Zweck, daß man zunächst durch ganz kurzes Einschalten feststellen kann, ob nicht infolge ganz schlechter Abgleichung das empfindliche Instrument zu stark mit Strom belastet wird und Schaden leiden könnte. Auch läßt sich beim kurzen Einschalten ein leichtes Zucken des Zeigers noch erkennen, wenn die Abweichung der Dauereinstellung vom Nullpunkt nur noch schwer bemerkbar ist. Schließlich dient er dazu, um zu verhindern, daß sich eine etwa in einem der Widerstände vorhandene

Selbstinduktion [§ 333] störend bemerkbar macht, was der Fall wäre, wenn man den Taster etwa als Stromschlüssel in der zur Stromquelle führenden Leitung benutzte.)

Fließt durch das Galvanometer bei geschlossenem Taster kein Strom, so folgt aus dem 1. KIRCHHOFFschen Satz für die Teilströme i_1, i_2, i_3 und i_4 in den Widerständen R_1, R_2, R_3 und R_4 $i_1 = i_2$, $i_3 = i_4$. Durchlaufen wir jetzt das linke Teilstück der Verzweigung, von I beginnend über II und III nach I zurück, so ergibt der 2. KIRCHHOFFsche Satz $i_1 R_1 - i_2 R_2 = 0$. Ebenso folgt für das rechte Teilstück $i_3 R_3 - i_4 R_4 = i_1 R_3 - i_2 R_4 = 0$. Oder

$$i_1 R_1 = i_2 R_2, \quad i_1 R_3 = i_2 R_4.$$

Dividiert man diese beiden Gleichungen durcheinander, so ergibt sich

$$R_1 : R_3 = R_2 : R_4 \text{ bzw. } R_1 : R_2 = R_3 : R_4.$$

Sind also drei dieser Widerstände bekannt, so kann man den vierten berechnen. Es genügt sogar, um z. B. R_1 zu berechnen, wenn nur einer der an R_1 angrenzenden Widerstände, etwa R_2, seiner Größe nach bekannt ist und ferner das Verhältnis R_3/R_4 der beiden anderen Widerstände.

Für genaue Widerstandsmessungen benutzt man zum Vergleich die Widerstände eines oder mehrerer Stöpselrheostaten. Für Messungen, bei denen es nur auf geringere Genauigkeit ankommt, bedient man sich oft eines sog. Meßdrahtes. Es ist dies ein auf einer Millimeterteilung ausgespannter Manganindraht, auf dem eine Metallschneide verschoben werden kann, von der aus ein Draht zum Galvanometer führt (Abb. 223b). Die hierdurch abgegrenzten beiden Teile des Drahtes von den Längen l_1 und l_2 bilden die Widerstände R_3 und R_4. Den Widerstand R_2 bildet ein Stöpselrheostat, R_1 ist der zu messende Widerstand. Nach erfolgter Abgleichung (durch Verschieben der Schneide) ist $R_1 = R_2 \cdot R_3/R_4$. Das Verhältnis R_3/R_4 aber ist gleich dem Verhältnis, in dem die Metallschneide den Meßdraht teilt, denn die Widerstände der beiden Teile des Drahtes verhalten sich, vorausgesetzt, daß er überall gleich dick und gleich beschaffen ist, wie die Längen dieser Teile, so daß einfach $R_1 = R_2 \frac{l_1}{l_2}$.

Man kann in der WHEATSTONEschen Brückenschaltung Stromquelle und Galvanometer miteinander vertauschen. Dabei ändert sich im allgemeinen die Empfindlichkeit der Meßanordnung. Welche Schaltungsart zweckmäßig ist, muß von Fall zu Fall entschieden werden.

Der große Vorzug der WHEATSTONEschen Methode beruht darin, daß man kein geeichtes Strom- oder Spannungsmeßinstrument gebraucht und daß man bei Verwendung eines Meßdrahts mit einem einzigen Stöpselrheostaten auskommt.

Die einfache Schaltung der Abb. 223a oder b ist nur dann anwendbar, wenn die zu vergleichenden Widerstände sämtlich groß gegen die Widerstände der sie verbindenden Drähte sind, so daß man diese gegen jene vernachlässigen kann. Zur Messung von sehr kleinen Widerständen verwendet man eine auf dem gleichen Prinzip beruhende, kompliziertere Schaltung, die THOMSON-Brücke. Ihre Schaltung ist aus Abb. 224 ersichtlich. Die Abzweigungen an den Verzweigungspunkten a, b, c, d müssen unmittelbar an den Enden der beiden zu vergleichenden, sehr kleinen Widerstände R_1 und R_2 liegen. Die Widerstände R_3, R_4 und R_3', R_4' werden nun so lange verändert, bis gleichzeitig erstens $R_3 : R_3' = R_4 : R_4'$ ist und zweitens das Galvanometer G keinen Strom mehr anzeigt. Ist letzteres erreicht, so sind offenbar die durch R_1 und R_2, durch R_3 und R_4 und

durch R_3' und R_4' fließenden Ströme, die mit J, i und i' bezeichnet seien, einander paarweise gleich.

Durchlaufen wir jetzt das linke Teilstück der Verzweigung, bei a beginnend, über b, e, f nach a zurück, so ergibt der 2. KIRCHHOFFsche Satz $J R_1 + i' R_3' - i R_3 = 0$, und ebenso für das rechte Teilstück $J R_2 + i' R_4' - i R_4 = 0$. Oder nach einfacher Umformung

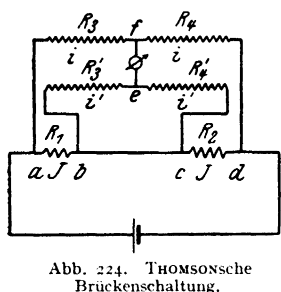


Abb. 224. THOMSONsche Brückenschaltung.

$$J R_1 = R_3 \left(i - i' \frac{R_3'}{R_3}\right), \qquad J R_2 = R_4 \left(i - i' \frac{R_4'}{R_4}\right).$$

Da nun stets dafür gesorgt wird, daß $R_3/R_3' = R_4/R_4'$, so sind die Klammerausdrücke in beiden Gleichungen einander gleich. Dividiert man die beiden Gleichungen durcheinander, so folgt

$$R_1 : R_2 = R_3 : R_4$$

genau wie bei der WHEATSTONEschen Brückenschaltung. Der Widerstand der Drahtverbindung zwischen b und c, der unter Umständen viel größer ist, als die Widerstände R_1 und R_2, geht also in die Rechnung gar nicht ein. Die Vergleichswiderstände R_3, R_3', R_4, R_4' werden so groß gewählt, daß man den Widerstand ihrer Zuleitungen ihnen gegenüber vernachlässigen kann.

253. Kapazitätsmessung in der Brückenschaltung. Die WHEATSTONEsche Brückenschaltung kann auch zur Messung von Kapazitäten verwendet werden. Neben anderen Methoden (§ 380) ist hier die Methode von MAXWELL zu erwähnen. In der Brückenschaltung wird einer der vier Widerstände durch einen pendelnden Kontakt K ersetzt und die zu messende Kapazität C in der aus Abb. 225 ersichtlichen Weise mit der Schaltung verbunden. Der Kontakt bewege sich $n$mal in 1 sec zwischen den beiden Anschlägen hin und her, und in dem betreffenden Zweige der Schaltung herrsche die Spannung U. Dann lädt sich der Kondensator $n$mal in 1 sec auf die Spannung U auf, nimmt also $n$mal die Ladung $e = CU$ auf und wird nach jeder Aufladung durch Kurzschluß wieder entladen. Insgesamt nimmt er also in 1 sec die Elektrizitätsmenge $ne = nCU$ auf, die ihm durch die Zuleitungen zufließen muß. Dies entspricht aber einer durchschnittlichen Stromstärke in diesem Zweige vom Betrage $i = ne = nCU$. Man sieht, daß, wenn man rein formal $1/nC = R$ setzt, diese Beziehung zwischen i und U dem OHMschen Gesetz entspricht. Der Kondensator von der Kapazität C entspricht in seiner Wirkung bei $n$maliger Auf- und Entladung in 1 sec einem Widerstande von der Größe $1/nC$. Man kann daher, wenn man n kennt. die Kapazität C messen, indem man die Brückenschaltung einmal in der Schaltung der Abb. 225 durch Verändern der übrigen Widerstände auf Stromlosigkeit in der Galvanometerleitung abgleicht und alsdann an Stelle des Pendelkontaktes einen veränderlichen Widerstand R einschaltet, mittels dessen die Schaltung wieder abgeglichen wird, der also dann gleich $1/nC$ sein muß.

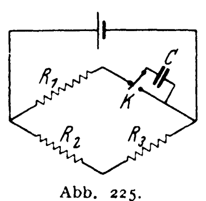


Abb. 225. Kapazitätsmessung nach MAXWELL.

254. Der JOHNSEN-RAHBEK-Effekt. Auf dem Spannungsgefälle längs eines stromdurchflossenen Leiters beruht der JOHNSEN-RAHBEK-Effekt, auch elektrische Klebkraft genannt. Eine ebene Platte aus einem schlechten Leiter (Halbleiter, z. B. Solnhofener Schiefer) wird auf der einen Seite mit einer Metallfolie belegt, mit ihrer anderen Fläche liegt sie auf einer Metallplatte auf. Legt man an diese beiden Metallbelegungen eine Spannung, etwa die 220 Volt eines

Lichtnetzes, so haftet die Metallplatte mit sehr großer Kraft an dem Halbleiter. Die Erklärung ist folgende: Wegen der unvermeidlichen kleinen Unebenheiten der Halbleiterplatte berühren sich diese und die Metallplatte nur in ganz wenigen Punkten (A, B, Abb. 226) so, daß zwischen ihnen ein Strom übergehen kann. Der sehr schwache Strom, der durch den Halbleiter fließt, strömt daher in Bahnen, wie sie Abb. 226 zeigt. Längs dieser „Stromlinien" liegt das ganze Spannungsgefälle von 220 Volt. Es herrschen daher an einzelnen Punkten der unteren Halbleiterfläche, z. B. in C, Spannungen von beträchtlicher Größe gegen die Metallplatte. So bilden die sich außerordentlich nahe gegenüberstehenden Flächen einen Kondensator von sehr kleinem Plattenabstand, der auf eine Spannung von der Größenordnung von 100 Volt aufgeladen ist und dessen Platten sich daher mit sehr großer Kraft anziehen (§ 233). Dieser Effekt hat auch technische Bedeutung (z. B. zur Konstruktion von Relais für die Zwecke der Telegraphie).

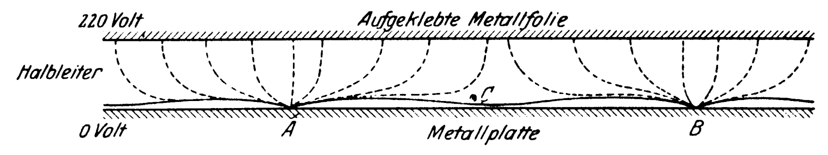


Abb. 226. Schema zum JOHNSEN-RAHBEK-Effekt.

255. Temperaturkoeffizient des Widerstandes. Supraleitfähigkeit. Hat man in einer WHEATSTONEschen Brückenschaltung den Widerstand z. B. eines Eisendrahtes gemessen und erwärmt man jetzt den Draht etwa mit einer Flamme, so bemerkt man, daß sein Widerstand sich ändert. Der Widerstand der metallischen Leiter ist von der Temperatur abhängig, und zwar steigt er mit wachsender Temperatur. Für Kupfer ist z. B. der Widerstand bei 500^0 1,4mal so groß wie bei 0^0, bei -190^0 nur noch 1/10 des Widerstandes bei 0^0.

Sehr deutlich erkennt man die Änderung des Widerstandes mit der Temperatur, wenn man einen Stromkreis aus einigen Akkumulatoren, einer Metallfadenlampe und einem Strommesser von geeigneter Empfindlichkeit bildet. Beim Einschalten ist der Ausschlag wegen des kleineren Anfangswiderstandes zuerst größer und geht dann beträchtlich zurück, weil die Temperatur des Lampenfadens sich durch den Strom erhöht (§ 260) und daher sein Widerstand bei Stromdurchgang größer ist als ohne Strom. Bei Kohlefadenlampen ist das Gegenteil der Fall. Der Widerstand des Kohlefadens sinkt — wenigstens anfänglich — bei steigender Temperatur. Daher kommt es auch, daß Metallfadenlampen beim Einschalten sofort hell aufleuchten, während Kohlefadenlampen ihre volle Lichtstärke erst kurze Zeit (Bruchteile einer Sekunde) nach dem Einschalten zeigen. Beim gleichzeitigen Einschalten einer Metallfadenlampe und einer gleich hellen, parallelgeschalteten Kohlefadenlampe ist dies gut zu beobachten.

Im Bereiche gewöhnlicher Temperaturen t ändert sich der Widerstand der Metalle ungefähr nach der Formel

$$R = R_0 (1 + a t), \qquad (16)$$

wobei R_0 der Widerstand bei 0^0C ist. a ist in einem nicht allzu großen Temperaturbereich nahezu konstant. Sein Zahlenwert (Tab. 22, § 246) ist im gewöhnlichen Temperaturbereich für die Metalle von der Größenordnung $4 \cdot 10^{-3} = 1/250$, also ungefähr ebenso groß wie der Ausdehnungskoeffizient der idealen Gase 1/273 (§ 163). Es ist also der Widerstand der Metalle bei gewöhnlicher Temperatur in roher Annäherung der absoluten Temperatur proportional. a heißt der Tem-

peraturkoeffizient des Widerstandes. Es gibt auch Substanzen mit negativen Temperaturkoeffizienten, bei denen also der Widerstand mit steigender Temperatur abnimmt, z. B., wie schon oben erwähnt, die Kohle in den Kohlefadenlampen. Für größere Temperaturbereiche reicht die einfache Gl. 16 nicht aus, d. h. a wird eine Funktion der Temperatur.

Die Legierungen Manganin und Konstantan haben einen erheblich kleineren Temperaturkoeffizienten als die reinen Metalle. Daher wird insbesondere das Manganin bevorzugt zur Herstellung von Präzisionswiderständen benutzt.

Die Steigerung des Widerstandes mit wachsender Temperatur findet wenigstens qualitativ ihre Erklärung auf Grund der im § 245 entwickelten Vorstellungen. Denn es ist verständlich, daß der Bewegung der Elektronen um so größere hemmende Kräfte entgegentreten, je heftiger die thermische Bewegung in dem Metall ist.

Von der Temperaturabhängigkeit des Widerstandes macht man u. a. Gebrauch beim Widerstandsthermometer. Es besteht aus einer dünnen, in Quarz eingebetteten Platindrahtspirale, die in das eine Ende einer Quarzröhre eingeschmolzen ist. Ist der Temperaturkoeffizient des Widerstandes des Platindrahtes bekannt, so kann man, indem man seinen Widerstand in der WHEATSTONEschen Schaltung mißt, die Temperatur berechnen, auf der er sich befindet.

Zur Vermeidung der Überschreitung einer gewissen Stromstärke schaltet man gelegentlich in einen Stromkreis eine Eisendrahtspirale ein, die sich in einer mit Wasserstoff gefüllten Glasröhre befindet. Bei wachsender Stromstärke erwärmt sich der Eisendraht durch den Strom. Dadurch steigt sein Widerstand zunächst langsam, schließlich sehr schnell mit wachsender Temperatur an, denn sein Temperaturkoeffizient ist abnorm hoch und steigt mit der Temperatur weiter an. Der Strom wächst viel langsamer an als die Spannung, weil der Anstieg des Widerstandes die Wirkung eines Anstiegs der an dem Drahte liegenden Spannung zu einem erheblichen Teil kompensiert. (Der Wasserstoff soll eine Oxydation und durch seine gute Wärmeleitfähigkeit ein Durchbrennen des Drahtes verhindern.)

Bei sehr tiefen Temperaturen ist der Widerstand der Metalle also außerordentlich klein. Bei einigen Metallen treten in der Nähe des absoluten Nullpunktes (§ 155) noch besondere Verhältnisse ein, indem dort ihr Widerstand völlig verschwindet. Diese Erscheinung heißt Supraleitfähigkeit (KAMERLINGH ONNES 1911). Der Übergang in den supraleitenden Zustand erfolgt bei einer bestimmten, für das betreffende Metall charakteristischen Temperatur, der sog. Sprungtemperatur (Tab. 23).

Tabelle 23. Sprungtemperaturen.

Ga	Th	Ti	Tl	In	Sn	Hg	Ta	Pb	Nb
1,1°	1,43°	1,77°	2,49°	3,40°	3,71°	4,12°	4,36°	7,26°	8,40° abs.

Auch einzelne Karbide und Nitride zeigen Supraleitfähigkeit. Eine Erklärung für die Supraleitfähigkeit, die jedenfalls nur auf dem Boden der Quantentheorie (Kap. 33) gegeben werden kann, ist heute noch nicht gefunden worden.

256. Elektrolytische Leitung in festen Körpern. Während die Leitfähigkeit der Metalle auf der Bewegung der in ihnen enthaltenen Elektronen beruht, sind in gewissen anderen festen Stoffen, vor allem in vielen Salzen, die Ladungsträger die Ionen des Körpers, also die mit einem oder mehreren Elementarquanten ε geladenen Atome. Diese Art der Leitfähigkeit, bei der also ein Transport der Atome selbst stattfindet, bezeichnet man als elektrolytische Leitfähigkeit (vgl. § 265).

Ein Beispiel dieser Art ist das Glas bei höherer Temperatur. Man versehe ein Stück Glasrohr mit zwei Zuleitungen aus Kupferdraht, indem man die Drähte einige Male so um das Rohr wickelt, daß die beiden Zuleitungen etwa $1/2$ cm Abstand voneinander haben, und verbinde die Drähte unter Zwischenschaltung einer Glühlampe mit den beiden Polen der Starkstromleitung (110 oder 220 Volt, gleichgültig ob Gleichstrom oder Wechselstrom). Dann erwärme man das Glasrohr zwischen den Drähten mit einer Flamme. Nach kurzer Zeit, noch ehe das Rohr glüht, bemerkt man das Auftreten kleiner weißer Fünkchen an den Zuleitungen; gleichzeitig beginnt die Glühlampe erst schwach, dann hell zu leuchten. Das Glasrohr gerät infolge der Erwärmung durch den hindurchgehenden Strom ebenfalls ins Glühen, und man kann sogar die Flamme jetzt entfernen, ohne daß der Stromdurchgang sogleich aufhört. Meist schmilzt das Glasrohr nach einiger Zeit durch.

WARBURG hat gezeigt, daß man Natrium auf elektrolytischem Wege durch Glas hindurchwandern lassen kann. Man benutzt diese Erscheinung dazu, um ganz reines Natrium in ein weitgehend luftleer gemachtes Glasgefäß zu bringen (für gewisse elektrische und optische Untersuchungen). Man taucht das untere Ende des betreffenden Glasgefäßes in eine Schale, welche ein geschmolzenes Natriumsalz (Natronsalpeter, elektrolytisch leitend) enthält, und erhitzt dieses und damit den eingetauchten Teil des Glasgefäßes auf etwa 300^0. Man verbindet den positiven Pol einer Stromquelle von hoher Spannung mit dem Salz, den negativen mit einer im Innern des Glasgefäßes befindlichen Metallelektrode. Dann fließt durch das Gefäß ein elektrischer Strom (Glimmentladung, § 290) zwischen der Metallelektrode und der als zweite Elektrode wirkenden erhitzten Stelle der Glaswand und durch das bei dieser Temperatur leitend gewordene Glas hindurch. Positive Ladungsträger sind hier die im Glase (im wesentlichen Natriumsilikat) enthaltenen Na-Ionen. Diese wandern also in der Richtung auf das Innere des Gefäßes und scheiden sich auf der inneren Glaswand als metallisches Natrium ab. Als Ersatz treten neue Natriumionen aus der Schmelze in das Glas über, das infolgedessen in seiner Zusammensetzung nicht verändert wird. (Vgl. den ganz analogen Fall der Leitung durch eine $CuSO_4$-Lösung mit einer Cu-Anode § 270.) Die Leitfähigkeit des aus Verbindungen von seltenen Erden bestehenden Glühstifts der sog. Nernstlampe ist ebenfalls eine elektrolytische.

Bei sehr starken Strömen ist auch bei den Metallen eine ganz schwache elektrolytische Leitung beobachtet worden.

257. Charakteristik von Leitern. Trägt man die Stromstärke i in einem Leiter als Funktion der angelegten Spannung auf, so erhält man eine Kurve, die man die Charakteristik des Leiters nennt. Bei absolut strenger Gültigkeit des OHMschen Gesetzes, d. h. wenn R konstant ist, ist die Charakteristik eine Gerade. In Wirklichkeit ist dies schon deshalb nie genau der Fall, weil der Strom jeden Leiter erwärmt und der Widerstand so wenigstens indirekt eine Funktion der Stromstärke i ist, $R = R(i)$. Bei vielen Leitern ist aber der Widerstand auch an sich schon, unabhängig von der Temperatur, eine Funktion von i, nämlich dann, wenn die Zahl der Ladungsträger im Leiter von der Stromstärke abhängt. Wir werden einen solchen Fall bei den ionisierten Gasen kennen lernen (§ 285). Das OHMsche Gesetz ist dann zu verallgemeinern und lautet

$$U = i R(i). \qquad (17)$$

Man spricht von einer steigenden oder fallenden Charakteristik, je nachdem der Differentialquotient dU/di der Charakteristik einen positiven oder negativen Wert hat. Allgemein ist

$$\frac{dU}{di} = R(i) + i\,\frac{dR(i)}{di}. \qquad (18)$$

Es gibt Fälle, in denen die Funktion $R(i)$ eine derartige Gestalt hat, daß dU/di bei genügend hoher Stromstärke i negativ wird.

Bei fallender Charakteristik treten im Leiter labile Zustände ein. Jede zufällige kleine Erhöhung der Stromstärke bewirkt ein Sinken des Widerstandes und damit eine weitere Steigerung der Stromstärke, mit der ein erneutes Sinken des Widerstandes verbunden ist, so daß die Stromstärke, soweit die sonst im Stromkreise enthaltenen Widerstände es zulassen, weiter und weiter ansteigt.

258. Innerer Widerstand, Reihen- und Parallelschaltung von Stromquellen. In einem geschlossenen, eine Stromquelle (Akkumulator, Element usw.) enthaltenden Stromkreise durchfließt der Strom nicht nur die an die Stromquelle angeschlossenen Leiter, sondern auch die Stromquelle selbst. Der Strom ist in sich ringförmig geschlossen. Und zwar fließt er innerhalb der Stromquelle von der negativen zur positiven, außerhalb von der positiven zur negativen Klemme der Stromquelle (Richtung des positiven Stromes! § 244). Es kommt daher für die Berechnung der Stromstärke im Kreise nicht nur der Widerstand R_a des äußeren Leiterkreises, sondern auch der innere Widerstand R_i der Stromquelle in Betracht. Die elektromotorische Kraft der Stromquelle sei E, und es fließe im Stromkreise der Strom i. Dann ist nach dem 2. KIRCHHOFFschen Satz

$$E = i\,(R_a + R_i) = U_a + U_i\,, \quad \text{bzw.} \quad i = \frac{E}{R_a + R_i}\,. \tag{19}$$

Folglich ist ferner

$$U_a = E\,\frac{R_a}{R_a + R_i} \quad \text{und} \quad U_i = E\,\frac{R_i}{R_a + R_i}\,. \tag{20}$$

Die an dem äußeren Widerstand R_a liegende Spannung U_a ist also kleiner als die elektromotorische Kraft der Stromquelle, nähert sich ihr aber um so mehr, je kleiner R_i gegenüber R_a ist. Ist $R_i \ll R_a$, so wird $U_a = E$. Da U_a auch die Spannung zwischen den Klemmen der belasteten Stromquelle ist, so bezeichnet man sie auch als die Klemmenspannung der belasteten Stromquelle. Sie ist bei sehr großem äußeren Widerstand gleich der elektromotorischen Kraft der Stromquelle. Deshalb kann man letztere mittels eines Spannungsmessers von großem Widerstand messen. Sonst ist die Klemmenspannung stets kleiner als die elektromotorische Kraft. Bei Entnahme von Strom aus einer Stromquelle liegt stets ein Teil des Spannungsabfalls im Stromkreise, nämlich U_i, im Innern der Stromquelle. Man sieht, daß es im allgemeinen vorteilhaft sein wird, wenn eine Stromquelle einen möglichst kleinen inneren Widerstand R_i hat. Hierin liegt, neben vielem andern, der große Vorzug der Akkumulatoren gegenüber den älteren Elementen.

Verbindet man die Klemmen einer Stromquelle durch einen sehr kleinen Widerstand ($R_a \ll R_i$), so tritt ein sog. Kurzschluß der Stromquelle ein. Aus Gl. 19 folgt, daß die Stärke des alsdann fließenden Stromes $i = E/R_i$ beträgt. Ein stärkerer Strom kann der betreffenden Stromquelle nicht entnommen werden. In der Regel dürfen ihr aber nur weit schwächere Belastungen zugemutet werden, wenn sie nicht Schaden leiden soll. So hat z. B. ein Akkumulator, der bis zu 3 Amp. belastet werden darf, einen inneren Widerstand R^i von etwa 0,02 Ohm. Er liefert also bei einer elektromotorischen Kraft E von etwa 2 Volt einen Kurzschlußstrom von etwa 100 Amp.

Stehen für die Erzeugung eines Stromes mehrere gleichartige Stromquellen zur Verfügung, so ist von Fall zu Fall zu entscheiden, in welcher Weise diese am besten zur Erzeugung eines möglichst starken Stromes verwendet werden. Es seien n gleiche Stromquellen je vom inneren Widerstande R_i und der elektromotorischen Kraft E verfügbar.

1. Diese Stromquellen werden alle hintereinander geschaltet (Abb. 227a). Dann hat diese „Batterie“ die elektromotorische Kraft nE, und der gesamte innere Widerstand der Stromquelle ist nR_i. Es ist daher die Stromstärke $i = nE/(nR_i + R_a)$. Ist $R_a \gg nR_i$, so ist die Stromstärke angenähert gleich nE/R_a, man erreicht also mit n hintereinander geschalteten Stromquellen annähernd die $n$fache Wirkung einer einzigen Stromquelle. Ist dagegen $R_a \ll nR_i$, so ist, fast unabhängig von n, die Stromstärke sehr angenähert $i = E/R_i$. Man gewinnt in diesem Falle durch die Reihenschaltung mehrerer Stromquellen keinen nennenswerten Vorteil. Die Reihenschaltung ist also nur dann von Nutzen, wenn der äußere Widerstand groß gegen den inneren Widerstand ist.

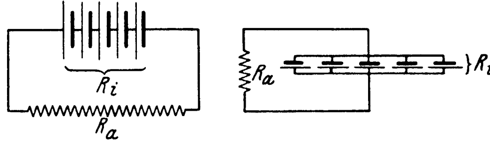


Abb. 227. a Reihenschaltung, b Parallelschaltung von Stromquellen.

2. Die n gleichen Stromquellen werden alle parallelgeschaltet (Abb. 227b). Dann hat die Batterie die gleiche elektromotorische Kraft E wie die einzelnen Stromquellen, und der gesamte innere Widerstand ist (§ 250) R_i/n. Die Stromstärke beträgt daher $i = E/(R_i/n + R_a)$. Ist $R_a \gg R_i/n$, so ist i sehr angenähert gleich E/R_a, also unabhängig von der Zahl n der Stromquellen. Ist aber $R_a \ll R_i$, so ist $i = nE/R_i$, unabhängig von R_a und proportional der Zahl der parallelgeschalteten Stromquellen. Die Parallelschaltung empfiehlt sich also in denjenigen Fällen, in denen es auf große Stromstärke bei kleinem äußeren Widerstand ankommt.

Es sind natürlich noch andere Schaltungsarten von n Stromquellen möglich (teils parallel, teils hintereinander). Wie eine einfache Rechnung zeigt, wird die größte Stromstärke erzielt, wenn die Schaltung so gewählt wird, daß der innere Widerstand der Batterie gleich dem äußeren Widerstand ist.

259. **Berechnung der Stromstärke in verzweigten Systemen.** Von der Gl. 19 (§ 258) kann man eine interessante und in manchen Fällen sehr nützliche Anwendung machen, die wir an zwei Beispielen erläutern wollen. Gegeben sei ein Stromkreis, wie er in Abb. 228a dargestellt ist. Die Batterie habe die elektromotorische Kraft E (die äußeren Widerstände seien so groß, daß der innere Widerstand der Batterie dagegen vernachlässigt werden, ihre Klemmenspannung also stets ihrer elektromotorischen Kraft gleichgesetzt werden kann). Wir wollen die Stromstärke berechnen, die im Widerstand R_1 herrscht. Natürlich können wir das auf Grund des OHMschen Gesetzes und der KIRCHHOFFschen Regeln tun. Viel einfacher kommen wir auf folgende Weise zum Ziel. Wir betrachten die Punkte A und B, an denen die Enden von R_1 liegen, wie die Klemmen einer Stromquelle, von der aus ein Strom durch R_1 fließt. Wir berechnen zunächst die elektromotorische Kraft E' dieser Stromquelle. Sie ist offenbar gleich der Spannung, die derjenigen einer offenen wirklichen Stromquelle entspricht, also der Spannung, die zwischen A und B herrschen würde, wenn diese Punkte nicht durch R_1 als äußeren Widerstand verbunden wären. Aus Gl. 13, § 250, ergibt sich $E' = ER_2/(R_2 + R_3)$. Der äußere Widerstand ist $R_a = R_1$. Zur Berechnung des inneren Widerstandes müssen wir bedenken, daß die Punkte A und B — von R_1 abgesehen — auf doppelte Weise mit-

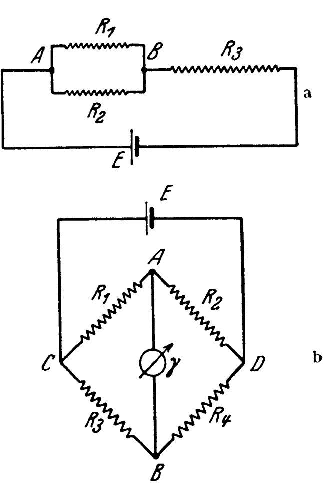


Abb. 228. Zur Berechnung der Stromstärke bei Stromverzweigungen.

einander verbunden sind, nämlich durch R_2 und (über die Batterie, deren Widerstand wir vernachlässigen) durch R_3. Diese beiden Widerstände in Parallelschaltung bilden also den inneren Widerstand der „Stromquelle" AB, und es ist nach Gl. 14, § 250, $R_i = R_2 R_3/(R_2 + R_3)$. Setzen wir die Werte von E', R_a und R_i in Gl. 19 ein, so folgt ohne weiteres

$$i = \frac{E\frac{R_2}{R_2 + R_3}}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}}.$$

Diese Gleichung kann man bei einiger Übung ohne jede Zwischenrechnung einfach hinschreiben. Durch Vertauschung von R_2 und R_1 erhalten wir den durch R_2 fließenden Strom. Weit deutlicher noch wird der Vorzug der vorstehenden Betrachtungsweise bei dem folgenden komplizierteren Beispiel. Gegeben sei die WHEATSTONEsche Brückenschaltung (§ 252). Es ist eine häufig vorkommende Aufgabe, den Strom zu berechnen, der durch das Galvanometer fließt, wenn die Widerstände nicht abgeglichen sind. Als „Stromquelle" haben wir die beiden Verzweigungspunkte A und B (Abb. 228b) zu betrachten, an denen das Galvanometer, dessen Widerstand γ Ohm betrage, liegt. Wir berechnen zunächst die elektromotorische Kraft dieser Stromquelle, wenn die elektromotorische Kraft der Batterie B gleich E ist. Zwischen A und C herrscht, wenn die Galvanometerleitung nicht geschlossen ist, die Spannung $E R_1/(R_1 + R_2)$, zwischen B und C die Spannung $E R_3(R_3 + R_4)$. Zwischen A und B besteht daher bei offener Galvanometerleitung die Spannung $E\,[R_1/(R_1 + R_2) - R_3/(R_3 + R_4)]$. Dies ist die „elektromotorische Kraft" der Stromquelle AB. Ihr innerer Widerstand setzt sich aus den Widerständen R_1, R_2, R_3 und R_4 auf folgende Weise zusammen. Von A ausgehend, sind R_1 und R_2 parallel geschaltet und an ihren anderen Enden bei C und D durch die Batterieleitung kurz geschlossen (den inneren Widerstand der Batterie vernachlässigen wir hier wieder). Von den kurz geschlossenen Punkten C und D ab setzt sich der innere Widerstand in den parallel geschalteten Widerständen R_3 und R_4 fort, die mit ihren anderen Enden an B liegen. Der innere Widerstand der Stromquelle AB beträgt demnach $R_i = R_1 R_2/(R_1 + R_2) + R_3 R_4/(R_3 + R_4)$. Der äußere Widerstand ist der des Galvanometers, $R_a = \gamma$. Durch Anwendung der Gl. 19 folgt nunmehr für die Stromstärke im Galvanometer

$$i = \frac{E\left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_3}{R_3 + R_4}\right)}{\gamma + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}}$$

Die Berechnung dieses komplizierten Ausdrucks aus dem Ohmschen Gesetz und den KIRCHHOFFschen Regeln wäre außerordentlich viel zeitraubender gewesen als die vorstehende einfache Überlegung, bei der lediglich die Berechnung des inneren Widerstandes der „Stromquelle" einiges Nachdenken erfordert.

260. Stromarbeit. Stromleistung. Fließt in einem Leiter, dessen Widerstand R ist und an dessen Enden eine Spannung U liegt, ein Strom $i = U/R$, so werden fortgesetzt Ladungsträger von dem einen Ende des Leiters nach dem andern über den Bereich der Spannung U transportiert. Wäre die Bewegung dieser Ladungsträger keinen hemmenden Kräften unterworfen, so würden sie beschleunigt werden, und zwar wäre der Energiezuwachs eines einzelnen Ladungsträgers auf dem ganzen Wege durch den Leiter gleich εU, wenn ε die Ladung des Ladungsträgers ist. Tatsächlich aber unterliegen die Ladungsträger reibungsartigen Kräften und bewegen sich mit im Durchschnitt konstanter Geschwindig-

keit, indem sie ihren Energiegewinn bei den Zusammenstößen mit den Molekülen oder Atomen des Leiters an diese abgeben (§ 245) und in thermische Molekularbewegung im Leiter umwandeln. Ist insgesamt die Ladung e durch den Leiter geflossen, so ist die an ihr geleistete Arbeit $A = Ue$ in Form von Wärme (sog. JOULEsche Wärme oder Stromwärme) auf den Leiter übergegangen. Die Leistung (§ 45) des Stromes beträgt demnach $L = dA/dt = U de/dt$. Nun ist aber $de/dt = i$ die Stromstärke im Leiter (§ 244), und wir erhalten

$$L = Ui \text{ erg/sec bzw. Watt,} \tag{21}$$

je nachdem wir U und i in Einheiten des elektrostatischen oder des praktischen Maßsystem messen (s. unten).

Die vom Strome in der Zeit t geleistete Arbeit ergibt sich nach § 45, Gl. 29, zu

$$A = \int_0^t L\,dt = \int_0^t i\,U\,dt \text{ erg, bzw. Wattsekunden.} \tag{22}$$

Bei konstanter Stromstärke und Spannung können wir statt dessen schreiben

$$A = Uit \text{ erg bzw. Wattsekunden} \tag{23}$$

Die hier abgeleiteten Beziehungen gelten nicht nur in festen Leitern, sondern auch in allen übrigen Fällen, in denen die Ladungsträger den Leiter ohne merklichen Geschwindigkeitszuwachs durchlaufen, insbesondere auch in flüssigen Leitern.

Unter Benutzung des OHMschen Gesetzes lassen sich die vorstehenden Gleichungen auch in folgender Form schreiben:

$$L = Ui = \frac{U^2}{R} = i^2 R \text{ erg/sec, bzw. Watt,} \tag{24}$$

$$A = \int_0^t U\,i\,dt = \int_0^t \frac{U^2}{R}\,dt = \int_0^t i^2 R\,dt \text{ erg, bzw. Wattsekunden,} \tag{25}$$

oder bei konstanter Stromstärke und Spannung

$$A = Uit = \frac{U^2}{R}\,t = i^2 Rt \text{ erg, bzw. Wattsekunden.} \tag{26}$$

Es ist 1 Watt $= 10^7$ erg/sec und 1 Wattsekunde $= 10^7$ erg (§ 45). Auf Grund von § 240 stellt man leicht fest, daß

$$1 \text{ Volt} \times 1 \text{ Ampere} = 10^7 \text{ erg} = 1 \text{ Wattsekunde}$$

ist. Für 1 Wattsekunde ist auch die Bezeichnung 1 Joule in Gebrauch.

Setzt man nach § 193 1 Wattsekunde = 0,239 cal, so erhält man die in der Zeit t im Leiter in der Form von Wärme entwickelte Arbeit in Kalorien,

$$Q = 0{,}239\,Uit \text{ cal.} \tag{27}$$

Aus den KIRCHHOFFschen Sätzen folgt, daß die Leistung eines Stromes i in einem geschlossenen, unverzweigten Leiterkreise

$$L = i^2 \sum R_k = i^2 \sum U_k = Ei \text{ erg/sec bzw. Watt} \tag{28}$$

ist.

Den Betrag von 0,239 cal nennt man auch das elektrische Wärmeäquivalent.

Für die Zwecke der Technik ist die Wattsekunde unbequem klein. Man verwendet daher bei der technischen Messung elektrischer Leistung statt des Watt das Kilowatt (kW) = 1000 Watt, und als technische Einheit der Arbeit dient

die Kilowattstunde (kWSt), d. h. die bei einer Leistung von 1 kW in 1 Stunde geleistete Arbeit. Es ist

$$1 \text{ kWSt} = 1000 \cdot 60 \cdot 60 \text{ Wattsekunden} = 3600000 \text{ Wattsekunden}$$
$$= 3{,}6 \cdot 10^{13} \text{ erg} = 3{,}67 \cdot 10^{5} \text{ mkg}^{*} = 8{,}6 \cdot 10^{5} \text{ cal}.$$

Ein Kilowatt ist gleich 1,36 (oder rund $^4/_3$) Pferdestärken (§ 45).

261. Praktische Anwendungen der Stromwärme. Die Erzeugung von Wärme durch den elektrischen Strom findet vielfache praktische Anwendungen.

In der elektrischen Glühlampe wird ein dünner Draht aus Wolfram durch den elektrischen Strom zur Weißglut erhitzt. Er befindet sich in einem meist möglichst weitgehend luftleer gemachten Glasgefäß. Bei manchen Lampen ist das Glasgefäß mit reinem Stickstoff (Druck rund $^1/_2$ Atm.) gefüllt, wodurch ihr Nutzeffekt etwa verdoppelt wird, da man solche Lampen stärker belasten kann als gasleere Lampen. Hierdurch wird der optische Nutzeffekt der Lampen ganz bedeutend verbessert (vgl. § 486). (Der Stickstoff verhindert die sonst bei hoher Temperatur eintretende Verdampfung des Wolframfadens weitgehend.) Die Einführung der Metallfadenlampen, die besonders seit der Erfindung eines Verfahrens zur Herstellung von dünnen Wolframdrähten datiert, bedeutet einen außerordentlichen Fortschritt gegenüber der älteren Kohlefadenlampe (verkohlte Kokosnußfaser), da die Drähte aus dem sehr schwer schmelzbaren Wolfram weit höher erhitzt werden können als der Kohlefaden. Der Energieverbrauch einer normalen Metallfadenlampe beträgt zwischen 0,5 und 1 Watt für je eine Kerze ihrer Lichtstärke (§ 400). Bei den elektrischen Bogenlampen geht ein elektrischer Strom (Lichtbogen, § 293) durch die Luft zwischen zwei Kohlestäben über. Dadurch bildet sich am positiven Kohlestab ein hell weißglühender Krater aus, der eine intensive Lichtquelle darstellt.

Die Glimmlichtlampen beruhen nicht auf der Jouleschen Wärme, sondern es wird die in ihnen befindliche Gasfüllung (Neon oder andere Gase) durch eine durch das Gas hindurchgehende Glimmentladung elektrisch zum Leuchten gebracht (§ 290).

In den in der drahtlosen Telegraphie und Telephonie gebrauchten Verstärkerröhren (§ 394) wird die Kathode — ein ausgespannter Wolframdraht — durch einen elektrischen Strom zum Glühen gebracht. Auch für Heizzwecke wird die Joulesche Wärme ausgenutzt. Die bekannten Schmelzsicherungen in den elektrischen Leitungen bestehen aus einem dünnen Metalldraht, der bei Überschreitung der zulässigen Stromstärke infolge der Jouleschen Wärme durchschmilzt und dadurch die Leitung gefahrlos unterbricht.

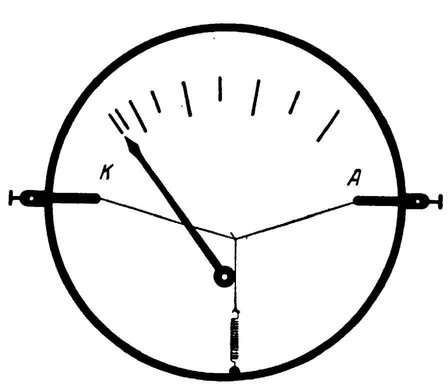


Abb. 229. Hitzdrahtstrommesser. Schema. (Aus Pohl, Elektrizitätslehre.)

In allen Fällen, in denen es nicht gerade auf die Wärmewirkung des Stromes abgesehen ist, bedeutet das Auftreten Joulescher Wärme einen unerwünschten und oft sehr lästigen Energieverlust.

Eine wichtige Anwendung findet die Joulesche Wärme in den Hitzdrahtstrommessern. Hier wird die Längenänderung, die ein Draht infolge seiner Erwärmung durch den elektrischen Strom erfährt, auf irgendeine Weise in die Bewegung eines Zeigers auf einer Skala übersetzt, an der man die durch das Instrument fließende Stromstärke abliest (Abb. 229).

Die Erwärmung des Drahtes ist nach Gl. 24 proportional i^2 und das gleiche gilt für die Längenänderung des Drahtes. Sie hängt also nicht von der Stromrichtung, dem Vorzeichen von i, ab. Dies hat zur Folge, daß ein Hitzdrahtstrommesser nicht nur Gleichstrom, sondern auch Wechselstrom (§ 375) anzeigt. Der Ausschlag eines Hitzdrahtstrommessers ist der Stromstärke nicht proportional, sondern wächst gemäß dem vorstehend Gesagten etwa mit dem Quadrat der Stromstärke. Allgemein gilt, daß Strommesser, deren Ausschlag i^2 proportional ist, sowohl für Gleich- wie für Wechselstrom verwendet werden können, während mit solchen, deren Ausschlag i proportional ist, nur Gleichstrom gemessen werden kann.

262. Berührungsspannung. Reibungselektrizität. Berühren sich zwei verschiedene Metalle, so besteht zwischen ihnen eine Spannung. Legt man z. B. zwei an isolierenden Handgriffen befestigte Platten aus Kupfer und Zink aufeinander (Abb. 230), so bilden sie einen Kondensator mit sehr kleinem Plattenabstand, also sehr großer Kapazität, und die zwischen den Platten herrschende Spannung bewirkt eine merkliche Aufladung der Platten. Reißt man sie schnell auseinander, so kann man mit einem Elektrometer nachweisen, daß sie entgegengesetzte Ladung besitzen. Dieser Effekt (Berührungsspannung, Voltaeffekt) wurde 1793 von VOLTA entdeckt.

Cu
Zn

Abb. 230. Zum Nachweis der Berührungsspannung von Metallen.

Man kann die Metalle in eine Reihe, die sog. Spannungsreihe, derart ordnen, daß irgendein Metall aus der Reihe negativ elektrisch wird, wenn es mit einem weiter links stehenden, positiv elektrisch, wenn es mit einem weiter rechts stehenden Metall in Berührung ist, z. B.

(+) Rb—K—Na—Al—Zn—Pb—Sn—Sb—Bi—Fe—Cu—Ag—
—Au—Pt (—).

Befinden sich in einem geschlossenen Leiterkreis mehrere verschiedene Metalle, so bewirken die zwischen ihnen auftretenden Berührungsspannungen das Auftreten elektromotorischer Kräfte im Kreise. Vorausgesetzt, daß sich alle Teile des Kreises auf gleicher Temperatur befinden (§ 263), ist jedoch die Summe dieser elektromotorischen Kräfte stets gleich Null und es fließt im Kreise kein Strom, z. B. E (Cu—Al) $+ E$ (Al—Cu) $= 0$ bzw. E (Cu—Al) $= —E$ (Al—Cu) oder E (Al—Sn) $+ E$ (Sn—Cu) $+ E$ (Cu—Al) $= 0$.

Eine der Berührungsspannung entsprechende Tendenz zum Übertritt von Ladungen von einem Stoff zu einem ihn berührenden, chemisch verschiedenen Stoff besteht nicht nur bei den Metallen, sondern bei allen Stoffen, auch bei den Nichtleitern. Jedoch genügt bei den letzteren die bloße Berührung meist noch nicht, um wirklich einen Übertritt der in ihnen sehr fest gebundenen Ladungsträger zu bewirken. Dazu ist ein wesentlich engerer Kontakt nötig, der z. B. durch Reiben der Stoffe aneinander erzeugt werden kann. Das ist die Ursache der sog. Reibungselektrizität, von der wir im Kapitel 21 schon häufig Gebrauch gemacht haben.

Die Reibungselektrizität ist die älteste, und war bis gegen Ende des 18. Jahrhunderts die allein bekannte elektrische Erscheinung. Schon im Altertum war bekannt, daß geriebener Bernstein (ἔλεκτρον) leichte Körper anzuziehen vermochte. Erst GILBERT entdeckte um 1600, daß die gleiche Eigenschaft auch vielen anderen Stoffen zukomme. Er war es auch, der der Erscheinung den Namen Elektrizität gab.

Quantitativ ist über die Reibungselektrizität nicht allzuviel bekannt. Nach COEHN lädt sich ein Stoff mit höherer Dielektrizitätskonstante gegenüber einem solchen mit kleinerer Dielektrizitätskonstante positiv auf.

Eine der Reibungselektrizität in gewissem Sinne verwandte Erscheinung ist die sog. Wasserfallelektrizität. Sie besteht darin, daß Wasser nach dem Aufprall auf ein Hindernis eine positive Ladung besitzt, während sich in der umgebenden Luft eine negative Ladung zeigt.

263. Thermoelektrische Erscheinungen. Die in § 262 besprochene Berührungsspannung zwischen zwei Metallen ist von der Temperatur der Berührungsstelle abhängig. Stellt man einen aus zwei verschiedenen Metallen bestehenden geschlossenen Leiterkreis her, z. B. indem man die beiden Metallstücke an ihren Enden zusammenlötet (es geht aber auch bei bloßer Berührung), und bringt man die beiden Berührungsstellen auf verschiedene Temperatur, so sind die elektromotorischen Kräfte in diesen nicht mehr vom gleichen Betrage, und ihre Summe ist nicht mehr Null. Es fließt also ein dauernder Strom im Kreise, dessen Energie aus der der einen Berührungsstelle zugeführten Wärme stammt (Abb. 231a). Diese 1821 von SEEBECK entdeckte Erscheinung heißt Thermoelektrizität oder Thermoeffekt. Die bei einer Temperaturdifferenz von 1^0 zwischen den Berührungsstellen im Kreise auftretende elektromotorische Kraft bezeichnet man als die Thermokraft der betreffenden Kombination. Sie ist besonders groß bei der Kombination Wismut-Antimon (10^{-4} Volt/grad). Bei der Kombination Eisen-Konstantan beträgt sie $0{,}53 \cdot 10^{-4}$ Volt/grad.

Vorrichtungen der beschriebenen Art heißen Thermoelemente. Ihre hauptsächlichste Verwendung finden sie zur Temperaturmessung. Man hat dabei den Vorteil, daß man, wenn die Drähte dünn sind und die Lötstelle sehr klein ist, die Temperatur an ganz bestimmten Punkten messen kann, nicht, wie mit dem Quecksilberthermometer, nur die mittlere Temperatur des von der Quecksilberkugel eingenommenen Raumes. Auch kann man die Temperatur in sehr engen Bohrungen messen. Weitere Vorteile liegen in ihrer sehr kleinen Wärmekapazität. Sie stellen sich daher sehr schnell ein und entziehen dem Körper, dessen Temperatur gemessen werden soll, nur sehr wenig Wärme. Thermoelemente finden deshalb in der praktischen Physik vielfache Anwendungen (vgl. auch § 467).

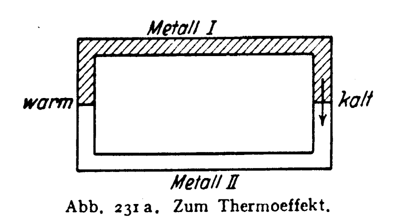


Abb. 231a. Zum Thermoeffekt.

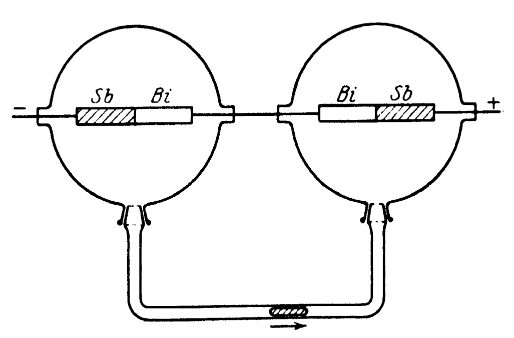


Abb. 231b. Zum Nachweis des PELTIER-Effekts.

Der Thermoeffekt hat seine Umkehrung im PELTIER-Effekt (1834). Wird die Verbindungsstelle zweier Metalle von einem Strom durchflossen, so tritt dort, je nach der Stromrichtung, Erwärmung oder Abkühlung ein. Zum Nachweis kann die in Abb. 231b dargestellte Vorrichtung dienen. Fließt durch die beiden Wismut-Antimon-Lötstellen ein Strom, so erwärmt sich die eine, die andere kühlt sich ab. Dies zeigt sich an einer Verschiebung des Quecksilberfadens, der sich in der Röhre befindet, die die beiden Glaskugeln (Luftthermometer) verbindet, in denen sich die beiden Lötstellen befinden.

23. Kapitel.

Elektrische Ströme in flüssigen Leitern.

264. Leitfähigkeit reiner Flüssigkeiten. Abgesehen von flüssigen Metallen und geschmolzenen Salzen, sind die meisten Flüssigkeiten, vorausgesetzt, daß sie chemisch sehr rein sind, sehr schlechte Leiter, zum großen Teil sogar ganz vorzügliche Isolatoren. Es ist in vielen Fällen, in denen sich bei einer reinen Flüssigkeit eine schwache Leitfähigkeit zeigt, zweifelhaft, ob sie nicht von ganz kleinen Resten von Verunreinigungen herrührt. So ist auch chemisch reines Wasser ein außerordentlich schlechter Leiter.

Auf Grund der bereits früher entwickelten Vorstellungen ist klar, daß die Leitfähigkeit einer Flüssigkeit davon abhängt, ob sich in ihr frei bewegliche Ladungsträger (Ionen, Elektronen) befinden. Mangelnde Leitfähigkeit bedeutet also bei einer Flüssigkeit einen Mangel an solchen Ladungsträgern.

265. Leitfähigkeit wässeriger Lösungen. Elektrolyse. Man verbinde zwei Stücke Platinblech A und K, welche sich in einem mit destilliertem Wasser gefüllten, vorher gut gereinigten Glasgefäß befinden, unter Einschaltung eines Strommeßinstrumentes mit den beiden Klemmen einer Akkumulatorenbatterie (4—10 Volt, Abb. 232). Das Meßinstrument zeigt einen schwachen Strom an, ein Beweis, daß das Wasser (das keineswegs chemisch rein ist) eine schwache Leitfähigkeit hat. Bringt man jetzt in das Wasser einige Tropfen einer Säure oder ein wenig von der Lösung irgendeines Salzes, so steigt die Stromstärke sofort an und erreicht bei größerer Konzentration beträchtliche Werte. Die Leitfähigkeit des Wassers rührt also fast ausschließlich von in ihm gelösten Stoffen her. Es haben aber nicht alle gelösten Stoffe diese Eigenschaft, sondern nur die Salze, Basen und Säuren; so erhöht z. B. gelöster Zucker die Leitfähigkeit des Wassers nicht. Ähnliche Erscheinungen, wenn auch nicht in so hohem Maße, zeigen Lösungen in anderen Flüssigkeiten. Die spezifische Leitfähigkeit von Lösungen reicht in keinem Falle an die der Metalle heran.

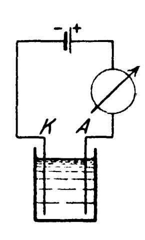


Abb. 232. Leitfähigkeit von Wasser.

Man bezeichnet die beiden in die Flüssigkeit getauchten, zur Stromzuführung dienenden Bleche als Elektroden. Die mit dem positiven Pol der Batterie verbundene nennt man die Anode, die mit dem negativen Pol verbundene die Kathode. Der (positive) Strom fließt also in der Flüssigkeit von der Anode zur Kathode. Eine durch gelöste Stoffe leitend gemachte Flüssigkeit nennt man einen Elektrolyten, die mit der Elektrizitätsleitung durch solche Flüssigkeiten verbundenen Erscheinungen Elektrolyse.

266. Abscheidungen an den Elektroden. Läßt man mittels Platinelektroden einen Strom durch eine wässerige Lösung einer Säure, z. B. Schwefelsäure, gehen, so bemerkt man an den Elektroden eine lebhafte Gasentwicklung (Abb. 233). Zur genaueren Untersuchung dieser Erscheinung bedient man sich eines sog. Voltameters (nicht mit einem Voltmeter zu verwechseln!), bei dem sich die an den beiden Elektroden gebildeten Gasmengen in getrennten Röhren sammeln. Es zeigt sich, daß die Mengen in beiden Röhren verschieden sind, und zwar erscheint an der Kathode etwa doppelt soviel Gas wie an der Anode. Die Untersuchung dieser Gase ergibt, daß sich an der Anode Sauerstoff (bringt glimmenden Span zum hellen Glühen oder zum Brennen), an der Kathode Wasserstoff (verbrennt mit bläulicher Flamme) gebildet hat. (Daß nicht genau doppelt soviel Wasserstoff wie Sauerstoff, sondern etwas mehr Wasserstoff erscheint, liegt daran, daß von dem an der Anode auftretenden Sauerstoff ein nicht

unbeträchtlicher Teil im Wasser gelöst wird.) Sammelt man jedoch die ganze gebildete Gasmenge, so erhält man eine Mischung von 1 Teil Sauerstoff und 2 Teilen Wasserstoff, d. h. Knallgas. Dies kann man durch die unter lebhaftem Knall erfolgende Verbrennung feststellen, wenn man das Gas unter Wasser in einem Reagenzglas auffängt oder es durch Seifenlösung perlen läßt, deren so gebildete Blasen man anzündet (Vorsicht!).

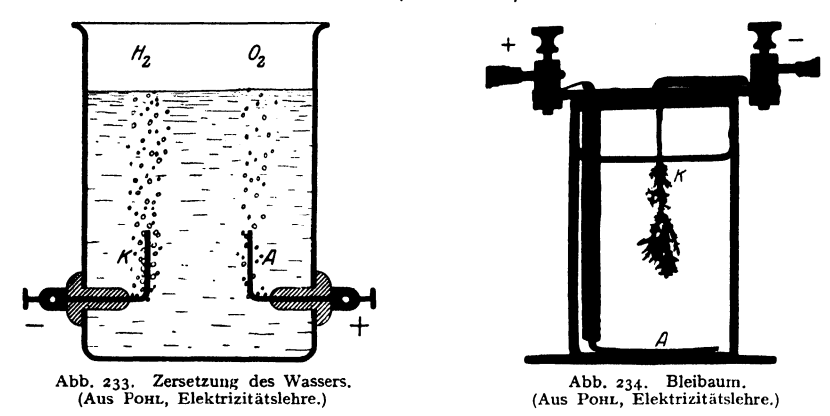


Abb. 233. Zersetzung des Wassers. (Aus POHL, Elektrizitätslehre.)

Abb. 234. Bleibaum. (Aus POHL, Elektrizitätslehre.)

Eine hübsche Erscheinung zeigt sich, wenn man einen Strom durch eine wässerige Bleiazetatlösung hindurchschickt und als Kathode einen Bleidraht, als Anode eine Bleiplatte benutzt. Es scheidet sich dann an der Kathode Blei in kristallinischer Form als baumartiges Gebilde ab (Bleibaum, Abb. 234).

267. Elektrolytische Dissoziation. Wo ein Transport elektrischer Ladungen stattfindet, also ein elektrischer Strom fließt, müssen, wie schon oben betont, stets bewegliche Ladungsträger vorhanden sein, welche diese Ladung mit sich führen, wie es in den Metallen die Elektronen tun. Bei der Stromleitung durch einen Elektrolyten sind es die atomistischen Bestandteile der gelösten Stoffe, welche als Ladungsträger auftreten. Diese Ladungsträger werden nicht erst durch die an eine elektrolytische Zelle gelegte Spannung erzeugt, sondern sind in jedem Elektrolyten stets vorhanden. Wird z. B. Kochsalz, NaCl, in Wasser gelöst, so befindet sich dieses im Wasser nicht in molekularer Form als NaCl-Moleküle, sondern die Na-Atome und die Cl-Atome sind, jedenfalls bei nicht zu hoher Konzentration, voneinander getrennt, und außerdem tragen die Na-Atome eine positive, die Cl-Atome eine negative elektrische Ladung. In diesem Zustande bezeichnet man die Atome und überhaupt alle elektrisch geladenen atomistischen oder molekularen Gebilde, wie schon des öfteren erwähnt, als *Ionen*. (Weshalb das Na in Gestalt von Ionen nicht, wie metallisches Na, mit dem Wasser reagiert, wird später, § 502, erörtert werden.) Den Zerfall eines Moleküls in Ionen in einer Lösung nennt man *elektrolytische Dissoziation*. Bei der Lösung von Schwefelsäure, H_2SO_4, entstehen aus jedem H_2SO_4-Molekül zwei positive H-Ionen und ein negatives SO_4-Ion, ebenso bei der Lösung von Kupfersulfat, $CuSO_4$, ein positives Cu-Ion und ein negatives SO_4-Ion. Da es sich um atomistische Gebilde handelt, so kann die auf den Ionen auftretende Ladung nur ein kleines ganzzahliges Vielfaches des elektrischen Elementarquantums (§ 213) sein. Und zwar zeigt sich, *daß die Zahl dieser Elementarquanten mit der Wertigkeit übereinstimmt*, welche das betreffende Atom oder die Atomgruppe (z. B. das Radikal SO_4) in der vorliegenden chemischen Verbindung besitzt. Von den Elementen tragen die in den linken Vertikalreihen des periodischen Systems stehenden Elemente, also insbesondere der Wasserstoff und

die Metalle, positive Ladungen, die in den rechten Vertikalreihen stehenden fast immer negative Ladungen. Säurereste (Radikale), wie SO_4, tragen negative Ladungen, und zwar so viele Elementarquanten, wie ihrer chemischen Valenz entspricht, das SO_4-Ion also zwei negative Elementarquanten (vgl. § 502).

Die besonders starke Dissoziation, die in Wasser eintritt, kann man auf Grund der ungewöhnlich hohen Dielektrizitätskonstanten des Wassers ($\varepsilon = 81$) verstehen. Das COULOMBsche Gesetz in seiner allgemeinen Form (Gl. 29, § 236) sagt aus, daß die Anziehung zweier Ladungen der Dielektrizitätskonstante des Mediums, in dem sie sich befinden, umgekehrt proportional ist. In Wasser ist demnach die Kraft, mit der zwei Ladungen entgegengesetzten Vorzeichens einander anziehen, 81mal kleiner als in Luft. Es ist daher verständlich, daß ein Molekül, das aus Ionen besteht, die durch die zwischen ihren Ladungen wirkenden Kräfte aneinander gebunden sind (§ 502), in Wasser eine starke Tendenz hat, in seine Bestandteile zu zerfallen, bzw. daß die von der thermischen Bewegung herrührenden Stöße es sehr leicht zum Zerfall bringen. (Das besondere elektrische Verhalten des Wassers erklärt sich genauer daraus, daß die Wassermoleküle besonders große elektrische Momente haben. Das führt einerseits zu dem besonders hohen Wert der Dielektrizitätskonstante. Andrerseits bewirkt es das Auftreten besonders starker atomarer elektrischer Felder in der Umgebung der Wassermoleküle, und diese sind es, die die dissozierende Wirkung auf die Moleküle des gelösten Stoffes ausüben.)

268. Der Mechanismus der Elektrizitätsleitung in Elektrolyten. Legt man an zwei in einem Elektrolyten befindliche Elektroden eine Spannung, so entsteht im Elektrolyten genau wie in einem metallischen Leiter ein elektrisches Feld, welches die in ihm vorhandenen Ladungsträger in Bewegung setzt, und zwar die positiven Ionen in Richtung des Feldes, also auf die Kathode K hin, die negativen gegen die Richtung des Feldes, auf die Anode A hin (Abb. 235). Für die Bewegung der Ionen kann man genau die gleichen Überlegungen anstellen, wie es in § 245 für die Elektronen in den Metallen geschehen ist, sogar mit noch größerem Recht, denn sie entsprechen in diesem Falle der Wirklichkeit weitgehend. Es gilt also auch für Elektrolyte das OHMsche Gesetz.

Die auf die verschiedenen Ionenarten wirkenden bewegungshemmenden Kräfte sind verschieden groß, z. B. für das Cl-Ion fünfmal so groß wie für das H-Ion. Infolgedessen sind die Wanderungsgeschwindigkeiten der Ionen verschieden. Die Geschwindigkeit, die ein Ion bei der Feldstärke 1 Volt/cm hat, nennt man seine Beweglichkeit (vgl. § 245).

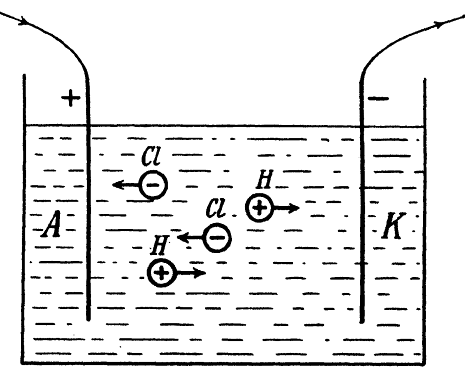


Abb. 235. Schema der Ionenwanderung in einer HCl-Lösung.

Da die positiven Ionen zur Kathode, die negativen zur Anode wandern, nennt man erstere auch Kationen, letztere Anionen.

Die Einzelheiten der sich beim Stromdurchgang durch Elektrolyte abspielenden Vorgänge gehören im allgemeinen in das Gebiet der physikalischen Chemie. Es werden daher im folgenden nur die wichtigsten Tatsachen besprochen.

269. Die FARADAYschen Gesetze. Da bei der Leitung durch Elektrolyte die an die Elektroden gelangenden Ladungen auf den Atomen bzw. Atomkomplexen des gelösten Stoffes sitzen, so müssen diese zugleich mit den Ladungen

an die Elektroden gelangen und dort in die Erscheinung treten. Tatsächlich beobachtet man in vielen Fällen die hiernach zu erwartenden Abscheidungen an den Elektroden. (In den Fällen, wo sie nicht auftreten, liegt das an gewissen chemischen Vorgängen an den Elektroden, § 270.)

Aus den Ausführungen der vorhergehenden Paragraphen ergeben sich nun ohne weiteres die Gesetze, die für den Zusammenhang zwischen dem durch einen Elektrolyten fließenden Strom i und den durch diesen Strom an den Elektroden abgeschiedenen Substanzmengen gelten. Es sei n die Zahl der in 1 Sekunde an einer der beiden Elektroden abgeschiedenen Ionen (geladene Atome oder Atomgruppen), μ die Masse eines Ions, z die chemische Wertigkeit der betreffenden Ionen, ε das elektrische Elementarquantum, also $z\varepsilon$ die Ladung jedes Ions. Denn, wie bereits oben erwähnt, trägt ein Ion so viele Elementarquanten, wie seine Wertigkeit beträgt. Dann ist die Stromstärke, d. h. die in 1 sec an der Elektrode abgegebene Elektrizitätsmenge,

$$i = n z \varepsilon . \tag{1}$$

Gleichzeitig wird in 1 sec an der Elektrode die Masse $n\mu$ abgeschieden, also in der Zeit t die Masse

$$m = n \mu t . \tag{2}$$

Aus Gl. 1 und 2 folgt, daß die in der Zeit t durch einen Strom i abgeschiedene Masse m

$$m = \frac{\mu}{z\varepsilon} i t = A i t = A e \tag{3}$$

ist, wobei

$$A = \frac{\mu}{z\varepsilon} \tag{4}$$

und $e = it$ die mit der Masse m transportierte Elektrizitätsmenge ist. Die Gl. 3 und 4 enthalten die beiden FARADAYschen Gesetze der Elektrolyse (1833). Gl. 3 (erstes FARADAYsches Gesetz) besagt: Die abgeschiedenen materiellen Mengen m sind der Stromstärke i und der Zeit t, während der der Strom floß, also der durchgegangenen Elektrizitätsmenge e proportional und einer Konstanten A, die das elektrochemische Äquivalent heißt und von der Art der Ionen abhängt, denn sie enthält nach Gl. 4 die Ionenmasse μ und die Wertigkeit z. Multiplizieren wir auf der rechten Seite von Gl. 4 Zähler und Nenner mit der Zahl der Atome im Grammatom, der LOSCHMIDTschen Zahl N (§ 96), so ist der Zähler $N\mu$ gleich dem Atomgewicht α des Ions bzw. bei Ionen, die aus mehreren Atomen bestehen (z. B. SO_4), gleich der Summe der Atomgewichte ihrer Bestandteile, und wir können schreiben:

$$A = \frac{N\mu}{zN\varepsilon} = \frac{\alpha}{zC}, \tag{5}$$

wobei

$$C = N\varepsilon \tag{6}$$

die sog. FARADAYsche Konstante ist. Gl. 5 enthält das zweite FARADAYsche Gesetz: Die elektrochemischen Äquivalente der Ionen verhalten sich wie die Quotienten aus Atomgewicht α und Wertigkeit z, d. h. wie ihre chemischen Äquivalentgewichte. An die Stelle des Atomgewichts tritt bei Gebilden, die aus mehreren Atomen bestehen (wie z. B. SO_4), die Summe der Atomgewichte ihrer Bestandteile.

Die Proportionalität der abgeschiedenen Menge m mit der gleichzeitig transportierten Ladung e ist eine selbstverständliche Folge der Tatsache, daß alle chemisch gleichen Ionen auch die gleiche Ladung tragen.

Die FARADAYsche Konstante C ist, als Produkt zweier universeller, d. h. nicht vom Material abhängiger Konstanten, ebenfalls eine solche und von der Art des betreffenden Ions und allen äußeren Bedingungen unabhängig. Ihr Zahlenwert beträgt nach den zuverlässigsten Messungen (an Silber)

$$C = N\varepsilon = 96494 \text{ Coulomb/Grammatom bzw. Mol.} \tag{7}$$

Die von einem Grammatom oder Mol z-wertiger Ionen getragene Ladung beträgt demnach $zN\varepsilon$, z. B. beim zweiwertigen Cu oder beim zweiwertigen SO_4 $2N\varepsilon$.

Die FARADAYsche Konstante hat eine große Bedeutung für die Atomphysik, denn sie erlaubt, wenn eine der beiden atomistischen Größen N und ε bekannt ist, die andere zu berechnen. So erhalten wir z. B. unter Zugrundelegung des Wertes $\varepsilon = 1{,}59_1 \cdot 10^{-19}$ Coulomb (§ 213), für N den bereits § 96 angeführten Wert der LOSCHMIDTschen Zahl $N = 6{,}06_0 \cdot 10^{23}$.

In der Tab. 24 sind die gemessenen elektrochemischen Äquivalente A einiger Elemente in Coulomb/Mol zusammengestellt, ferner deren Atomgewichte α, ihre Wertigkeit z und das Verhältnis α/A, welches nach Gl. 5 gleich $z \cdot C$ sein muß, und $N\varepsilon = \alpha/zA$. Die Tabelle zeigt, daß die Messungen das Gesetz mit großer Genauigkeit bestätigen.

Tabelle 24. Elektrochemische Äquivalente.

	$A \cdot 10^3$	α	z	α/A	$N\varepsilon = \alpha/zA$
H	0,01045	1,008	1	96459	96459
Ag	1,118	107,88	1	96494	96494
O	0,0829	16,00	2	193004	96502
Cu	0,3294	63,57	2	192987	96494
N	0,0484	14,00	3	289256	96419
Al	0,0936	27,1	3	289530	96510
Sn	0,3083	119,0	4	386000	96500
V	0,1057	51,0	5	482498	96500
U	0,4119	238,5	6	578784	96464

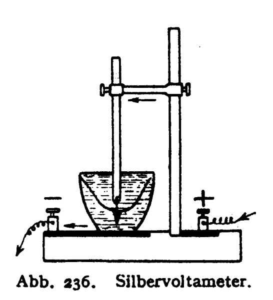


Abb. 236. Silbervoltameter.

Der zuverlässigste Wert ist derjenige für Silber. Wegen der großen Genauigkeit, mit der derartige Messungen (außer der Messung der Stromstärke nur Wägung und Zeitmessung!) ausgeführt werden können, ist die gesetzliche Einheit der Stromstärke auf das elektrochemische Äquivalent des Silbers basiert. Das gesetzliche Ampere ist diejenige Stromstärke, bei der in 1 sec 1,118 mg Silber abgeschieden werden (vgl. § 314). Für diese Messungen bedient man sich eines Silbervoltameters (Abb 236), in dem Silber aus der Lösung eines Silbersalzes auf einer Platinelektrode niedergeschlagen wird. Genaue Eichungen von Strommessern werden durch Vergleich mit dem Silbervoltameter ausgeführt.

270. Sekundäre Prozesse an den Elektroden. In sehr zahlreichen Fällen werden nicht die Bestandteile des gelösten Stoffes an den Elektroden abgeschieden, z. B. aus verdünnter Schwefelsäure nicht Wasserstoff und das Radikal SO_4, sondern die Bestandteile des Wassers, Sauerstoff und Wasserstoff. Diese Erscheinung erklärt sich daraus, daß an den Elektroden sog. sekundäre chemische Prozesse vor sich gehen (DANIELL 1839). Wir betrachten den Fall der verdünnten Schwefelsäure, H_2SO_4, in der sich auf je zwei positive H-Ionen ein negatives SO_4-Ion befindet. Die H-Ionen wandern an die Kathode, nach welcher von der andern Seite, von der Stromquelle her, Elektronen durch die Zuleitung fließen. An der Kathodenoberfläche vereinigt sich jedes H-Ion mit einem Elektron und verwandelt sich so in ein elektrisch neutrales H-Atom. (Man beachte folgendes: Der — im Sinne unserer Stromrichtungsdefinition [§ 244] — positive Strom

wird an der Kathode innerhalb des Elektrolyten durch positive Ionen gebildet, die auf die Kathode zulaufen, jenseits der Kathode aber, im Draht, durch die in entgegengesetzter Richtung auf die Kathode zu laufenden negativ geladenen Elektronen.) Je zwei H-Atome verbinden sich zu einem H_2-Molekül. Diese letzteren bilden Blasen von Wasserstoffgas, die aufsteigen und abgeschieden werden. Hier wird also der eine Bestandteil des gelösten Stoffes unmittelbar ausgeschieden. Anders an der Anode. Hier gibt jedes zweiwertige SO_4-Ion zwei Elektronen an die Elektrode ab und wird dadurch elektrisch neutral. In diesem Zustande aber kann es mit dem Wasser reagieren (vorausgesetzt, daß es nicht mit dem Material der Elektrode reagiert, s. unten). Über den Grund dafür, weshalb ein Ion erst nach Neutralisation seiner Ladung chemisch reagiert, s. § 502. Die Reaktion geht nach folgender Gleichung vor sich:

$$2\,SO_4 + 2\,H_2O = 2\,H_2SO_4 + 2\,O, \quad O + O = O_2.$$

Es werden also Sauerstoffatome frei, die sich zu Molekülen vereinigen und, wie an der Kathode der Wasserstoff, an der Anode ausgeschieden werden. Die gebildete Schwefelsäure geht in Lösung und dissoziiert von neuem. Da auf ein SO_4-Ion zwei Wasserstoffionen entfallen, so entspricht der Ausscheidung von einem O_2-Molekül diejenige von zwei H_2-Molekülen. Es werden also tatsächlich die Bestandteile des Wassers im richtigen Verhältnis abgeschieden, und der Vorgang erscheint als eine Wasserzersetzung.

Besteht die Anode aus Kupfer oder einem andern unedlen Metall, so reagiert das SO_4-Ion nicht mit dem Wasser, sondern mit diesem Metall, es bildet sich z. B.

$$SO_4 + Cu = CuSO_4,$$

also Kupfersulfat, welches in Lösung geht, und es findet keine Ausscheidung an der Anode statt. An der Kathode wird nach wie vor Wasserstoff abgeschieden. Ersatz für diesen Verlust erhält die Lösung aber aus der Anode in Gestalt von je einem doppelt geladenen Cu-Ion auf je zwei ausgeschiedene einfach geladene H-Ionen. Dabei wird die Anode allmählich aufgelöst. An die Stelle der H_2SO_4-Lösung tritt allmählich eine $CuSO_4$-Lösung, aus der dann auch Cu an der Kathode abgeschieden wird.

War von Anfang an der Elektrolyt eine $CuSO_4$-Lösung, so ändert sich an den Betrachtungen nichts; nur wird jetzt an der Kathode sofort Cu aus der Lösung abgeschieden und der Lösung an der Anode aus dem Cu der Elektrode wieder ersetzt, so daß die Lösung unverändert bleibt. Es wandert also das Kupfer der Anode durch die Lösung an die Kathode.

Wieder etwas anders liegen die Verhältnisse, wenn man z. B. einen Strom mittels Platinelektroden durch eine verdünnte Lösung von Natriumsulfat, Na_2SO_4, gehen läßt. Die Na-Ionen wandern zur Kathode und erlangen dort nach Aufnahme eines Elektrons aus der Kathode chemische Reaktionsfähigkeit. Es tritt eine Reaktion mit dem Wasser ein:

$$2\,Na + 2\,H_2O = 2\,Na(OH) + H_2.$$

Der so entstandene Wasserstoff, H_2, wird ausgeschieden, in der Lösung bleibt Natronlauge, NaOH. An die Anode wandern die SO_4-Ionen, und hier tritt durch den schon besprochenen Prozeß eine Reaktion mit dem Wasser ein, welche zur Bildung von Sauerstoff, der abgeschieden wird, und Schwefelsäure, die in Lösung bleibt, führt. Die Schwefelsäure und die Natronlauge diffundieren wieder in die Lösung zurück, mischen sich und reagieren miteinander. Es entsteht wieder Natriumsulfat und Wasser, nach der Gleichung

$$H_2SO_4 + 2\,Na(OH) = Na_2SO_4 + 2\,H_2O.$$

Die Lösung bleibt also in ihrer chemischen Zusammensetzung unverändert, und das Endergebnis ist wieder die Zersetzung des Wassers. Die Lösung nimmt allmählich an Konzentration zu, weil nur die Bestandteile des Wassers ausgeschieden werden.

271. **Elektrolytische Leitung in nichtwässerigen Lösungen und in Schmelzen.** Bedingung für eine elektrolytische Leitung in einer Substanz ist das Vorhandensein von frei beweglichen Ionen. Daher leiten alle diejenigen Lösungen, in denen der gelöste Stoff dissoziiert ist. Die wässerigen Lösungen nehmen aber unter allen anderen einen hervorragenden Platz ein, weil das Wasser in besonders hohem Grade dissoziierend wirkt.

Im übrigen sind es unter den Flüssigkeiten besonders die geschmolzenen Salze, welche häufig eine beträchtliche elektrolytische Leitfähigkeit zeigen. Es ist begreiflich, daß Salze, welche ja schon im festen (kristallinischen) Zustand häufig aus Ionen bestehen (§ 528), auch in geschmolzener Form Ionen enthalten können. Jedoch kommt auch der Fall vor, daß sich beim Schmelzen eines Kristalls seine Ionen zu Molekülen vereinigen.

Bei flüssigen Metallen hat man neuerdings bei extrem hohen Stromdichten neben der Elektronenleitung auch Anzeichen einer schwachen elektrolytischen Leitfähigkeit gefunden, d. h. einen Transport von Metallionen im Strom.

272. **Technische Anwendungen der Elektrolyse.** Die Elektrolyse findet einige wichtige technische Anwendungen. Die eine ist die Galvanoplastik, nämlich die Herstellung von Metallniederschlägen auf elektrischem Wege. In diesem Falle bedient man sich als Elektrolyt einer Lösung eines Salzes des niederzuschlagenden Metalls und als Anode eines Blechs aus dem gleichen Metall, um die Konzentration der Lösung konstant zu halten. Als Kathode dient der Gegenstand, auf dem das Metall niedergeschlagen werden soll. Auf diese Weise werden z. B. Vergoldungen, Versilberungen, Vernicklungen, Verchromungen und Platinierungen hergestellt. Auch Nachbildungen von Gegenständen, z. B. von Münzen, werden auf diese Weise erzeugt. Man stellt zunächst mit irgendeiner plastischen Masse einen Abdruck des Gegenstandes her, macht die so entstandene Form an ihrer Oberfläche mit Kohlepulver leitend und benutzt sie als Kathode.

Ein zweites wichtiges Anwendungsgebiet ist die Herstellung sehr reiner Metalle. Man stellt zunächst eine chemisch möglichst reine Lösung eines Salzes des betreffenden Metalles her und schlägt aus ihr das Metall elektrolytisch nieder. Technisch wichtig ist neuerdings besonders das sog. Elektrolyteisen, d. h. elektrolytisch hergestelltes, sehr reines Eisen, welches sich durch besondere magnetische Eigenschaften vor gewöhnlichem, stets mehr oder weniger mit Kohle verunreinigtem Eisen auszeichnet. Wasserstoff wird technisch durch Elektrolyse von Wasser gewonnen. Auch geschieht die Gewinnung von Aluminium auf elektrolytischem Wege, und zwar aus der Salzschmelze bei hoher Temperatur.

273. **Widerstand elektrolytischer Leiter.** Auch für elektrolytische Leiter gilt das Ohmsche Gesetz. Es hängt dies, wie bereits erwähnt, damit zusammen, daß die Wanderungsgeschwindigkeit der Ionen der auf sie wirkenden elektrischen Kraft proportional ist und die Zahl der Ladungsträger nicht von der Stromstärke abhängt, solange die Konzentration konstant bleibt. Die Größe des Widerstandes hängt von der Beweglichkeit der Ionen, von ihrer Anzahl (Konzentration) und Ladung (Wertigkeit) ab, außerdem natürlich von den geometrischen Verhältnissen des vom Strome durchflossenen Flüssigkeitsvolumens und schließlich von der Temperatur. Und zwar haben die

Elektrolyte, im Gegensatz zu den Metallen, einen negativen Temperaturkoeffizienten (§ 255). Ihr Widerstand sinkt bei Erwärmung.

Beim Durchgang eines Stromes durch einen Elektrolyten tritt, wie im § 312 näher besprochen werden wird, eine Gegenspannung an den Elektroden auf, die sog. Polarisation des Elektroden. Man kann daher den Widerstand eines Elektrolyten nicht ohne weiteres mit Gleichstrom messen. Die Polarisationsspannung täuscht, indem sie der angelegten Spannung entgegenwirkt, einen höheren Widerstand vor, als tatsächlich vorhanden ist. Die Polarisation braucht aber zu ihrer Ausbildung eine gewisse Zeit. Deshalb benutzt man am besten zur Widerstandsmessung Wechselstrom, dessen Richtung so schnell wechselt, daß die Polarisationsspannung keine Zeit hat, sich in merklicher Größe auszubilden. Im übrigen verfährt man ebenso wie bei anderen Widerstandsmessungen und bedient sich meist der WHEATSTONEschen Brückenschaltung. An Stelle des Galvanometers in der Brücke benutzt man ein Telephon, welches den Wechselstrom durch einen summenden Ton anzeigt und zum Schweigen kommt, wenn die Widerstände gemäß § 252 abgeglichen sind. (Bei genauen Messungen muß man auch die in der Schaltung befindlichen Kapazitäten und Selbstinduktionen [§ 333] berücksichtigen und abgleichen.)

In einem bestimmten Gefäß ist der Widerstand eines Elektrolyten $R = \varrho K$, wenn ϱ den spezifischen Widerstand (§ 246) des Elektrolyten bedeutet. K ist eine durch die geometrischen Verhältnisse bedingte Apparatkonstante, die sog. Widerstandskapazität des Gefäßes, welche dem Formfaktor l/q in Gl. 8, § 246, entspricht. Es ist in der Regel am besten, ihre Größe mittels eines Elektrolyten von bekanntem spezifischen Widerstand empirisch zu bestimmen.

274. Metalle in Berührung mit Elektrolyten. Taucht man ein Metall in einen Elektrolyten, z. B. Zink in eine Lösung von Zinksulfat, so entsteht zwischen dem Metall und dem Elektrolyten eine Spannung, und zwar dadurch, daß Ladungsträger (Ionen) von dem einen Stoff zu dem andern übergehen. Bei der Darstellung dieser verwickelten Erscheinungen wollen wir uns an die von NERNST gegebene Theorie halten. Doch müssen wir uns dabei auf die wesentlichsten Züge beschränken, da diese Erscheinungen in das Gebiet der physikalischen Chemie gehören.

Ein Metall löst sich in einem Elektrolyten, ja sogar schon in reinem Wasser, meist ein wenig auf. Und zwar sind es nicht elektrisch neutrale Metallatome oder Moleküle, die in die Lösung gehen, sondern stets positiv geladene Metallionen. Der Vorgang hat eine gewisse äußere Ähnlichkeit mit der Verdampfung. Es ist so, als würden die Metallionen durch einen im Metall herrschenden Druck in die Lösung getrieben. NERNST spricht daher von einem Lösungsdruck der Metalle gegen den Elektrolyten. Befinden sich in der Lösung bereits die gleichen Ionen, so üben diese einen osmotischen Druck (§ 189) aus. Dieser wirkt dem Lösungsdruck entgegen. Ferner lädt sich das Metall infolge des Austritts von positiven Metallionen negativ auf, es übt also auf die austretenden positiven Ionen eine zurücktreibende Kraft aus. Demzufolge wird sich ein Gleichgewicht einstellen, das dadurch bedingt ist, daß der osmotische Druck im Elektrolyten, zusätzlich der von der Spannung zwischen Metall und Elektrolyt herrührenden elektrischen Kraft, dem Lösungsdruck der Ionen gerade gleich ist. Es kann aber auch vorkommen, daß der osmotische Druck im Elektrolyten größer ist als der Lösungsdruck der Metallionen. Dann kann Gleichgewicht nur herrschen, wenn die Spannung das umgekehrte Vorzeichen hat, als wir es oben annahmen, d. h. das Metall muß sich positiv aufladen, der Elektrolyt negativ. Das kann nur so geschehen, daß der osmotische Druck im Elektrolyten positive Ionen aus diesem an das Metall treibt, die dieses

positiv aufladen, bis jetzt der Lösungsdruck der Metallionen (die in diesem Falle nicht aus dem Metall heraustreten können), zuzüglich der nunmehr umgekehrt gerichteten elektrischen Kraft dem osmotischen Druck das Gleichgewicht hält.

Im ersten Fall, der z. B. bei Zink in Zinksulfatlösung eintritt, lädt sich also das Metall gegen den Elektrolyten negativ auf (Abb. 237a), Im zweiten Fall, z. B. bei Kupfer in Kupfersulfatlösung, tritt das Gegenteil ein, das Kupfer lädt sich positiv auf (Abb. 237b). Die hierbei auftretende elektromotorische Kraft hängt von der Art des Metalls und der Art und Konzentration des Elektrolyten ab. Taucht man zwei verschiedene Metalle (Elektroden) in den gleichen Elektrolyten, innerhalb dessen natürlich, wenn durch ihn kein Strom fließt, überall das gleiche Potential herrscht, weil er ein Leiter ist, so besteht zwischen den Elektroden demnach eine Spannung. Verbindet man sie jetzt durch einen Draht, so sucht sich diese Spannung auszugleichen, im Draht und durch den Elektrolyten fließt ein Strom. Solange aber Elektrolyt und Metall unverändert bleiben, sucht sich das Gleichgewicht an den beiden Elektroden immer wieder herzustellen, indem neue Metallionen in Lösung gehen bzw. neue Ionen an das Metall heranwandern. Die Spannung bleibt also erhalten, und es fließt ein Strom, der so lange andauert, bis die eine Elektrode völlig in Lösung gegangen ist.

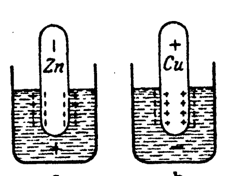


Abb. 237. Zur Theorie der Polarisation eines Metalls in einem Elektrolyten

Die hier beschriebenen Erscheinungen wurden von VOLTA (1792) im Anschluß an den bekannten Froschschenkelversuch von GALVANI (1786) entdeckt.

275. Elektrolytische Polarisation. Entsprechende Erscheinungen zeigen sich nicht nur bei zwei verschiedenen Metallen, sondern überhaupt immer dann, wenn die Elektroden in einem Elektrolyten chemisch verschieden sind. Leitet man einen Strom durch eine elektrolytische Zelle mit zwei zunächst völlig gleichen Elektroden, so führen die mit der Elektrolyse verbundenen Abscheidungsvorgänge, insbesondere aber die sekundären Prozesse an den Elektroden, meist sehr bald zum Auftreten chemischer Unterschiede zwischen den Elektroden, die eine dem fließenden Strom entgegenwirkende Spannung zwischen ihnen erzeugen. Diesen Vorgang bezeichnet man als elektrolytische Polarisation. Es genügt schon eine sich auf den Elektroden bildende Haut verschiedener Gase, wie Wasserstoff und Sauerstoff bei der Zersetzung des Wassers, um eine solche Wirkung hervorzubringen.

Dies läßt sich leicht nachweisen. Legt man an zwei Platinelektroden in einer mit verdünnter Schwefelsäure gefüllten Zelle Z die Spannung eines Akkumulators S, rund 2 Volt, so bemerkt man an einem eingeschalteten Strommesser, daß die Stärke des durch die Zelle hindurchgehenden Stromes von ihrem anfänglichen Werte schnell absinkt. Schaltet man, nachdem der Strom einige Zeit geflossen ist, die Elektroden der Zelle mit Hilfe eines Umschalters (Wippe, Abb. 238) auf einen Spannungsmesser V, so zeigt dieser eine Spannung an, die entgegengesetzt gerichtet ist wie die ursprünglich angelegte Spannung. Die Zelle ist polarisiert. Natürlich zerstört der nunmehr durch den Spannungsmesser fließende Strom die Polarisation nach einiger Zeit. Man kann die Polarisation sofort beseitigen, indem man die polarisierenden Gashäute mit einem Pinsel oder durch Schütteln von den Elektroden entfernt.

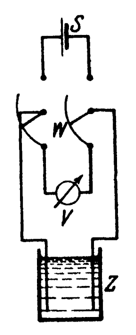


Abb. 238. Zum Nachweis der elektrolytischen Polarisation.

Entsprechende, oft sehr verwickelte Polarisationserscheinungen zeigen sich stets, wenn man nicht durch besondere Kunstgriffe bei der chemischen Zu-

sammensetzung der Elektroden und des Elektrolyten dafür Sorge trägt, daß die Ausbildung polarisierender Schichten vermieden wird.

Die Polarisation vermindert die Stromstärke im Elektrolyten und wirkt daher wie eine scheinbare Erhöhung des Widerstandes des Elektrolyten. Die Verwendung von Wechselstrom bei der Messung des Widerstandes von Elektrolyten wird nunmehr verständlich. Während der kurzen Zeit eines Stromstoßes des Wechselstroms kann sich eine merkliche Polarisation nicht ausbilden, und auch die geringfügige, tatsächlich eintretende Polarisation wird durch den folgenden, entgegengesetzt gerichteten Stromstoß sofort beseitigt.

276. Galvanische Elemente. Vorrichtungen, bei denen die in § 274 beschriebene Erscheinung zur Erzeugung von elektromotorischen Kräften und von elektrischen Strömen benutzt wird, heißen galvanische Elemente. Solche Elemente haben im 19. Jahrhundert eine sehr wichtige Rolle in der physikalischen Praxis und der Schwachstromtechnik gespielt. Ein einfaches Element wird z. B. durch eine Zink- und eine Kupferplatte gebildet, die in verdünnte Schwefelsäure tauchen. Elemente dieser primitiven Art haben den Nachteil, daß ihre elektromotorische Kraft bei Stromdurchgang sinkt, weil bei ihnen die gleiche, den Stromdurchgang hemmende Polarisationswirkung auftritt, die wir bereits bei der einfachen elektrolytischen Zelle kennengelernt haben. Um derartige Polarisationserscheinungen zu verhindern, ist eine sehr große Zahl von Kombinationen erfunden worden, die jedoch heute fast durchweg nur noch historisches Interesse haben. Die wichtigsten Methoden zur Verhinderung einer Polarisation der Elektroden bestehen darin, daß man die Kathode in eine Lösung ihres eigenen Salzes tauchen läßt, z. B. Zink in Zinksulfatlösung; dann wird an der Elektrode das gleiche Metall ausgeschieden, aus dem sie selbst besteht, und sie erleidet keine Veränderung. Oder es wird der abgeschiedene Wasserstoff durch ein in der Lösung befindliches oxydierendes Mittel beseitigt. Galvanische Elemente finden heute hauptsächlich noch Verwendung als sog. Trockenelemente. Diese sind tatsächlich nicht trocken, sondern der Elektrolyt ist in ihnen in irgendeinem Stoff, der den Raum zwischen den Elektroden ausfüllt (Sägespäne u. dgl.), als Tränkung enthalten, so daß die Elemente besser handlich sind. Im übrigen sind die Elemente fast völlig durch die Akkumulatoren und elektrischen Generatoren verdrängt.

Für die physikalische Meßtechnik wichtig sind die sog. Normalelemente. Es sind dies Elemente, deren Zusammensetzung so gewählt ist, daß sie eine sehr genau reproduzierbare elektromotorische Kraft haben, die außerdem nur wenig von der Temperatur abhängt. Die beiden gebräuchlichen Formen sind das WESTON-Element und das CLARK-Element. Beim WESTON-Element besteht die eine Elektrode aus Quecksilber, daran schließt sich eine Paste aus Merkurosulfat, Hg_2SO_4. Der Elektrolyt ist Kadmiumsulfatlösung und die andere Elektrode Kadmium oder Kadmiumamalgam. Im Elektrolyten befinden sich Kadmiumsulfatkristalle im Überschuß, so daß die Lösung stets konzentriert ist (Abb. 239). Das CLARK-Element unterscheidet sich von dem WESTON-Element hauptsächlich durch die Verwendung von Zink an Stelle von Kadmium. Die elektromotorische Kraft des WESTON-Elements beträgt bei 20° 1,01830 Volt, die des CLARK-Elements 1,4324 Volt.

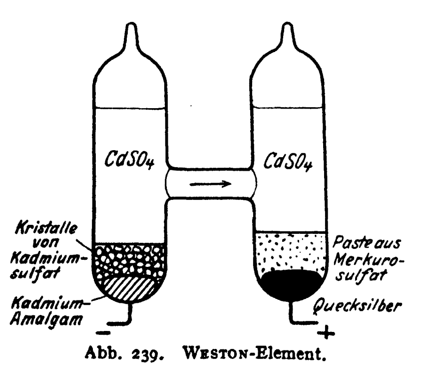


Abb. 239. WESTON-Element.

Normalelementen darf nur ein sehr schwacher Strom entnommen werden, wenn ihre Klemmenspannung konstant bleiben soll (§ 258). Sie werden daher in der Meßtechnik nur so verwendet, daß sie eine Spannung kompensieren, ohne selbst Strom zu liefern. Das Schema einer einfachen Schaltung dieser Art zeigt Abb. 240 (POGGENDORFF).

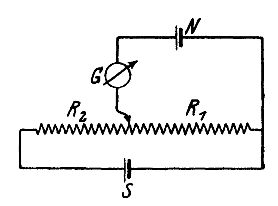


Abb. 240. Schema einer Kompensationsschaltung.

Das Normalelement N habe die elektromotorische Kraft E_n. Gemessen werden soll die elektromotorische Kraft E der Stromquelle S. G ist ein empfindlicher Strommesser (Galvanometer). S und N müssen mit gleichnamigen Klemmen am rechten Ende des Widerstandes R_1 liegen. Die Widerstände R_1 und R_2 werden so abgeglichen, daß das Galvanometer keinen Ausschlag zeigt. Dann ist die das Normalelement enthaltende Abzweigung stromlos. Wir wenden auf die beiden, in der Schaltung enthaltenen geschlossenen Leiterkreise den 2. KIRCHHOFFschen Satz (§ 249) an. Durch die Widerstände R_1 und R_2 fließt ein gleich starker Strom i, da ja die Abzweigung zum Galvanometer stromlos ist. Dann ergibt sich für den die Stromquelle S enthaltenden Kreis $E = i\,(R_1 + R_2)$. In dem das Normalelement N enthaltenden Kreis führt nur der Widerstand R_1 Strom. Demnach ist $E_n = i\,R_1$. Es folgt $E = E_n\,(R_1 + R_2)/R_1$. Dabei ist vorausgesetzt, daß der innere Widerstand von S sehr klein gegen R_2 ist, daß also nur ein sehr schwacher Strom fließt. Andernfalls erhält man durch eine solche Messung nicht die elektromotorische Kraft der Stromquelle, sondern die Klemmenspannung der belasteten Stromquelle (§ 258). Für genaue Messungen der beschriebenen Art dienen die Kompensationsapparate. Mit ihnen kann man auch Spannungen messen, die niedriger sind als diejenige des Normalelements, während die obige Schaltung auf höhere Spannungen beschränkt ist.

277. Akkumulatoren. Bisher ist uns die elektrolytische Polarisation lediglich als eine störende Erscheinung begegnet. Eine höchst wichtige Anwendung findet sie aber bei den Akkumulatoren oder Sammlern. Es sind diese nichts anderes als Elemente. Während aber die gewöhnlichen Elemente den Nachteil haben, daß sie infolge der Stromentnahme, d. h. durch Veränderung oder Zerstörung ihrer Elektroden, schließlich unbrauchbar werden, kann man bei den Akkumulatoren auf einfache Weise den ursprünglichen Zustand nach längerer Stromentnahme wieder herstellen, also den in ihnen abgelaufenen chemischen Vorgang umkehren. Das Wesen eines Akkumulators zeigt der folgende einfache Versuch: In verdünnter Schwefelsäurelösung H_2SO_4 befinden sich zwei Bleielektroden, die sich in der Lösung sofort mit einer Schicht von Bleisulfat, $PbSO_4$, überziehen. Legt man an eine solche elektrolytische Zelle eine Spannung, etwa 6 Volt, so findet eine Polarisation der Elektroden statt. Aus der Lösung wandern die negativen SO_4-Ionen an die Anode, die positiven H-Ionen an die Kathode. Dort treten nunmehr folgende Reaktionen ein:

$$\text{Ladung:}\quad \begin{aligned} \text{Anode:}\;& PbSO_4 + SO_4 + 2\,H_2O = PbO_2 + 2\,H_2SO_4 \\ \text{Kathode:}\;& PbSO_4 + 2\,H = Pb + H_2SO_4. \end{aligned}$$

Es bildet sich also an der Anode Bleidioxyd (PbO_2), an der Kathode metallisches Blei. Gleichzeitig verschwindet aus der Lösung Wasser und es bildet sich Schwefelsäure. Der Elektrolyt wird konzentrierter. Unterbricht man nach einiger Zeit den Strom, so zeigen die jetzt chemisch verschieden gewordenen Elektroden eine elektromotorische Kraft von etwas über 2 Volt. Die Zelle ist „geladen“. Man kann sie nunmehr genau wie ein Element zur Stromentnahme benutzen. Bei der Entladung, bei der der Strom in entgegengesetzter Richtung fließt wie bei der Ladung, wandern aus der Lösung die negativen SO_4-Ionen an die Bleielek-

trode (die Kathode), die positiven H-Ionen an die PbO_2-Elektrode (die Anode). Dabei spielen sich folgende chemischen Reaktionen ab:

Entladung: Anode: $PbO_2 + 2\,H + H_2SO_4 = PbSO_4 + 2\,H_2O$
Kathode: $Pb + SO_4 = PbSO_4$.

Die Elektroden nehmen also ihren ursprünglichen Zustand wieder an. Die bei der Ladung gebildete Schwefelsäure verschwindet wieder, das verschwundene Wasser wird wieder neu gebildet. Die bei der Ladung aufgetretenen Veränderungen werden also, wenn man den Entladestrom hinreichend lange fließen läßt, bei der Entladung wieder rückgängig gemacht und umgekehrt.

Die bei dem geschilderten Vorgang benutzte Einrichtung ist nichts anderes als ein primitiver Bleiakkumulator. Für praktische Zwecke wird er in mannigfacher Weise verändert. Die Elektrizitätsmenge (das Produkt it, meist in Amperestunden angegeben und als Ladungskapazität bezeichnet), die er zu liefern vermag, ist offenbar um so größer, je größer die Menge der bei der Ladung chemisch veränderten Substanz ist. Man benutzt daher gitterförmige Bleielektroden, in die bei der Herstellung Blei bzw. Bleidioxyd in poröser Form hineingepreßt wird. Das hat den Vorteil, daß die chemischen Reaktionen nicht nur an der äußeren Oberfläche, sondern auch im Innern der Elektroden, an der Oberfläche der zahlreichen Poren, vor sich gehen.

Läßt man bei der Ladung den Strom noch länger fließen, als zur Beendigung der chemischen Reaktionen nötig ist, so findet an der Kathode Wasserstoffabscheidung statt. Diese kündigt also die Beendigung der Ladung an.

Die Mindestspannung, die zum Aufladen eines Akkumulators erforderlich ist, beträgt 2,6 Volt. Er hat nach der Ladung einer elektromotorischen Kraft von etwa 2,05 Volt. Der Stromwirkungsgrad, d. h. das Verhältnis der bei Entladung und Ladung durch den Akkumulator gehenden Elektrizitätsmengen, beträgt etwa 95 %. Hingegen liefert er von der bei der Ladung in ihn hineingesteckten Energie bei Entladung nur höchstens 85 %. Der Energieverlust beruht in erster Linie darauf, daß der Akkumulator einen inneren Widerstand besitzt (§ 258) und daß daher sowohl bei Ladung wie bei Entladung ein Teil der Energie in Stromwärme im Innern des Akkumulators verwandelt wird.

Ein großer Nachteil des Bleiakkumulators ist sein hohes Gewicht. Es gibt eine Reihe anderer Konstruktionen mit leichteren Metallen. In erster Linie ist noch der Edison-Akkumulator zu nennen. Seine Elektroden bestehen in ungeladenem Zustande aus $Fe(OH)_2$ und $Ni(OH)_2$. Bei der Ladung verwandeln sie sich in Fe und Ni_2O_3. Als Elektrolyt dient Kalilauge. Die Spannung beträgt etwa 1,25 Volt.

Akkumulatoren können natürlich nur mit Gleichstrom, nicht mit Wechselstrom, geladen werden. Wo nur Wechselstrom vorhanden ist, muß dieser daher „gleichgerichtet" werden. Die Gleichrichtung besteht darin, daß man in den Stromkreis einen Gleichrichter einschaltet, d. h. eine Vorrichtung, welche Strom nur in einer Richtung durchläßt, in der andern nicht. Es gibt zahlreiche verschiedene Methoden, welche zu diesem Zwecke angewendet werden können (elektrolytische Gleichrichter, für eine Stromrichtung polarisierbar, für die andere nicht, Pendelgleichrichter, Edelgasgleichrichter, Gleichrichter mit Glühelektrode, Quecksilbergleichrichter usw.).

278. Elektrische und chemische Energie. Das Auftreten elektrischer Energie an Elementen oder Akkumulatoren wird, wie wir gesehen haben, durch chemische Prozesse verursacht, welche die Elektroden verändern. Nach dem Energieprinzip (§ 42) kann die auftretende elektrische Energie nicht aus nichts entstanden sein. Ihre Quelle haben wir in den sich abspielenden chemischen

Prozessen zu suchen. Tatsächlich sind dies auch stets exotherme Prozesse (§ 203), d. h. solche, bei denen ein Überschuß an Energie auftritt (z. B. Erhitzung beim Auflösen von Zink in Schwefelsäure). Man könnte zunächst vermuten, daß diese chemische Energie bei den Elementen und Akkumulatoren ganz in elektrische Energie übergeht. Das ist auch unter Umständen der Fall. In den meisten Fällen geht aber ein Teil der chemischen Energie in Wärme über, das Element erhitzt sich bei Stromentnahme. In anderen Fällen kommt es aber auch vor, daß die erzeugte elektrische Energie größer ist als die chemische Energie. In solchen Fällen kühlt sich das Element bei Stromentnahme gegen seine Umgebung ab. Es wird dann also ein Teil der elektrischen Energie von der Wärme geliefert, die aus der Umgebung dauernd in das abgekühlte Element strömt.

Einen der seltenen Fälle, bei denen sich die Spannung eines Elements unmittelbar aus der aufgewandten chemischen Energie richtig berechnen läßt, bildet das DANIELL-Element, dessen Anode aus Kupfer in Kupfersulfatlösung und dessen Kathode aus Zink in Zinksulfatlösung besteht. Die Lösungen sind durch einen porösen Tonzylinder, durch den der Strom hindurchtreten kann, voneinander getrennt. Bei Stromentnahme geht Zink in Lösung, und an der Anode wird Kupfer ausgeschieden. Die Wärmetönung bei der Lösung von 1 Mol Zn beträgt $4{,}40 \cdot 10^5$ Wattsekunden. Bei der Abscheidung von 1 Mol Kupfer ist Arbeit aufzuwenden, und zwar $2{,}34 \cdot 10^5$ Wattsekunden. Es bleiben also $2{,}06 \cdot 10^5$ Wattsekunden im Überschuß verfügbar. Die elektromotorische Kraft des Elements sei E. Die Kupfer- und Zinkionen sind zweiwertig, tragen also je zwei Elementarquanten ε. Je ein Mol trägt demnach die Ladung $2N\varepsilon = 2 \cdot 96494$ Coulomb (§ 269). Bei der Überführung dieser Ladung von einer Elektrode zur andern, also über die Spannung $U = E$, wird die Arbeit $2N\varepsilon E = 1{,}93 \cdot 10^5 E$ geleistet. Setzen wir diese Arbeit der verfügbaren chemischen Energie gleich, so folgt $E = 1{,}07$ Volt, was sehr nahezu mit dem wirklichen Wert der elektromotorischen Kraft übereinstimmt.

279. Lokalströme. Sehr reine Metalle, z. B. reines Zink und Eisen, reagieren bekanntlich nur sehr schwer mit Säuren, während chemisch unreine Metalle weit leichter reagieren. Hierbei ist die Elektrolyse im Spiel. Befinden sich nämlich in dem betreffenden Metall kleine Teilchen eines andern Metalls oder auch Rostteilchen u. dgl., so besteht zwischen den verschiedenen Bestandteilen eine elektromotorische Kraft, sie bilden miteinander und mit der Säure winzig kleine, kurzgeschlossene Elemente. Ist z. B. in Zink etwas Kupfer enthalten, so fließen in verdünnter Schwefelsäure zwischen dem Zink und dem Kupfer Ströme, sog. Lokalströme, welche fortgesetzt SO_4-Ionen an das Zink schaffen, so daß die Reaktion $Zn + SO_4 = ZnSO_4$ sehr lebhaft erfolgen kann, während ohne derartige Lokalströme die Zufuhr von SO_4-Ionen an das Zink lediglich auf dem weit langsameren Wege der Diffusion erfolgen würde.

Ähnliche Erscheinungen treten auch sonst auf, wenn sich verschiedene einander berührende Metalle in Säure- oder Salzlösungen befinden. Man muß daher an Schiffen, insbesondere im Meerwasser, das Vorhandensein verschiedener blanker Metalle an der Außenseite des Schiffskörpers vermeiden, da Lokalströme sonst leicht zur schnellen Zerstörung desjenigen dieser Metalle führen können, welches sich gegen die andern negativ auflädt.

280. Elektrokinetische Erscheinungen. Bringt man in eine Flüssigkeit einen dielektrischen Körper, so lädt sich dessen Oberfläche gegenüber der Flüssigkeit auf. Z. B. erhält eine Paraffinkugel in Wasser eine negative Ladung, und die sie umgebenden Wassermoleküle laden sich positiv. Nimmt man die Paraffinkugel aus dem Wasser heraus, so kann man ihre Ladung mit einem Elektroskop nachweisen. Diese Erscheinung beruht auf der innigen Berührung zwischen

der Oberfläche des Dielektrikums und dem Wasser und hat die gleiche Ursache wie die sog. Reibungselektrizität (§ 262). Befindet sich ein auf diese Weise aufgeladener Körper zwischen zwei Elektroden entgegengesetzten Vorzeichens, so wird er durch das zwischen ihnen bestehende elektrische Feld nach der einen Elektrode getrieben, wie die Ionen in einem Elektrolyten. Man nennt diesen Vorgang Elektrophorese. Sie tritt z. B. häufig bei kolloidalen Teilchen auf, die in einer Flüssigkeit suspendiert sind (§ 187). Die geladenen Flüssigkeitsteilchen, die sich an der Oberfläche der Teilchen befinden, werden dabei in Richtung auf die entgegengesetzte Elektrode getrieben wie die Teilchen. Die Aufladung kann auch an geeigneten porösen Stoffen stattfinden, die einen mit Flüssigkeit gefüllten Raum in zwei Teile scheiden. In diesem Falle findet nur eine Bewegung der Flüssigkeit statt, die dann bei Stromdurchgang auf der einen Seite der porösen Scheidewand höher steht als auf der andern (Elektrosmose). Läßt man Glaskugeln od. dgl. in einem mit Wasser gefüllten Gefäß herabfallen, das oben und unten je eine Elektrode trägt, die miteinander über ein Galvanometer verbunden sind, so zeigt dieses während des Falles der Kugeln einen Strom an (Abb. 241). Denn die fallenden Kugeln sind wegen ihrer Aufladung im Wasser Ladungsträger und stellen wegen ihrer Bewegung einen elektrischen Strom dar, der sich außen durch das Galvanometer hindurch schließt. Derartige Ströme heißen Strömungsströme, der ganze Erscheinungsbereich Elektrokinetik.

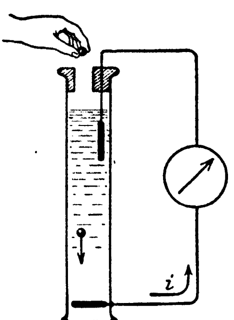


Abb. 241. Zur Demonstration eines Strömungsstromes. (Aus POHL, Elektrizitätslehre.)

24. Kapitel.

Elektrische Ströme in Gasen.

281. Das Wesen der Elektrizitätsleitung durch Gase. Damit ein Körper fähig ist, Elektrizität zu leiten, also einem elektrischen Strom den Durchgang zu gestatten, müssen sich in ihm, wie wir schon bei den festen und flüssigen Stoffen gesehen haben, frei bewegliche Ladungsträger befinden. Das ist bei den Gasen in ihrem natürlichen Zustande nicht der Fall, denn ein Gas besteht aus elektrisch neutralen Molekülen. So ist auch die atmosphärische Luft ein vorzüglicher Isolator.

Damit ein Gas Leitfähigkeit erhält, müssen also auf irgendeine Weise Elektrizitätsträger in ihm erzeugt oder von außen in ihn hineingebracht werden. Die Erzeugung von Ladungsträgern in einem Gase bezeichnet man als Ionisation, die erzeugten molekularen oder atomistischen Ladungsträger, sofern es keine freien Elektronen sind, wie bei der Elektrolyse als Ionen. Selbst ein von Gasen so weit wie möglich frei gemachter Raum, ein Hochvakuum, kann leitend gemacht werden, wenn man für das Vorhandensein von Ionen oder Elektronen in ihm sorgt. Legt man an zwei in einen ionisierten Gasraum ragende Metallstücke (Elektroden) eine Spannung, so daß zwischen ihnen im Gase ein elektrisches Feld besteht, so wandern die positiven Ionen zur negativen Elektrode, der Kathode, die negativen Ionen und die Elektronen zur positiven Elektrode, der Anode, d. h. es fließt durch das Gas ein elektrischer Strom. Einen solchen Strom nennt man auch eine Gasentladung.

282. Die Grundtypen der Elektrizitätsleitung durch Gase. Bei der Elektrizitätsleitung durch Gase unterscheidet man die unselbständige und die

selbständige Entladung. Bei der **unselbständigen Entladung** befinden sich aus irgendeinem vom Stromdurchgang selbst unabhängigen Grunde Ladungsträger im Gase, und diese werden durch ein im Gase herrschendes elektrisches Feld an die Anode bzw. Kathode befördert, bilden also einen elektrischen Strom. Dabei kann die Ursache der Ionisation des Gases eine sehr verschiedene sein (§ 283). Bei der **selbständigen Entladung** dagegen werden die den Stromdurchgang vermittelnden Ladungsträger in ihrer überwiegenden Mehrzahl durch den Mechanismus der Entladung selbst erzeugt, und zwar durch den Vorgang der **Stoßionisation**. Dieser besteht darin, daß die vorhandenen Ladungsträger durch das elektrische Feld so stark beschleunigt werden, daß sie imstande sind, Moleküle des Gases bei Zusammenstößen mit ihnen in positive und negative Ionen (bzw. Elektronen) zu zerspalten. Die auf diese Weise erzeugten neuen Ladungsträger können durch das Feld so beschleunigt werden, daß auch sie wieder Ladungsträger erzeugen usw. Damit eine selbständige Entladung überhaupt einsetzen kann, müssen natürlich schon von Anfang an einige Ladungsträger im Gase vorhanden sein. Das ist stets der Fall und läßt sich überhaupt nie ganz vermeiden, schon deshalb nicht, weil sich überall stets Spuren von radioaktiven Stoffen (§ 519) befinden, welche ionisierend wirken.

Da für das Einsetzen einer selbständigen Entladung eine gewisse Mindestgeschwindigkeit der Ladungsträger erforderlich ist, so kann sie unterhalb einer gewissen, von den Umständen abhängigen Spannung nicht einsetzen. Sie ist also hauptsächlich an höhere Spannungen gebunden. Außerdem setzt sie bei niedrigerem Gasdruck bereits bei niedrigerer Spannung ein als bei höherem Druck. Denn je größer die freie Weglänge (§ 99) der Ladungsträger ist, um so leichter erlangen sie bei gegebener Feldstärke zwischen zwei Zusammenstößen mit Gasmolekülen die zur Stoßionisation erforderliche Geschwindigkeit.

Steigert man bei einer unselbständigen Entladung die Spannung, so schlägt die Entladung in eine selbständige um, sobald die Spannung ausreicht, um die vorhandenen Ladungsträger zur Stoßionisation zu befähigen (Abb. 244, § 286).

283. Unselbständige Entladung. Die für eine unselbständige Entladung erforderliche Ionisation kann in einem Gase auf verschiedene Arten entstehen. Man hat hier zwei Typen zu unterscheiden. Bei der **Volumionisation** werden die Ladungsträger im Gase durch ein von außen auf seine Moleküle wirkendes Mittel aus diesen selbst erzeugt, bei der **Oberflächenionisation** werden sie von außen her, im allgemeinen aus der Oberfläche der einen Elektrode, in das Gas hineingebracht.

Eine Volumionisation besteht also darin, daß die Ladungsträger durch Zerspaltung der Gasmoleküle in positive und negative Ionen (bzw. Elektronen) erzeugt werden. Das kann z. B. durch Bestrahlung des Gases mit Röntgenstrahlen oder durch die Strahlen radioaktiver Stoffe geschehen, ferner durch eine ausreichend hohe Temperatur des Gases (§ 285). Da die Ladungsträger durch Spaltung der elektrisch neutralen Moleküle entstehen, so ist die Summe der so erzeugten positiven Ladungen stets ebenso groß wie diejenige der negativen, und der Strom durch ein so ionisiertes Gas besteht immer aus einer gleichzeitigen Bewegung positiver Ladungsträger zur Kathode und negativer Ladungsträger zur Anode.

Eine Oberflächenionisation kann vor allem durch Bestrahlen der Kathode mit kurzwelligem Licht (lichtelektrischer Effekt, § 489) oder durch Glühen der Kathode (§ 284) erzeugt werden. In diesem Falle besteht der Strom durch das Gas nur aus Ladungsträgern eines Vorzeichens.

Besteht in einem Gase, an dem keine Spannung liegt, eine Volumionisation, so stellt sich ein Gleichgewicht ein zwischen der durch äußere Einwirkung er-

zeugten Ionisation und der Wiedervereinigung oder Rekombination der Ladungsträger, so daß in der Zeiteinheit ebenso viele Ladungsträger neu erzeugt werden, wie durch Zusammentritt je eines positiven und eines negativen Ladungsträgers zu einem neutralen Molekül wieder verschwinden. Auch bei niedriger angelegter Spannung spielt die Wiedervereinigung noch eine wesentliche Rolle. Die Geschwindigkeit der Ladungsträger ist so klein, daß ein großer Teil von ihnen auf dem Wege zur Elektrode durch Wiedervereinigung verloren geht, also nicht zur Elektrode gelangt und deshalb zum Stromtransport nichts beiträgt. Je höher die Spannung ist, um so kleiner wird die Zahl der auf diese Weise verschwindenden Ladungsträger. Daher steigt die Stromstärke in einem ionisierten Gase mit wachsender Spannung zunächst an (Abb. 242). Bei einer gewissen Spannung aber hört die Wiedervereinigung praktisch auf, d. h. sämtliche erzeugten Ladungsträger erreichen tatsächlich die Elektroden. Damit ist ein Grenzwert der Stromstärke erreicht, die sog. Sättigung, und über diesen Wert kann die Stromstärke ohne das Hinzukommen einer neuen ionisierenden Ursache nicht ansteigen. Das ist erst dann der Fall, wenn die Spannung so weit gesteigert wird, daß Stoßionisation eintritt.

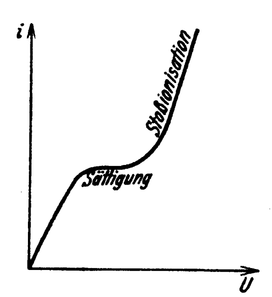


Abb. 242. Abhängigkeit der Stromstärke in einem Gase von der Spannung.

Ein ähnliches Verhalten zeigt sich auch bei Oberflächenionisation. Natürlich gibt es hier keine Wiedervereinigung, weil ja nur Ladungsträger eines Vorzeichens vorhanden sind. In diesem Fall bewirkt die thermische Bewegung der Ladungsträger, ihre Rückdiffusion an die Elektrode, ein Verschwinden von Ladungsträgern. Je höher die angelegte Spannung ist, um so geringer ist die Anzahl dieser verschwindenden Ladungsträger, um so größer also die Stromstärke. Sättigung tritt ein, wenn alle an der einen Elektrode erzeugten Ladungsträger die andere Elektrode erreichen. Auch hier kann schließlich Stoßionisation eintreten. Einen Einfluß auf die Stromstärke haben bei kleiner Spannung auch die Raumladungen, die im Gase auftreten, da es sich ja nur um Ladungsträger eines Vorzeichens handelt.

Abb. 243 zeigt eine einfache Apparatur zur Untersuchung von Strömen durch Gase. Das Gas befindet sich in dem Metallkasten K, der mit der Erde leitend verbunden ist und gleichzeitig als elektrischer Schutzkäfig dient. Im Gasraum befinden sich zwei isoliert eingeführte Elektroden P und P', an die eine Spannung gelegt werden kann. Mit einem eingeschalteten Strommesser G (Galvanometer) kann man die Abhängigkeit des Stromes von der Spannung untersuchen, wenn das Gas durch irgendein Mittel ionisiert wird.

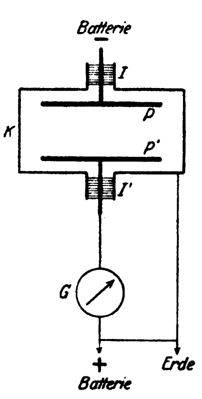


Abb. 243. Apparat zur Untersuchung der Entladung durch ein Gas.

Es kann vorkommen, daß Stoßionisation bereits eintritt, ehe Sättigung eingetreten ist. Dann fehlt das horizontale Kurvenstück in Abb. 242.

284. Glühelektronen. Thermionen. Nähert man einem geladenen Elektroskop ein glühendes Metallstück, so verliert es seine Ladung ziemlich schnell, ein Beweis dafür, daß durch die Anwesenheit des glühenden Metalls die umgebende Luft leitend geworden, d. h. Ladungsträger in der Luft aufgetreten sind. Die Wirkung ist um so stärker, je stärker das Metall glüht. Die hierbei auftretenden Ladungsträger werden nicht in der Luft erzeugt, sondern stammen aus dem glühenden Metall, und zwar treten aus ihm sowohl positive Ionen wie Elektronen aus. Bei höheren Temperaturen überwiegt der Elektronenaustritt den Austritt

positiver Ionen außerordentlich. So kommt es, daß stark glühende Metalle als Anode den Durchgang eines Stromes durch einen Gasraum nur in sehr geringem Maße ermöglichen, weil die Zahl der positiven Ionen sehr klein ist, die austretenden Elektronen aber durch das elektrische Feld wieder an die Anode zurückgetrieben werden, also nicht durch das Gas wandern, während sie, wenn das glühende Metall Kathode ist, von dieser abgestoßen werden und zur Anode wandern. Es liegt hier also der Fall vor, daß ein Strom in der einen Richtung weit besser geleitet wird als in der andern, in der ein Stromdurchgang praktisch kaum auftritt (sog. unipolare Leitung). Eine besonders starke Elektronenemission zeigen gewisse glühende Oxyde (WEHNELT-Kathode, vgl. auch § 290).

Für die Stärke des Elektronenstromes i, den eine glühende Oberfläche bei der absoluten Temperatur T aussendet, hat Richardson das Gesetz

$$i = A\,T^2 e^{-\frac{b}{T}}$$

abgeleitet, wobei A und b Konstanten sind, denen eine bestimmte physikalische Bedeutung zukommt. Das Gesetz ist bei reinen Metallen sehr gut bestätigt worden.

Auf die hier geschilderte Weise kann auch ein Vakuum leitend gemacht werden, denn für die Wanderung der Elektronen von der Kathode zur Anode ist das dazwischenliegende Gas nur ein Hindernis, aber in keiner Weise für den Stromdurchgang erforderlich.

Man bezeichnet die aus glühenden Körpern austretenden Ladungsträger als Glühelektronen bzw. Thermionen.

285. Temperaturionisation. Eine besondere Art der Volumionisation ist diejenige durch sehr hohe Temperaturen. Bei solchen wird die Wärmebewegung der Gasmoleküle so heftig, daß sie sich bei ihren Zusammenstößen zum Teil gegenseitig in Ionen zerspalten. Bei der Temperatur der Fixsternoberflächen sind solche Wirkungen sehr stark vorhanden. Man kann dies auf Grund der Tatsache erkennen, daß in den Fixsternspektren vielfach die sog. Funkenspektren von Elementen auftreten, z. B. das des Kalziums auf der Sonne. Die Funkenspektren haben aber, wie Laboratoriumsversuche zeigen, ihren Ursprung nicht in elektrisch neutralen, sondern in ionisierten Atomen (§ 503).

Die Ionisation der Sonnenatmosphäre ergibt sich ferner aus der Tatsache, daß von den Sonnenflecken starke magnetische Felder ausgehen, welche dadurch entstehen, daß sich dort ionisierte Gase in Wirbeln bewegen. Sie bilden also Kreisströme, welche Träger magnetischer Felder sind (§ 462).

Auch in Flammen sind die Gase zum Teil ionisiert. Infolgedessen leiten Flammen die Elektrizität. Die Berührung eines Drahtes, welcher mit dem Träger des Blättchens eines geladenen Elektroskops verbunden ist, mit einer zur Erde abgeleiteten Leuchtgasflamme entlädt das Elektroskop sofort. Das beste Mittel zur sofortigen Entladung von geriebenen oder sonstwie elektrisierten Glasstangen oder andern Isolatoren besteht darin, daß man sie einige Male durch eine Leuchtgasflamme zieht.

286. Widerstand und Charakteristik einer leitenden Gasstrecke. Auch bei einer leitenden Gasstrecke gehört zu jeder angelegten Spannung U eine bestimmte Stromstärke i, und man kann, wie bei festen und flüssigen Leitern, den Quotienten $R = U/i$ als den Widerstand der Gasstrecke definieren. Während aber bei den festen und flüssigen Leitern diese Größe bei konstant gehaltener Temperatur konstant und von Stromstärke und Spannung unabhängig ist, ist dies bei den Gasen keineswegs der Fall. Abb. 244 zeigt noch einmal eine der Abb. 242 entsprechende Kurve, die Charakteristik eines leitenden Gases (§ 257), und es ist gleichzeitig der Verlauf von $R = U/i$ als Funktion der an-

gelegten Spannung dargestellt. Im ersten, linear ansteigenden Teil ist R konstant, steigt im Bereich der Sättigung an und fällt im Bereich der Stoßionisation wieder ab. Demnach gilt das OHMsche Gesetz für ein ionisiertes Gas nur bei kleiner angelegter Spannung, aber aus einem anderen Grunde als bei den festen und flüssigen Leitern. Bei den letzteren ist die Zahl der in der Volumeinheit für die Stromleitung verfügbaren Ladungsträger konstant. Das Anwachsen der Stromstärke mit steigender Spannung beruht darauf, daß die Geschwindigkeit der Ladungsträger der Spannung proportional ist (§ 245). Bei einem ionisierten Gase hingegen wird in jeder Sekunde in der Volumeinheit die gleiche Zahl von Ladungsträgern neu erzeugt, bzw. es wird bei Oberflächenionisation in jeder Sekunde die gleiche Zahl neu in das Gas gebracht, und die Stromstärke müßte im stationären Zustande, unabhängig von der angelegten Spannung, gleich der in 1 Sekunde neu erzeugten Ionenladungsmenge sein — da ja die erzeugte Ladung wieder aus dem Gase entfernt werden muß —, wenn letzteres nicht auch durch die Vorgänge der Wiedervereinigung, der Rückdiffusion an die Elektroden usw. mit besorgt würde. Bei kleiner Spannung überwiegt die Wirkung dieser Vorgänge. Je schneller aber bei wachsender Spannung die Ladungsträger an die Elektroden geschafft werden, um so mehr von ihnen entgehen der Wiedervereinigung und der Rückdiffusion, um so mehr Ladungsträger sind für den Stromtransport verfügbar. In einem ionisierten Gase steigt also die Stromstärke zunächst deshalb der Spannung proportional an, weil die Zahl der für den Strom verfügbaren Ladungsträger der Spannung proportional ist.

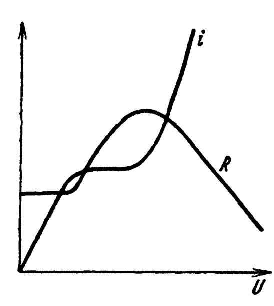


Abb. 244. Charakteristik und Widerstand einer leitenden Gasstrecke.

Ist jedoch Sättigung erreicht, so kann diese Zahl nicht weiter wachsen, eine Steigerung der Spannung kann die Stromstärke nicht mehr anwachsen lassen. Erst wenn bei Eintritt der Stoßionisation weitere Ladungsträger gebildet werden, ist dies möglich.

Die Gase unterscheiden sich von den festen und flüssigen Leitern auch dadurch, daß gleich lange Teile einer homogenen Gasstrecke, die überall gleichen Querschnitt hat, keineswegs immer den gleichen Widerstand haben, wenn man diesen als den Quotienten U/i aus der überall gleichen Stromstärke und den Teilspannungen U berechnet. Das liegt daran, daß in ionisierten Gasen im Gegensatz zu den festen und flüssigen Leitern, im allgemeinen Raumladungen auftreten, d. h. daß die Summe der positiven und der negativen Ladungen in der Volumeinheit nicht gleich groß sind, und daß infolge dieser Raumladungen die Feldstärke im Gase nicht überall die gleiche ist. Denn in jeder positiven bzw. negativen Raumladung beginnen bzw. endigen elektrische Kraftlinien. Aus der Gl. 14 (§ 223) läßt sich leicht die sog. POISSONsche Gleichung

$$\frac{d\mathfrak{E}}{dx} = -4\pi\varrho$$

ableiten, wobei ϱ die Dichte der Raumladung ist und die Richtung des Feldes $\mathfrak{E}$ in der x-Richtung liegt. Eine solche Raumladung ist natürlich ohne weiteres vorhanden, wenn z. B. eine reine Oberflächenionisation mit Glühelektronen vorliegt, also nur negative Ladungsträger vorhanden sind. Bei reiner Volumionisation entsteht sie dadurch, daß die im ganzen Volumen erzeugten positiven bzw. negativen Ladungsträger zur Kathode bzw. Anode wandern und infolgedessen in dem einen Teil der Entladung die positiven, im andern Teil die negativen Ladungen überwiegen.

Besonders kompliziert werden die Verhältnisse, wenn es sich um verdünnte Gase handelt, in denen die Ionen große freie Weglängen haben und zwischen zwei Zusammenstößen mit Gasmolekülen erhebliche Beschleunigungen durch die angelegte Spannung erfahren. Sie werden weiter kompliziert durch die beim Einsetzen der Stoßionisation erzeugten weiteren Ionen. Bei genügend hoher Feldstärke können auch diese Ionen wieder eine ausreichende Geschwindigkeit erlangen, die sie zur Stoßionisation befähigt usw. Auf diese Weise kann unter Umständen die Zahl der für den Strom verfügbaren Ionen lawinenartig anwachsen. Das Gas bekommt eine fallende Charakteristik (§ 257), und es tritt, wenn dies nicht durch ausreichenden Vorschaltwiderstand verhindert wird, Kurzschluß durch das Gas ein.

287. Selbständige Entladung. Allgemeines. Die allgemeinen Bedingungen für das Einsetzen einer selbständigen Entladung haben wir bereits in § 282 besprochen, insbesondere den Einfluß von Spannung und Gasdruck. Es ist auch bereits gesagt worden, daß eine selbständige Entladung nur einsetzen kann, wenn bereits eine, wenn auch sehr schwache, Ionisation des Gases besteht. Die Entladung beginnt stets mit einer schwachen unselbständigen Entladung, dem sog. TOWNSEND-Strom, und schlägt in eine selbständige Entladung um, nachdem durch Stoßionisation eine genügende Zahl von Ionen geschaffen wurde.

Je nach der Spannung und dem Gasdruck sowie je nach der Art des Gases und der Elektroden und der Gestalt des Entladungsraumes gibt es sehr mannigfache Erscheinungsformen der selbständigen Entladung. Bei Veränderung der Bedingungen gehen diese verschiedenen Entladungsformen im allgemeinen stetig ineinander über, so daß eine scharfe Grenzziehung nicht möglich ist. Man unterscheidet aber folgende Haupttypen: bei höherem Druck die stille oder Spitzenentladung, die Funkenentladung und den Lichtbogen, bei niedrigem Druck die Glimmentladung.

288. Die stille Entladung oder Spitzenentladung. Es ist schon im § 226 darauf hingewiesen worden, daß bei höheren Spannungen eine Entladung aus Spitzen und scharfen Kanten durch die Luft stattfindet. In der Umgebung solcher Stellen ist nämlich die Feldstärke sehr groß und dies führt zu einer Entladung durch das umgebende Gas, die sich bei ausreichend starkem Spitzenstrom als ein Lichtbüschel von in Luft rötlich-violetter Färbung bemerkbar macht. Das Aussehen des Büschels ist bei positiver und negativer Spitze ein wenig verschieden.

Derartige Spitzenentladungen kann man z. B. nachweisen, wenn man den Träger des Blättchens eines Elektroskops mit einer feinen Spitze, etwa einer guten Nähnadel, versieht. Das Elektroskop verliert, wenn seine Spannung mehr als etwa 1000 Volt beträgt, ziemlich schnell seine Ladung, besonders wenn man der Nadelspitze eine geerdete Metallplatte nähert, aber nur bis zur Grenze von etwa 1000 Volt, denn dies ist die niedrigste Spannung, bei der an einer scharfen Spitze eine Spitzenentladung erfolgt. Im Dunkeln sieht man die Spitzenentladung deutlich an Influenzmaschinen und Induktoren. Das manchmal vor Gewittern an metallischen Spitzen, insbesondere Schiffsmasten, auftretende Elmsfeuer ist eine Spitzenentladung infolge der bei Gewittern besonders starken elektrischen Felder in der Atmosphäre. Auch an Hochspannungsleitungen kann man im Dunkeln manchmal die gleiche Erscheinung, Sprühen genannt, beobachten. Die Spitzenentladung ist, wo man es in der Technik mit hohen Spannungen zu tun hat, eine störende und verlustbringende Erscheinung, die man nach Möglichkeit zu beseitigen trachtet, indem man scharfe Kanten und Spitzen vermeidet. Benutzt wird sie gelegentlich, um bei hohen Spannungen und kleinen Stromstärken eine leitende Verbindung zwischen bewegten Kontakten herzustellen, deren einen

man als Spitze oder Spitzenkamm ausbildet. Auch beim Blitzableiter wird die Spitzenentladung nutzbar gemacht (§ 226).

289. Funkenentladung. Während es sich bei der Spitzenentladung immer nur um die Entladung verhältnismäßig geringfügiger Elektrizitätsmengen, also um schwache Ströme handelt, besteht die Funkenentladung in einem schlagartigen Übergang größerer Elektrizitätsmengen bei hoher Spannung. Sie tritt, wie die Spitzenentladung, nur bei Gasdrucken von der Größenordnung des Atmosphärendrucks und darüber auf. Ihre großartigste Erscheinungsform ist der Blitz, als eine unter der Wirkung von Spannungen von Millionen von Volt zwischen zwei Wolken oder einer Wolke und der Erde übergehende Funkenentladung. Jeder Funke ist von einem heftigen Knall begleitet, so daß eine Reihe schnell aufeinanderfolgender Funken ein heftiges Knattern hervorruft. Der Knall rührt davon her, daß die JOULEsche Wärme des momentan sehr starken Funkenstroms eine außerordentliche Erwärmung des Gases in der Strombahn hervorruft. Der dadurch entstehende sehr hohe Druck gleicht sich in Form einer als Knall bemerkbaren Druckwelle im Gase aus. Am besten beobachtet man diese Entladungsform, indem man zwei isolierte Kugeln (Funkenstrecke) mit den beiden Polen einer mit Leidener Flaschen versehenen Influenzmaschine oder mit den beiden Klemmen der Sekundärspule eines Funkeninduktors verbindet. Die Farbe der Funken ist in Luft rötlich-violett, kann aber durch die Art der Elektroden, von denen unter der Wirkung der Funken ein wenig verdampft, stark verändert werden. Die Spannung, bei der ein Funke einsetzt, hängt von der Form und dem Abstand der Elektroden, außerdem von Gasdruck und Gasart ab. Die Spannungen, die zum Hervorbringen eines Funkenübergangs zwischen zwei Elektroden, z. B. zwei Kugeln oder einer Platte und einer Spitze, erforderlich sind, sind durch Messungen bekannt. Man kann daher auch umgekehrt die Schlagweite von Funken zwischen zwei solchen Elektroden dazu benutzen, um die an den Elektroden liegende Spannung zu messen. Auch kann man mit Hilfe einer Funkenstrecke verhindern, daß die Spannung zwischen zwei Punkten eines Leitersystems einen bestimmten vorgeschriebenen Wert überschreitet. Man legt die Funkenstrecke an die beiden Punkte und bemißt ihre Länge so, daß ihre Durchschlagsspannung gleich der vorgeschriebenen Höchstspannung ist. Sobald die angelegte Spannung diesen Betrag erreicht, tritt Entladung über die Funkenstrecke ein, und die Spannung sinkt wieder. Diese Methode kommt natürlich nur für hohe Spannungen in Frage.


Abb. 245. Aufnahme eines Funkens auf schnell bewegter Platte nach B. WALTER.

Abb. 245 zeigt eine Aufnahme eines Funkens auf einer schnell bewegten photographischen Platte. Die zeitliche Folge ist von links nach rechts. Man sieht, wie sich der Funke allmählich ausbildet und sich anfänglich sozusagen erst seinen Weg sucht. Entsprechende Erscheinungen kann man auch bei Blitzen beobachten.

Liegt in der Bahn eines Funkens ein festes oder flüssiges Dielektrikum, so kann es bei ausreichender Spannung vom Funken durchschlagen werden. In festen Körpern entsteht dabei ein feines Loch.

Sowohl bei der Spitzen- wie bei der Funkenentladung treten in der Luft chemische Wirkungen auf. Es bilden sich aus dem Luftsauerstoff (O_2) Ozon (O_3) und aus Sauerstoff und Stickstoff Stickoxyde. Diese Gase, deren Einatmen in größeren Mengen schädlich ist, erzeugen den bekannten sog. Ozongeruch in der Nähe von elektrischen Maschinen mit hohen Spannungen.

290. Glimmentladung. Legt man an die Elektroden in einem Glasrohr, z. B. von der in Abb. 246 dargestellten Form, eine Spannung von mehreren hundert, ja unter Umständen von einigen tausend Volt, so geht durch das darin befindliche Gas bei Atmosphärendruck noch keine Entladung. Verdünnt man aber das Gas, so setzt bei einem Druck von einigen Zentimetern Hg eine Entladung ein, welche zunächst aus einem Lichtband besteht, das Anode und Kathode verbindet. Bei weiter abnehmendem Druck nimmt die Entladung die in Abb. 246a oder b dargestellte Form an. Die Kathode (rechts), welche eine Platte oder ein Stift sein kann, ist mit einer dünnen, in Luft rötlich-gelben Lichthaut bedeckt, der ersten Kathodenschicht (1), auf die ein lichtloser Raum, der CROOKESsche oder HITTORFsche Dunkelraum (2) folgt. Dieser wird durch das negative Glimmlicht (3) begrenzt, das in Luft bläulich gefärbt ist. Es folgt ein zweiter lichtloser Raum, der FARADAYsche Dunkelraum (4). Fast den ganzen übrigen Teil des Rohres füllt das in Luft rötlich-violette positive Glimmlicht (5) aus, das entweder als zusammenhängende Lichtmasse erscheint, wie in Abb. 246a, oder in leuchtende Schichten mit nichtleuchtenden Zwischenräumen aufgelöst ist (Abbild. 246b). Die Oberfläche der Anode (links) ist oft mit dem in Luft rötlichen anodischen Glimmlicht (6) bedeckt.

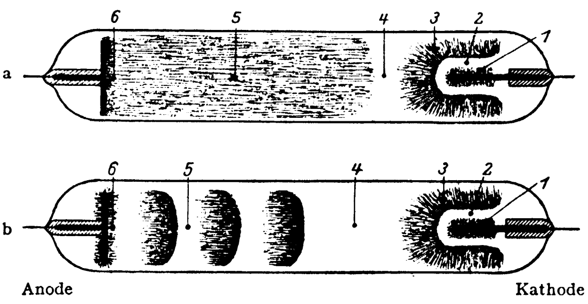


Abb. 246. a ungeschichtete, b geschichtete Glimmentladung.

Bei höherem Druck sind die Schichten 1 bis 4 auf die nächste Umgebung der Kathode zusammengedrängt, und das positive Glimmlicht erfüllt fast das ganze Rohr. Je niedriger der Druck ist, um so beträchtlicher werden die Dimensionen der kathodischen Gebilde, und das positive Glimmlicht weicht immer mehr auf die Anode zurück. Dabei werden die Erscheinungen immer lichtschwächer. Schließlich verschwinden sie so gut wie vollkommen, aber dafür tritt jetzt, wenn die Spannung zur Aufrechterhaltung einer Entladung noch ausreicht, eine lebhafte grüne Fluoreszenz (§ 508) des Glases auf. Bei sehr niedrigem Druck setzt schließlich die Entladung aus.

Die Farbe der Lichterscheinungen im Gase ist vor allem von der Art der Gasfüllung abhängig und für jede Gasart charakteristisch. Sie zeigt das Spektrum des betreffenden Gases (§ 475).

Der Mechanismus der Glimmentladung ist überaus kompliziert und in seinen Einzelheiten bisher noch keineswegs völlig aufgeklärt. Fest stehen aber folgende Tatsachen. Senkrecht von der Kathode geht eine aus schnell bewegten freien Elektronen bestehende Strahlung, also eine sog. Korpuskularstrahlung, die von PLÜCKER (1858) entdeckten und zuerst von HITTORF genauer untersuchten Kathodenstrahlen, aus. Diese sind selbst nicht sichtbar, erregen aber die Gasmoleküle durch Zusammenstöße mit ihnen zum Leuchten. In der entgegengesetzten Richtung, also auf die Kathode zu, aber nicht von der Anode, sondern vom Gase

ausgehend, verlaufen Strahlen von positiven Gasionen. Man kann sie am besten beobachten, wenn man die Kathode mit Durchbohrungen (Kanälen) versieht, durch die sie in den Raum hinter der Kathode austreten (Abb. 248, § 292). Daher wurden sie von ihrem Entdecker GOLDSTEIN Kanalstrahlen genannt. Der wichtigste Teil der Entladung liegt in den der Kathode nahen Schichten. Man erkennt dies z. B. daran, daß, wenn man den Abstand zwischen Kathode und Anode bei konstantem Gasdruck verändert, diese Entladungsteile unverändert bleiben, während das positive Glimmlicht kürzer oder länger wird. Auch liegt der Hauptteil der Spannung, der sog. Kathodenfall, auf dem Stück zwischen der Kathode und dem Rande des negativen Glimmlichts. Diesem Kathodenfall verdanken die Kathoden- und Kanalstrahlen hauptsächlich ihre Geschwindigkeit. Er ist abhängig von der Gasart und dem Kathodenmaterial, und bei kleineren Stromdichten, bei denen die Kathode noch nicht ganz von Glimmlicht bedeckt ist, vom Gasdruck weitgehend unabhängig (normaler Kathodenfall). Er steigt erst, wenn die Stromdichte größer wird (anormaler Kathodenfall). In den Edelgasen ist der Kathodenfall besonders niedrig. Die mit Edelgas, meist Neon, gefüllten Glimmlampen, die z. B. zu Reklamezwecken Verwendung finden, können daher schon mit der Spannung von 220 Volt der Lichtnetze betrieben werden, während der normale Kathodenfall der anderen Gase durchweg etwa zwischen 220 und 330 Volt liegt. Sehr viel niedriger kann man den Kathodenfall machen, wenn als Kathode ein glühendes Platin- oder Wolframblech oder ein glühender Draht aus gleichem Material benutzt wird. Es beruht dies auf der Elektronenemission glühender Metalle. Noch stärker ist die Wirkung, wenn man eine solche glühende Elektrode mit gewissen Erdalkalioxyden bedeckt, deren Elektronenemission sehr hohe Beträge annehmen kann (WEHNELT-Kathode, vgl. § 284).

291. Kathodenstrahlen. Die Kathodenstrahlen tragen ihren Namen nach ihrem im vorstehenden Paragraphen erwähnten Ursprung von der Kathode der Glimmentladung. Häufig wird aber dieser Name auf alle Arten von Elektronenstrahlen, ohne Rücksicht auf die Entstehungsart, angewandt.

In der Glimmentladung bewegen sich die Kathodenstrahlen infolge der Trägheit der Elektronen geradlinig, solange sie nicht mit Gasmolekülen zusammenstoßen oder anderweitig aus ihrer geradlinigen Bahn abgelenkt werden. Hindernisse, welche in ihrem Wege stehen, werfen daher einen ziemlich scharfen Schatten auf der fluoreszierenden Glaswand. Nicht nur die Glaswand, sondern auch sehr viele andere Substanzen, insbesondere Mineralien und Salze, werden durch Aufprall von Kathodenstrahlen zur Fluoreszenz erregt.

In den Kathodenstrahlen steckt trotz ihrer geringen Masse wegen ihrer großen Geschwindigkeit eine beträchtliche kinetische Energie. Treffen sie auf ein Hindernis, an dem sie ihre Geschwindigkeit verlieren, so wird es erwärmt und kann sogar zum Glühen gebracht werden.

Die Kathodenstrahlen bewirken auch in vielen Fällen chemische Umsetzungen. Sie wirken z. B. auf die photographische Platte. Wo eine solche von Kathodenstrahlen getroffen wird, zeigt sie nach Entwicklung eine Schwärzung.

Kathodenstrahlen können in Gasen von niedrigem Druck Strecken von vielen Metern durchlaufen. Aber auch feste und flüssige Stoffe durchdringen sie in dünnen Schichten. LENARD hat dies benutzt, um Kathodenstrahlen aus dem Entladungsrohr heraustreten zu lassen (Abb. 247). Er brachte dort, wo die von der Kathode K herkommenden Kathodenstrahlen die Rohrwand treffen, ein Metallsieb M an, welches er mit einer dünnen, luftdicht aufliegenden Aluminiumfolie Al bedeckte. Durch diese können die Kathodenstrahlen nach außen

dringen. Man nennt solche aus dem Entladungsrohr befreiten Kathodenstrahlen LENARD-Strahlen. Sie haben sehr starke chemische und physiologische Wirkungen.

Wegen ihrer Ladung erfahren die Kathodenstrahlen durch ein quer zu ihrer Bewegungsrichtung gerichtetes elektrisches Feld eine Ablenkung aus ihrer Bahn. Ebenso bewirkt ein magnetisches Feld eine Ablenkung, wie in § 307 ausführlich besprochen werden wird. Aus der Größe dieser Ablenkungen kann das Verhältnis ε/μ aus der Ladung und der Masse μ der Elektronen, ihre sog. spezifische Ladung, ermittelt werden.

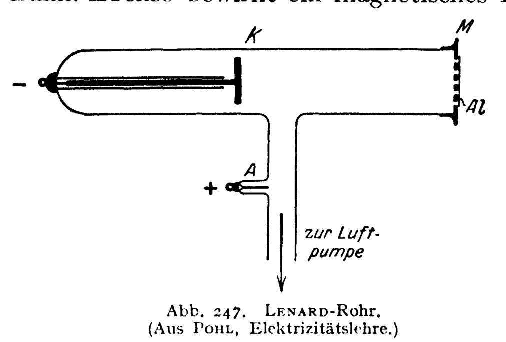


Abb. 247. LENARD-Rohr. (Aus POHL, Elektrizitätslehre.)

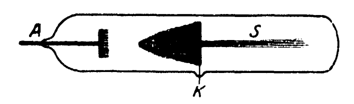


Abb. 248. Kanalstrahlen.

292. Positive Strahlen in der Glimmentladung. Bereits im § 290 sind die Kanalstrahlen (GOLDSTEIN 1886) als positive Strahlen in der Glimmentladung erwähnt worden (*S*, Abb. 248). Sie bestehen aus geladenen Atomen, also Ionen, des in der Entladungsröhre enthaltenen Gases. Sie sind jedoch nicht auf ihrem ganzen Wege positiv geladen. Infolge der Zusammenstöße mit den Gasmolekülen, die dabei ionisiert werden, treten bei den Ionen Umladungserscheinungen auf, so daß sie zeitweilig auch ungeladen oder negativ geladen sind. Auch die Kanalstrahlen kann man elektrisch und magnetisch ablenken, jedoch bedarf es wegen ihrer viel größeren Masse dazu weit stärkerer Felder als bei den Kathodenstrahlen. Auf diese Weise hat man auch für die Kanalstrahlen die spezifische Ladung ε/μ messen können. Sie ist, da es sich hier um Ionen, also geladene Atome, handelt, wegen des viel größeren μ weit kleiner als die der Elektronen, und von der Gasart abhängig. Die Ladung eines Kanalstrahlteilchens kann ein Mehrfaches des elektrischen Elementarquantums betragen.

Bringt man auf eine erhitzte Anode gewisse Salze, so geht von ihr eine andere Art von positiven Strahlen, die sog. Anodenstrahlen, aus, welche auch aus positiven Ionen bestehen. Diese entstammen den in den Salzen enthaltenen Stoffen. In der gewöhnlichen Glimmentladung treten solche Anodenstrahlen nicht oder höchstens sehr schwach auf.

293. Lichtbogen. Legt man an zwei Kohlenstäbe eine Spannung von mindestens 60 Volt, bringt sie (unter Vorschaltung eines Widerstandes, zur Vermeidung von Kurzschluß) zur Berührung und zieht sie dann wieder auseinander, so entsteht zwischen ihnen in der Luft und auch in anderen Gasen, wenn ihr Druck nicht erheblich kleiner ist als 1 Atm., ein sog. Lichtbogen. Gleichzeitig geraten die Kohlenspitzen ins Glühen, und zwar die positive weit stärker als die negative. Es bildet sich an ihr eine Aushöhlung, ein Krater, der die Quelle eines intensiven weißen Lichtes ist (Abb. 249). Auch die Gasstrecke zwischen den Kohlen leuchtet weißlich durch die der von Entladung mitgerissenen glühenden Kohlenteilchen, und man sieht eine von der Verbrennung der Kohle herrührende bläuliche Flamme. Im Lichtbogen können Ströme von vielen Ampere fließen. Es herrschen in ihm unter geeigneten Bedingungen Temperaturen bis zu rund 4000°. Der Lichtbogen findet in Gestalt der Bogenlampe ausgedehnte technische Verwendung.

Wichtig ist weiter der Lichtbogen zwischen Quecksilberelektroden in Quecksilberdampf in von anderen Gasen möglichst befreiten Gefäßen (Abb. 250). Die Entladung erhitzt die Quecksilberelektroden stark, so daß in dem Rohr ein hoher Quecksilberdampfdruck herrscht, durch den der Lichtbogen, wie in Luft zwischen den Kohlen, übergehen kann. Dieser Lichtbogen leuchtet selbst sehr stark und ist eine Quelle intensiver ultravioletter Strahlung, die aus dem Rohre austreten kann, wenn es nicht aus gewöhnlichem Glas, sondern aus geschmolzenem Quarz oder aus besonderen, für Ultraviolett durchlässigen Glassorten hergestellt ist. Derartige Lampen (Quarzquecksilberlampen) finden u. a. wegen der starken physiologischen Wirkung der ultravioletten Strahlung Verwendung, z. B. in der Medizin als sog. „künstliche Höhensonne". Die Augen müssen vor der Strahlung durch dunkle Glasbrillen geschützt werden.



Abb. 249. Lichtbogen.

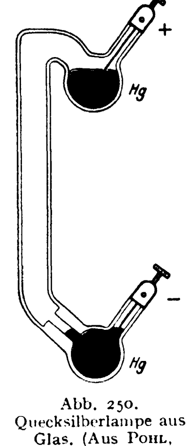
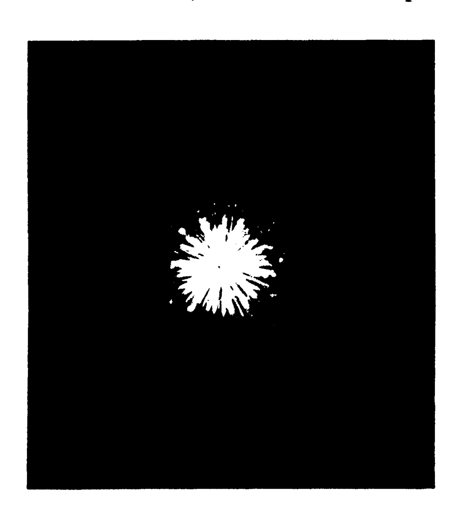


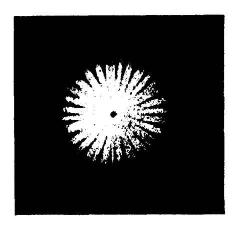
Abb. 250. Quecksilberlampe aus Glas. (Aus POHL, Elektrizitätslehre.)

Ein Lichtbogen hat eine fallende Charakteristik (§ 285). Es ist daher notwendig, ihm stets einen Widerstand vorzuschalten, um den Strom in den gewünschten Grenzen zu halten und Kurzschluß durch den Bogen zu vermeiden.

294. **Elektrische Figuren.** Trifft eine Funken- oder Spitzenentladung auf ein festes Hindernis, z. B. eine Glasplatte, so breitet sie sich auf ihr in eigentümlicher Weise aus. Man kann diese Bahnen auf verschiedene Weise sichtbar machen, z. B. durch nachträgliche Bestäubung mit Schwefelblumenpulver, welches in diesen Bahnen besser haftet als an anderen Stellen, oder durch ihre Wirkung auf eine photographische Platte. Diese Erscheinung nennt man elektrische oder LICHTENBERGsche Figuren. Die Bahnen haben ein verschiedenes Aussehen, je nachdem die erzeugende Elektrode positiv oder negativ geladen ist (Abb. 251).



a



b

Abb. 251. a positive, b negative LICHTENBERGsche Figur auf photographischer Platte.

295. Atmosphärische Elektrizität. Daß in der Atmosphäre starke elektrische Ladungen auftreten können, macht sich deutlich bei Gewittern bemerkbar. Der Blitz ist als eine Funkenentladung bereits im § 289 erwähnt worden. Es handelt sich dann aber nur um abnorm starke Ansammlungen von Ladungen verschiedenen Vorzeichens in einzelnen Wolken. Tatsächlich ist die Atmosphäre stets der Sitz von Ladungen, und es besteht ferner in ihr ein starkes elektrisches Feld, an der Erdoberfläche von 120 Volt/m, und zwar ist die Erde gegenüber den höheren Luftschichten negativ geladen. Die Gesamtladung des Erdballs beträgt rund — 0,5 Millionen Coulomb. Das Potentialgefälle in der Atmosphäre kann man nachweisen, indem man einen mit Spiritus getränkten Wattebausch, der durch einen Draht mit einem im Hause stehenden Elektrometer verbunden ist, anzündet und ein bis zwei Meter aus einem Fenster hinausstreckt. Infolge der in der Flamme befindlichen Ionen (§ 285) wird die Luft in ihrer Umgebung leitend. Der Wattebausch und die Blättchen des mit ihm verbundenen Elektrometers laden sich positiv auf, wie man am Ausschlag und durch Prüfung des Vorzeichens der Ladung nachweisen kann. Das Potential ist also schon dicht an der Hauswand merklich höher, als das der Erde.

Die in der Luft stets vorhandenen Ionen sind verschiedenen Ursprungs. Zum größten Teil rühren sie zweifellos von der Strahlung der in der Erde und der Luft vorhandenen radioaktiven Stoffe her. Die Ionenzahl in der Luft schwankt daher mit dem Luftdruck, weil bei sinkendem Druck die dann aus dem Boden entweichende Luft radioaktive Emanation (§ 521) mit sich führt. Ein kleiner Teil der Ionen aber verdankt seine Entstehung dem Vorhandensein einer äußerst durchdringenden Strahlung, der sog. Höhenstrahlung (§ 473), welche jedenfalls nicht irdischen, sondern kosmischen Ursprungs ist.

25. Kapitel.

Magnetische Felder im Vakuum.

Vorbemerkung. Die magnetischen Wirkungen in Luft unterscheiden sich von denen im luftleeren Raum (Vakuum) nur außerordentlich wenig. Wenn daher in diesem Abschnitt auch vorausgesetzt wird, daß sich die Körper, von denen magnetische Wirkungen ausgehen — Magnete, Spulen usw. —, im Vakuum befinden, so können die beschriebenen Versuche genau so gut auch in Luft ausgeführt gedacht werden. Der Einfluß, den raumerfüllende Stoffe auf die magnetischen Wirkungen ausüben, wird im 26. Kapitel besprochen.

296. Magnete. Ein Magnet ist bekanntlich ein meist stab-, nadel- oder hufeisenförmiges Stück Eisen, welches zwei in die Augen fallende Eigenschaften besitzt. Erstens wirkt es anziehend auf Eisen, zweitens richtet es sich, wenn es frei beweglich ist, ungefähr in die Nordsüdrichtung.

Untersucht man das gegenseitige Verhalten zweier Magnete, so zeigt sich, daß die beiden Enden eines Magneten sich nicht gleich verhalten. Das eine Ende des einen Magneten wird von dem einen Ende des andern angezogen, vom andern aber abgestoßen, und mit dem andern Ende des ersten Magneten ist es gerade umgekehrt. Es gehen also von einem Magneten Kräfte aus, die in vielen Beziehungen eine äußere Ähnlichkeit mit elektrischen Kräften haben. Die einem Magneten innewohnende besondere Eigenschaft bezeichnet man als M a g n e t i s m u s. Sie ist bereits im Altertum an gewissen Eisenerzen (sog. natürlichen Magneten) beobachtet worden, und man hat schon früh derartige Magnete für die Navigation benutzt (Kompasse).

Die magnetischen Kräfte gehen bei länglichen Magneten im allgemeinen ungefähr von deren Enden aus. Diese Stelle bezeichnet man als die Pole des Magneten. Jeder Magnet hat im allgemeinen zwei solche Pole, nie weniger als zwei. Denjenigen Pol eines Magneten, der sich nach Norden einstellt, nennt man den Nordpol oder positiven Pol des Magneten, den andern Südpol oder negativen Pol. (In manchen Ländern, z. B. in Frankreich, ist die Bezeichnung aus später [§ 301] zu erörternden Gründen umgekehrt.) Bei gewöhnlichen Stabmagneten sind die Pole um etwa $^1/_{12}$ der Stablänge von den Enden entfernt.

297. Es gibt keinen wahren Magnetismus. Magnetische Dipole. Teilt man einen Körper, der zwei elektrische „Pole“ besitzt, überhaupt allgemein einen elektrischen Dipol (§ 214), so in zwei Stücke, daß jedes Stück einen dieser beiden Pole enthält, so findet man, daß das eine Stück elektrisch positiv, das andere negativ geladen ist (§ 227). Man kann also, wie im Abschnitt Elektrostatik an vielen Beispielen erläutert worden ist, positive und negative elektrische Ladungen voneinander trennen, sie voneinander frei machen. Man sagt daher, daß es wahre elektrische Ladungen gibt.

Macht man den gleichen Versuch mit einem Magneten, so mißlingt er. Man magnetisiere eine durch Ausglühen und Abschrecken gehärtete Stricknadel durch Bestreichen mit einem Magneten. Sie hat dann am einen Ende einen positiven, am andern Ende einen negativen Pol. In ihrer Mitte verhält sie sich wie gewöhnliches Eisen. Zerbricht man jetzt die Nadel in zwei Teile, so zeigt sich, daß jeder dieser Teile wieder einen vollständigen Magneten, mit je einem positiven und einem negativen Pol von etwa gleicher Polstärke wie die ganze Nadel bildet. Es sind also in der ehemaligen Mitte der Stricknadel neue entgegengesetzte Pole aufgetreten. Dieses Verfahren kann mit dem gleichen Erfolg durch weiteres Zerteilen der Stricknadel fortgesetzt werden. Niemals gelingt es, positiven und negativen Magnetismus zu trennen, sie voneinander frei zu machen. Positiver und negativer Pol bilden ein untrennbares Paar, und zwar sind die beiden jeweils zusammengehörigen Pole immer von genau der gleichen Stärke. Es gibt daher keinen wahren Magnetismus, d. h. keine für sich allein bestehenden Magnetismusmengen positiven und negativen Vorzeichens, wie die Elektrizitätsmengen. Das ist ein wesentlicher Unterschied gegenüber der Elektrizität.

In vollkommener Analogie zum elektrischen Dipol definiert man das magnetische Moment $\mathfrak{M}$ eines Magneten, also eines magnetischen Dipols, als das Produkt ml seiner Polstärke m und des Abstandes l seiner beiden Pole.

$$\mathfrak{M} = ml. \qquad (1)$$

(Über die Definition und Einheit der Polstärke s. § 298.) Die Verbindungslinie der beiden Pole heißt die magnetische Achse des Magneten. Sie ist vom Südpol zum Nordpol gerichtet.

Da es isolierte magnetische Pole in der Natur nicht gibt, sondern nur Dipole, so ist der Begriff des Magnetpols im Grunde eine Fiktion ohne physikalische Realität. Es ist aber in vielen Fällen nützlich, sich dieser Fiktion zu bedienen. In die exakte Beschreibung der Naturvorgänge geht, wie wir noch sehen werden, stets das Dipolmoment, nie die Stärke eines einzelnen Pols, ein.

298. Das COULOMBsche Gesetz für Magnetpole. Die Untersuchung der Kraftwirkung einzelner Magnetpole aufeinander hat insofern Schwierigkeiten, als es ja einzelne Pole nicht gibt, man es also immer mit der Kraftwirkung der beiden Pole eines Magneten auf die beiden Pole eines andern zu tun hat. Dieser Schwierigkeit kann man aber z. B. dadurch Herr werden, daß man die Pole sehr langer Magnete benutzt, von denen man zwei einander ganz nahe bringt, während die anderen so weit entfernt sind, daß sie auf diese beiden Pole keine

merkliche Kraftwirkung ausüben. (Außerdem kann man dieser Störung durch Rechnung Geltung tragen). Z. B. kann man einen langen Stabmagneten vertikal an eine Wage hängen, sein Gewicht austarieren und nunmehr einen Pol eines zweiten langen, vertikalen Stabmagneten von unten her seinem unteren Pole nähern. Je nach dem Vorzeichen der beiden Pole erfolgt Anziehung oder Abstoßung. Diese kann man durch Auflegen von Gewichten kompensieren und so die Größe der magnetischen Kraft messen. Eine Schwierigkeit dieses Verfahrens liegt darin, daß man ohne besondere Messungen die genaue Lage der Pole im Magneten nicht angeben kann. Auf Grund ähnlicher Versuche fand COULOMB (1785) das nach ihm benannte Gesetz für die zwischen Magnetpolen wirkenden Kräfte, welches dem COULOMBschen Gesetz für elektrische Ladungen formal völlig gleicht. Die Kraft, mit der zwei im Abstande r voneinander befindliche Magnetpole von den Stärken m und m' aufeinander wirken, ist

$$k = \text{const} \cdot \frac{m\,m'}{r^2}.$$

Die Größe der Konstanten hängt von der Wahl der Maßeinheit für die Polstärke ab. Man wählt diese, ganz analog dem Verfahren bei elektrischen Ladungen (elektrostatische Ladungseinheit, § 211) meist so, daß die Konstante den Zahlenwert 1 erhält, wenn sich die Pole im Vakuum befinden (vgl. auch § 356) und die Kraft k in dyn gemessen wird, also daß

$$k = \frac{m\,m'}{r^2}\ \text{dyn}. \qquad (2)$$

Es ist daher die Einheit der magnetischen Polstärke so definiert, daß ein Magnetpol die Stärke 1 hat, wenn er im Vakuum oder, was nur einen winzigen Unterschied macht, in Luft auf einen ihm gleichen in der Entfernung $r = 1$ cm die Kraft $k = 1$ dyn ausübt. Damit ist die Einheit der Polstärke an das CGS-System angeschlossen.

Die Kraft ist positiv (abstoßend) oder negativ (anziehend), je nachdem die beiden Pole gleichnamig oder ungleichnamig sind, also genau ebenso wie bei elektrischen Ladungen.

Wegen der formalen Gleichheit der Gl. 2 mit dem COULOMBschen Gesetz für elektrische Ladungen ergibt sich für die Polstärke die gleiche Dimension im CGS-System, wie für eine elektrische Ladung (im elektrostatischen Maßsystem) nämlich $[m^{\frac{1}{2}}\, l^{\frac{3}{2}}\, t^{-1}]$.

299. Magnetische Feldstärke. Kraftlinien. Ganz analog zur elektrischen Feldstärke ist die magnetische Feldstärke in einem Raumpunkte definiert als die Kraft, die ein Magnetpol von der Stärke 1 in jenem Punkte des Raumes erfährt. Ist $\mathfrak{H}$ die magnetische Feldstärke, so ist also der Betrag der auf einen Magnetpol m wirkenden Kraft

$$k = m\mathfrak{H}\ \text{dyn}. \qquad (3)$$

Sie ist positiv (in der Feldrichtung) oder negativ (gegen die Feldrichtung) je nach dem Vorzeichen von m. Ist die auf einen Magnetpol von der Stärke 1 ausgeübte Kraft $k = 1$ dyn, so herrscht die Feldstärke 1. Diese Einheit heißt nach dem Mathematiker und Physiker GAUSS 1 Gauß. Gemäß ihrer Ableitung aus einer Kraft, also einem Vektor, ist auch die magnetische Feldstärke eine gerichtete Größe.

Die magnetischen Kraftlinien sind ebenso definiert, wie die elektrischen Kraftlinien. Sie zeigen durch ihre Richtung die Richtung des Feldes und durch ihre Dichte (Zahl der durch 1 cm² einer zur Feldrichtung senkrechten Fläche hindurchgehenden Kraftlinien) die Stärke des Feldes an. Die Kraftlinien treten aus dem positiven Pol eines Magneten aus und verlaufen auf den negativen Pol

des gleichen oder eines andern Magneten hin. Die Zahl der von einem Magnetpol der Stärke m ausgehenden Kraftlinien ist $4\pi m$ (Beweis genau wie bei den Kraftlinien einer elektrischen Ladung e, § 223).

Die magnetische Feldstärke in der Entfernung r von einem einzelnen Pol m ist nach dem COULOMBschen Gesetz Gl. 2 und nach Gl. 3

$$\mathfrak{H} = \frac{m}{r^2} \text{ Gauß.} \quad (4)$$

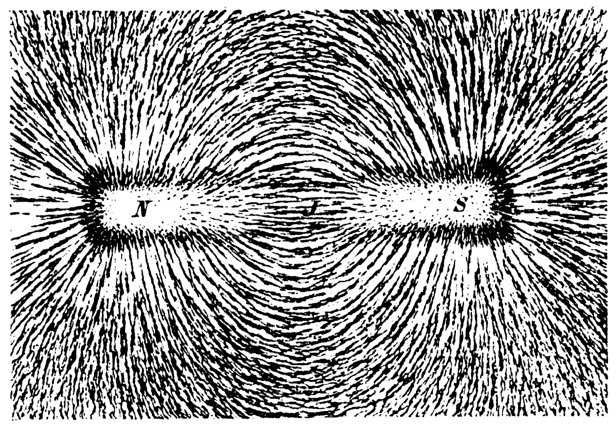


Abb. 252.
Kraftlinien eines Stabmagneten, mit Eisenfeilspänen sichtbar gemacht.

Magnetische Kraftlinien lassen sich ausgezeichnet mittels feiner Eisenfeilspäne sichtbar machen. Legt man auf einen Magneten ein in einen Rahmen gespanntes Blatt Papier und bestreut es mit einer dünnen Schicht von Eisenfeilspänen, so ordnen sich diese, wenn man leicht auf das Papier klopft, in Linien an, welche der Richtung der Kraftlinien entsprechen. Wo die Feldstärke am größten ist, liegen auch die Späne am dichtesten (Abb. 252 und 253). Über den Grund für diese Erscheinung s. § 355.

Ist die Feldstärke in einem ausgedehnteren Raumteil nach Größe und Richtung überall die gleiche, so bezeichnet man ein solches Feld als ein homogenes Feld.

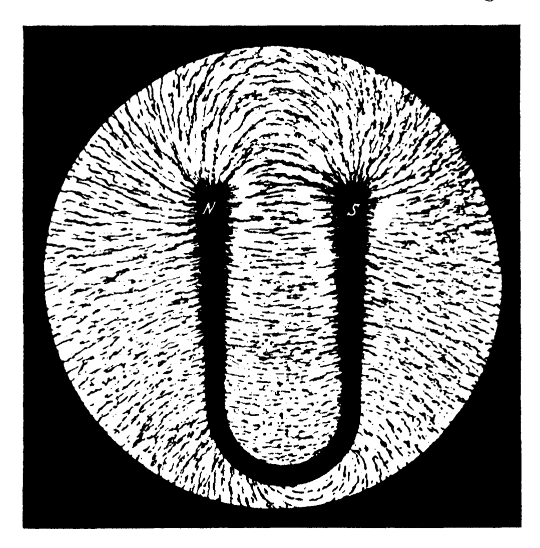


Abb. 253. Kraftlinien eines Hufeisenmagneten, mittels Eisenfeilspänen sichtbar gemacht. (Aus POHL, Elektrizitätslehre.)

Wegen der Analogie des COULOMBschen Gesetzes für Magnetpole mit demjenigen für elektrische Ladungen entsprechen sich auch die Felder elektrischer und magnetischer Dipole (wenigstens im Außenraum der Dipole) vollkommen, und es gelten auch für die letzteren die Gl. 15a und b (§ 223), in denen dann $\mathfrak{M}$ das Moment eines magnetischen Dipols bedeutet. Beispiele von Dipolfeldern liefern die Abb. 252 und 253.

300. Kraftwirkungen eines magnetischen Feldes auf einen magnetischen Dipol. Da ein magnetischer Dipol formal einem elektrischen Dipol vollkommen entspricht, so gilt für die Kraftwirkungen magnetischer Felder auf einen solchen, also auch auf Magnete, alles, was früher über die Wirkung elektrischer Felder auf elektrische Dipole gesagt worden ist (§ 228). Die dort abgeleiteten Gleichungen sind ohne weiteres auf magnetische Dipole zu übertragen, indem wir an die Stelle der Ladungen e die Polstärken m, an die Stelle der elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ die magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}$ setzen. Es ist daher das auf einen magnetischen

Dipol vom Moment $\mathfrak{M}$ im homogenen Felde $\mathfrak{H}$ wirkende Drehmoment

$$N = \mathfrak{M}\mathfrak{H} \sin\varphi \,\mathrm{dyn} \cdot \mathrm{cm}, \tag{5}$$

wenn φ den Winkel bedeutet, den seine Achse mit der Feldrichtung einschließt (Abb. 196a, § 228). Im inhomogenen Felde wirkt auf ihn eine ihn in Richtung wachsender Feldstärke treibende Kraft

$$k = \mathfrak{M}\frac{d\mathfrak{H}}{dx}\,\mathrm{dyn}, \tag{6}$$

wobei vorausgesetzt ist, daß seine Achse bereits in der Feldrichtung (x-Richtung) liegt und die Feldrichtung am Orte seines positiven und negativen Pols die gleiche ist (Abb. 196c, § 228). Es ist also auch hier wieder nicht die Polstärke, sondern das magnetische Moment das Entscheidende.

Das magnetische Moment eines Magneten kann durch Messung des Drehmomentes N in einem Felde bekannter Stärke nach Gl. 5 bestimmt werden.

301. **Erdmagnetismus.** Die Tatsache, daß auf der Erde ein magnetisches Feld besteht, welches die Bewegung der Erde mitmacht, beweist, daß die Erde sich wie ein Magnet verhält, also ein magnetischer Dipol ist. Es ist möglich und sogar wahrscheinlich, daß dies damit zusammenhängt, daß der Erdkörper zum größten Teil aus Eisen besteht. Im übrigen ist aber der Ursprung der Magnetisierung der Erde noch weitgehend in Dunkel gehüllt. (Es ist gelegentlich vermutet worden, daß hier ein sonst noch unbekannter Effekt vorliegt, nämlich eine Magnetisierung lediglich durch die Rotation der Erde um ihre Achse. In diesem Zusammenhang ist bemerkenswert, daß auch die Sonne eine Magnetisierung zeigt, deren Pole mit den Enden der Rotationsachse der Sonne zusammenfallen.) Die Magnetpole der Erde liegen bekanntlich in der Nähe der Erdpole (magnetischer Nordpol bei den Melville-Inseln in $70^0\,5'$ n. Br., $96^0\,46'$ w. L., magnetischer Südpol auf dem antarktischen Kontinent in $72^0\,25'$ s. Br., 154^0 ö. L.). Ihre Bezeichnung ist genau genommen inkonsequent, denn da der im Norden gelegene Pol den Nordpol einer Magnetnadel (nach der bei uns üblichen Bezeichnungsweise) anzieht, muß er selbst im magnetischen Sinne ein Südpol sein, und umgekehrt. (Aus diesem Grunde ist die Bezeichnung der Pole eines Magneten in manchen Ländern die umgekehrte.)

Schon die Tatsache, daß die magnetischen Pole nicht genau mit den geographischen Polen zusammenfallen, bedingt, daß eine Magnetnadel im allgemeinen nicht genau nordsüdlich weist. An einzelnen Stellen der Erdoberfläche, z. B. in Ostpreußen und bei Kursk in der Sowjet-Union, sind sehr große Anomalien des erdmagnetischen Feldes vorhanden, welche die Richtung der Magnetnadel dort vollkommen verändern. Solche örtlichen Anomalien dürften in allen Fällen auf größere Eisenmassen zurückzuführen sein, welche in geringer Tiefe in die äußere Erdkruste eingebettet sind. Bei Kursk hat die Untersuchung der Anomalie tatsächlich zur Aufdeckung gewaltiger Eisenerzlager geführt. Die Abweichung der Magnetnadel von der genauen geographischen Nordsüdrichtung nennt man Deklination, in der Seemannssprache auch Mißweisung. Abb. 254 zeigt die Linien gleicher Deklination für das Jahr 1922. Die beigefügten Gradzahlen geben die Abweichung von der geographischen Nordsüdrichtung an. Die erdmagnetischen Pole sind in ständiger, langsamer Wanderung begriffen. Daher ist auch die Deklination langsam zeitlich veränderlich.

Da die Kraft auf jeden der beiden Pole eines Magneten sich aus der von den beiden erdmagnetischen Polen herrührenden Kraft nach dem Parallelogrammgesetz zusammensetzt, so ist die Richtung des erdmagnetischen Feldes an jedem Punkte der Erde mehr oder weniger gegen die Erdoberfläche geneigt. An den

beiden erdmagnetischen Polen weist die Magnetnadel senkrecht nach unten, etwa am Äquator steht sie zur Erdoberfläche tangential. Den Neigungswinkel gegen die Horizontale bezeichnet man als Inklination. Die Magnetnadeln der Kompasse usw. konstruiert man stets so, daß die durch die Inklination hervorgerufene Neigung durch ein geringes Übergewicht der einen Seite kompensiert

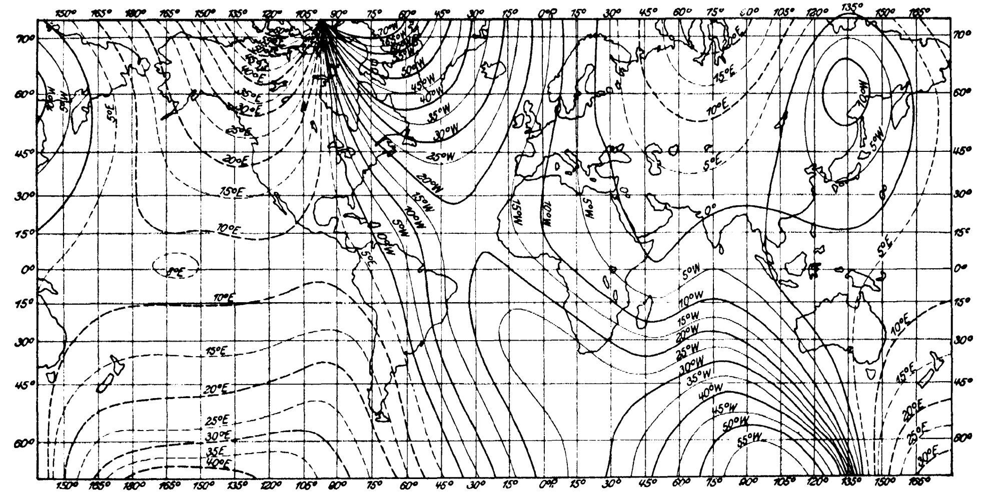


Abb. 254. Linien gleicher Deklination für 1922.

wird. Auf der nördlichen Halbkugel muß die den Südpol tragende Seite ein wenig schwerer sein. Auf diese Weise wird aber die erdmagnetische Kraft nicht in ihrer vollen Größe wirksam, sondern es wirkt auf die Magnetnadel nur die Horizontalkomponente (Horizontalintensität) der Feldstärke. Sie beträgt in unseren Breiten etwa 0,2 Gauß. Die zur Erdoberfläche senkrechte Komponente heißt die Vertikalkomponente.

Das erdmagnetische Feld unterliegt mancherlei Schwankungen. Einmal ist, wie schon erwähnt, die Lage der Pole nicht völlig konstant. Außerdem bestehen gewisse tägliche, jährliche und noch langfristigere periodische Schwankungen. Ferner treten Störungen auf, welche, ebenso wie die Polarlichter, mit der Sonnenfleckentätigkeit zeitlich und ursächlich zusammenhängen. Örtlich begrenzte Schwankungen des Feldes treten überall da auf, wo starke elektrische Ströme fließen, also insbesondere in den großen Städten. Diese Störungen können so stark sein, daß sie genauere magnetische Messungen überhaupt unmöglich machen.

Der Erdmagnetismus bildet ein wichtiges Mittel zur Orientierung auf der Erdoberfläche mit Hilfe der Kompasses. Bei eisernen Schiffen sind besondere Maßnahmen nötig, um die störenden Wirkungen des Schiffskörpers zu kompensieren. Daher der Vorteil des Kreiselkompasses (§ 48).

302. Magnetisches Feld eines geradlinigen Stromes. Durch einen horizontal in nordsüdlicher Richtung ausgespannten Draht fließe ein Gleichstrom von einigen Ampere (Abb. 255). Bringt man in die Nähe dieses Drahtes eine Magnetnadel, so bemerkt man, daß sie eine Ablenkung aus der Nord-Süd-Richtung erfährt, solange der Strom fließt, und daß sich die Richtung dieser Ablenkung umkehrt, wenn man die Richtung des Stromes umkehrt (Örsted 1820).

Der Versuch beweist zunächst ganz allgemein, daß in der Umgebung eines elektrischen Stromes ein magnetisches Feld besteht. Die genauere

Untersuchung zeigt, daß die magnetischen Kraftlinien um einen geraden stromdurchflossenen Draht Kreise sind, deren Zentrum im Drahte liegt. Eine frei bewegliche Magnetnadel stellt sich überall senkrecht zur Verbindungslinie ihrer Mitte mit dem Drahte. Führt man sie auf einem Kreise einmal um den Draht herum, so dreht sie sich dabei einmal um sich selbst. (Dabei ist natürlich vorausgesetzt, daß das erdmagnetische Feld sehr schwach gegenüber dem vom Strom erzeugten Feld ist, da dieses sonst durch jenes merklich verändert wird. Die genannten Erscheinungen zeigen sich also rein nur bei Verwendung eines nicht zu schwachen Stromes.)

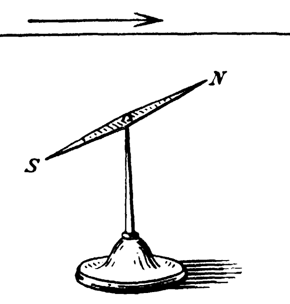


Abb. 255. Zum ÖRSTEDschen Versuch.

Wie jedes andere Magnetfeld, so kann man auch die magnetischen Felder von Strömen durch Eisenfeilspäne sichtbar machen. Die Späne ordnen sich bei einem geraden Draht deutlich auf Kreisen, deren Mittelpunkt im Drahte liegt (Abb. 256; der Stromleiter ist bei der Herstellung des Bildes durch das Loch geführt).

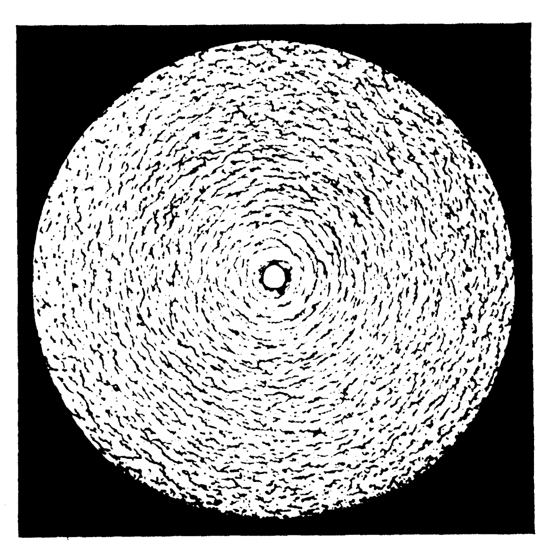


Abb. 256. Magnetfeld eines geradlinigen Stromes. (Nach POHL, Elektrizitätslehre.)

Wichtig ist die Tatsache, daß die hier auftretenden magnetischen Kraftlinien nirgends in „Polen" beginnen oder endigen, sondern in sich selbst zurücklaufen Es sind in sich geschlossene Kraftlinien.

Die Richtung des magnetischen Feldvektors kann in jedem Einzelfall aus der Einstellung einer Magnetnadel erkannt werden, da ja ihr Nordpol in die positive Feldrichtung weist. Die Versuche ergeben dann folgendes: Blickt man in Richtung des (positiven) Stromes, so umkreisen die magnetischen Kraftlinien den Stromleiter im Umlaufsinn des Uhrzeigers. Zur schnellen Orientierung sind die folgenden Merkregeln nützlich:

AMPÈRES Schwimmerregel: Man denke sich in der Richtung des positiven Stromes schwimmend, das Gesicht der Magnetnadel zugewandt. Dann wird der Nordpol nach links abgelenkt.

Rechte-Hand-Regel: Man lege die rechte Hand, die Handfläche der Magnetnadel zugewandt, so auf den Draht, daß die ausgestreckten Finger in

Richtung des Stromes weisen. Dann wird der Nordpol der Magnetnadel in Richtung des abgespreizten Daumens abgelenkt.

Schraubenregel: Die magnetischen Kraftlinien um einen Strom haben denjenigen Umlaufsinn, in dem man eine rechtsgängige Schraube drehen muß, damit sie sich in Richtung des Stromes vorwärtsbewegt.

303. **Magnetische Felder von Stromschleifen und Spulen.** Stellt man entsprechende Versuche mit Drähten an, welche zu Kreisen oder Rechtecken usw. gebogen sind, so ergeben sich qualitativ die gleichen Wirkungen. Die magnetischen Kraftlinien sind wieder geschlossene Kurven um den Draht, aber keine Kreise. Abb. 257 zeigt die durch Eisenfeilspäne sichtbar gemachten Kraftlinien einer kreisförmigen Stromschleife in einer zur Schleife senkrechten Ebene. Die Kraftlinien treten auf der einen Seite in die durch die Schleife begrenzte Fläche ein, an ihrer andern Seite aus und verlaufen, den Draht einmal umkreisend, an ihren Ausgangspunkt zurück. Das Kraftlinienbild ist also das gleiche, wie es bei einer Eisenscheibe wäre, welche so magnetisiert ist, daß sie auf ihrer einen Fläche einen Nordpol, auf ihrer andern Fläche einen Südpol trägt (Abb. 258). Wir wollen eine solche Eisenscheibe einen Scheibenmagneten oder eine magnetische Doppelschicht nennen, weil eine solche Stromschleife sich magnetisch ebenso verhält, als sei ihre Fläche auf der einen Seite mit einer Schicht von positivem, auf der andern mit einer solchen von negativem Magnetismus belegt. Eine stromdurchflossene Drahtschleife ist also einem Scheibenmagneten magnetisch äquivalent.

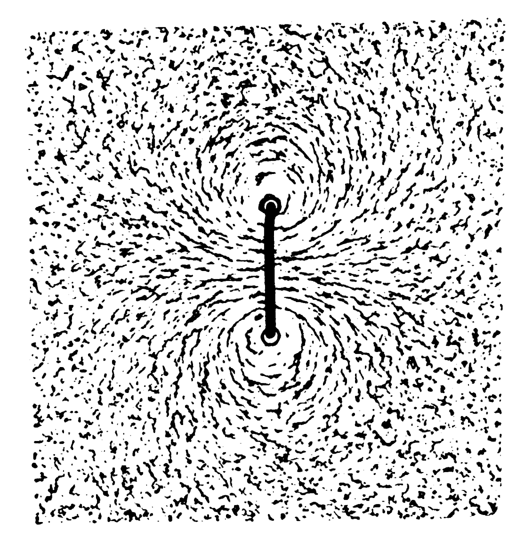


Abb. 257. Magnetisches Feld einer Stromschleife. (Nach POHL, Elektrizitätslehre.)

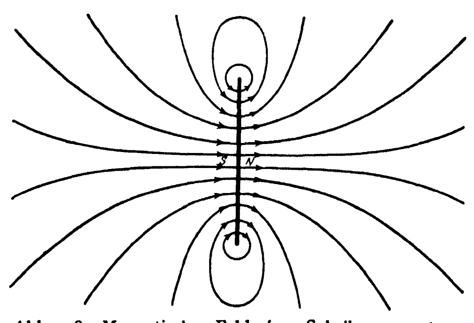


Abb. 258. Magnetisches Feld eines Scheibenmagneten, schematisch.

Die von einem Stromkreis eingeschlossene Fläche nennt man seine Windungsfläche. Wird die gleiche Fläche F vom gleichen Strome in n Windungen umflossen, so ist die Windungsfläche gleich nF.

Einen Stabmagneten können wir uns aus einer größeren Zahl von Scheibenmagneten, immer einer auf den andern gelegt, hergestellt denken. Entsprechend können wir auf rein elektrischem Wege ein Gebilde herstellen, das einem Stabmagneten bezüglich seines magnetischen Feldes weitestgehend ähnlich ist, indem wir eine größere Zahl von Stromchleifen übereinanderlegen. Am einfachsten geschieht dies so, daß man einen Draht spiralig aufwickelt, so daß alle Windungen nacheinander vom gleichen Strome durchflossen werden. Ein solches Gebilde heißt eine Spule (auch Solenoid). Das magnetische Feld einer Spule ist so gestaltet, daß die Kraftlinien im Innern parallel zur Achse der Spule verlaufen und auf einem mehr oder weniger langen Wege außen herum

in sich selbst zurücklaufen (Abb. 259a). Untersucht man das magnetische Feld in der Umgebung und im Innern einer solchen stromdurchflossenen Spule mit einer Magnetnadel, so kann man leicht dieses Verhalten nachweisen und sich ferner durch Vergleich mit dem Felde eines Stabmagneten von dem sehr ähnlichen Verlauf in beiden Fällen überzeugen (vgl. Abb. 252, § 299). Eine stromdurchflossene Spule ist also einem Stabmagneten magnetisch äquivalent. Die Richtung des magnetischen Feldes ergibt sich auch bei Stromschleifen und bei Spulen aus den Regeln des § 302. Blickt man in Richtung der Spulenachse in die Spule hinein, und wird die Spule, von hier aus gesehen, vom Strome im Sinne des Uhrzeigers umflossen, so verlaufen die magnetischen Kraftlinien im Innern vom Beobachter weg. Die Spule hat also in diesem Falle am abgewandten Ende einen scheinbaren magnetischen „Nordpol", am zugewandten Ende einen scheinbaren „Südpol".

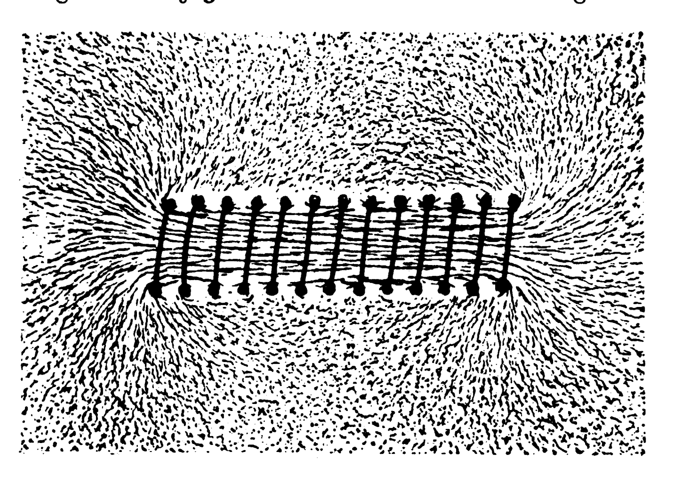


Abb. 259a. Magnetisches Feld einer Spule. (Nach POHL, Elektrizitätslehre.)

Da die Kraftlinien einer stromdurchflossenen Spule in sich geschlossen sind, so verlaufen im Innern der Spule ebenso viele Kraftlinien in der einen Richtung, wie außen in der entgegengesetzten Richtung. Ist die Spule eng und lang, so ist die Dichte der Kraftlinien im Innern sehr viel größer als außen, wo die Kraftlinien zum größten Teil in einem weiten Bogen von einem Spulenende zum andern verlaufen. Das bedeutet, daß im Innern der Spule ein sehr viel stärkeres magnetisches Feld herrscht als im Außenraum. Denkt man sich einen einzelnen magnetischen Nordpol einmal längs einer Kraftlinie gegen die Kraftrichtung bis zum gleichen Punkt wieder zurückgeführt, so wirkt auf ihn im Innern der Spule eine viel größere Kraft als im Außenraum. Es ist daher bei dieser Bewegung Arbeit hauptsächlich auf dem Wegstück im Spuleninnern zu leisten, auf dem äußeren Wegstück ist sie bei einer langen und engen Spule sehr viel kleiner.

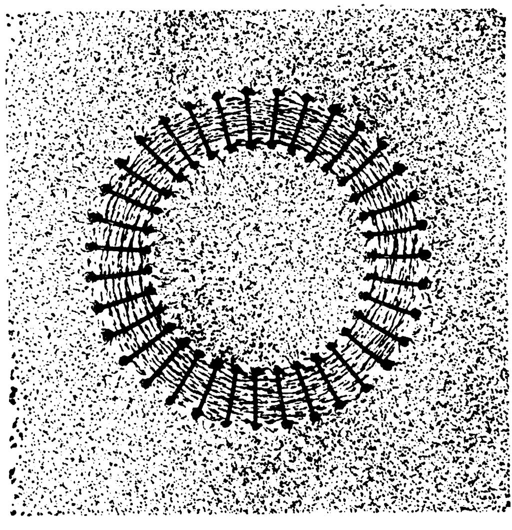


Abb. 259b. Magnetisches Feld einer ringförmigen Spule. (Nach POHL, Elektrizitätslehre.)

Einen besonders interessanten Fall zeigt Abb. 260, die das magnetische Feld einer ringförmig geschlossenen Spule darstellt. In diesem Fall verlaufen die magnetischen Kraftlinien vollständig im Innern der Spule. Der Außenraum ist feldfrei.

304. Das Gesetz von Laplace. Das magnetische Feld eines beliebig geformten stromführenden Leiters ist im allgemeinen kompliziert gestaltet. Wir betrachten deshalb zunächst das magnetische Feld eines einzelnen mit der Geschwindigkeit v bewegten Ladungsträgers von der Ladung ε. Denn ein solcher stellt ja auch einen elektrischen Strom dar, und ein Strom in einem materiellen Ladungsträger besteht in der gleichzeitigen Bewegung vieler solcher Ladungsträger (Elektronen, Ionen). Das Feld im Abstande r von einem einzelnen solchen Ladungsträger ist durch die Gleichung

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\varepsilon v}{r^2} \sin(v, r) \text{ Gauß} \qquad (7a)$$

gegeben. Dabei ist die Ladung ε in elektrostatischen Einheiten gemessen. (v, r) ist der Winkel, den die Geschwindigkeit v mit dem von dem bewegten Ladungsträger nach dem betrachteten Ort gezogenen Radiusvektor r bildet. Die Konstante $1/c$ hat eine wichtige Bedeutung. Der Zahlenwert von c beträgt fast genau $3 \cdot 10^{10}$, ihre Dimension im CGS-System ist $|lt^{-1}|$, also diejenige einer Geschwindigkeit. Die Konstante c ist in der Tat identisch mit der Lichtgeschwindigkeit (§ 315 und 327). Es ist nun aber auch üblich, die Gl. 7a unter Fortlassung der Konstanten $1/c$ zu schreiben,

$$\mathfrak{H} = \frac{\varepsilon v}{r^2} \sin(v, r) \text{ Gauß}. \qquad (7b)$$

Damit die Gleichung trotzdem zahlenmäßig richtig bleibt, muß man dann aber für die Ladung ε eine um $1/c$ kleinere Maßzahl wählen, d. h. eine um $3 \cdot 10^{10}$ größere Maßeinheit benutzen. Diese Festsetzung führt zu einem neuen elektrischen Maßsystem, dem elektromagnetischen Maßsystem, das gleichberechtigt neben dem bisher von uns benutzten elektrostatischen und dem praktischen Maßsystem steht. Näheres s. § 314 und 315. Wir schicken hier nur voraus, daß im elektromagnetischen System die Einheit der Elektrizitätsmenge gleich 10 Coulomb, die Einheit der Stromstärke gleich 10 Ampere, die Einheit der Spannung gleich 10^{-8} Volt, die Einheit des Widerstandes gleich 10^{-9} Ohm ist. Wir werden uns in diesem Abschnitt nunmehr durchweg des elektromagnetischen Maßsystems bedienen.

Aus der Gl. 7b können wir nun ohne weiteres den Anteil berechnen, den ein Längenelement dl eines von einem Strom i durchflossenen Leiters vom Querschnitt q zum Felde in einem im Abstande r befindlichen Punkte beiträgt. An die Stelle des einzelnen Ladungsträgers haben wir sämtliche im Leiterelement bewegten Ladungsträger zu setzen. Enthält 1 cm³ n solche Ladungsträger, so enthält das Element deren $nqdl$, und die gesamte in ihm bewegte Ladung beträgt $\varepsilon nqdl$. Nun ist aber nach § 245 $n\varepsilon qv = i$ die Stromstärke im Leiter. Infolgedessen erhalten wir für den Anteil $d\mathfrak{H}$ dieses Stromelements am Felde des ganzen Leiters im Punkte m (Abb. 260) aus Gl. 7b die Beziehung

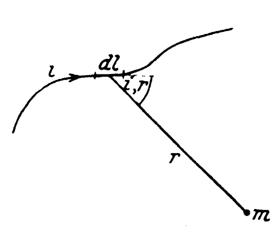


Abb. 260.
Zum Gesetz von LAPLACE.

$$d\mathfrak{H} = \frac{i\,dl}{r^2} \sin(i, r) \text{ Gauß}. \qquad (8)$$

Dabei haben wir noch (i, r) an die Stelle von (v, r) gesetzt, da ja die Stromrichtung mit der Bewegungsrichtung der Ladungsträger identisch ist. Dies ist das Gesetz von LAPLACE (1821, oft fälschlich als BIOT-SAVARTsches Gesetz bezeichnet, s. Gl. 9). Das magnetische Feld eines vollständigen, geschlossenen Stromkreises findet man indem man die Anteile seiner einzelnen Elemente nach den Gesetzen der Vektoraddition ad-

diert (integriert). Das läßt sich aber nur in ganz einfachen Fällen in geschlossener Form ausführen. Wir berechnen die Feldstärke im Mittelpunkt einer aus einer einzigen Drahtwindung bestehenden, kreisförmigen Schleife vom Radius r. In diesem Falle ist r konstant, $(i, r) = 90^0$, also $\sin(i, r) = 1$, und die Summe über alle Längenelemente dl ist der Kreisumfang $2\pi r$. Es ergibt sich dann das Gesetz von BIOT-SAVART (1820)

$$\mathfrak{H} = \frac{2\pi i}{r} \text{ Gauß}. \tag{9}$$

Durch eine einfache Integration ergibt sich die Feldstärke in der Entfernung r von einem unendlich langen geraden Draht zu

$$\mathfrak{H} = \frac{2i}{r} \text{ Gauß}. \tag{10}$$

Man findet ferner durch eine einfache Rechnung die Feldstärke in der Achse einer Spule von N Windungen, deren Länge l groß gegen ihren Durchmesser ist,

$$\mathfrak{H} = \frac{4\pi N i}{l} = 4\pi n i \text{ Gauß}, \tag{11}$$

wobei $n = N/l$ die Zahl von Windungen bedeutet, welche auf 1 cm der Spulenlänge l entfallen. Die Feldstärke in der Achse einer solchen Spule ist bis nahe an die Spulenenden konstant und fällt erst an den Enden ein wenig ab (vgl. den Kraftlinienverlauf bei der Drahtschleife [Abb. 257] und der Spule der Abb. 259a). Die Gl. 11 gilt auch für das Feld einer ringförmig geschlossenen Spule (Abb. 259b).

305. **Kraftwirkungen auf Stromleiter im magnetischen Felde.** Wenn ein stromdurchflossener Draht von einem magnetischen Felde umgeben ist, also auf einen Magnetpol eine Kraft ausübt, so muß nach dem dritten NEWTONschen Axiom auch ein Magnetpol oder, allgemeiner gesagt, sein magnetisches Feld eine gleich große Kraft auf einen Stromleiter ausüben. Es ist aber zu beachten, daß das dritte NEWTONsche Axiom für die Wechselwirkungen zwischen Strömen und Magnetpolen nur in seiner eigentlichen Fassung gilt, die Richtung der Kräfte aber nicht in die Verbindungslinie zwischen Stromleiter und Magnetpol fällt (§ 29). Die auf einen Magnetpol wirkende Kraft steht senkrecht zur Verbindungslinie des Poles mit dem stromführenden Draht. Ein Stromleiter, welcher zur Richtung der magnetischen Kraft senkrecht steht, sonst aber frei beweglich ist, bewegt sich senkrecht zur Richtung der Kraftlinien und zur Richtung des in ihm fließenden Stromes. Zur Ermittlung der Bewegungsrichtung kann man sich folgender Regeln bedienen:

Schwimmerregel: Man denke sich in der (positiven) Stromrichtung schwimmend, das Gesicht gegen die Richtung der magnetischen Kraftlinien gewandt. Dann erfolgt die Bewegung des Stromleiters in Richtung des ausgestreckten rechten Armes.

Linke-Hand-Regel: Man lege die linke Hand, die innere Handfläche dem Nordpol zugewandt (also entgegen der Richtung der Kraftlinien), in Richtung des (positiven) Stromes. Die Bewegung erfolgt dann in Richtung des abgespreizten Daumens.

Diese Regeln folgen aus den Regeln des § 302 durch einfache Umkehrung.

Die Wirkung eines magnetischen Feldes auf eine stromdurchflossene Drahtschleife oder Spule ergibt sich ohne weiteres dadurch, daß man sich diese Gebilde durch einen äquivalenten Scheiben- oder Stabmagneten ersetzt denkt. Die eine Seite bzw. das eine Ende wird vom Nordpol eines Magneten je nach der Stromrichtung angezogen oder abgestoßen. Eine etwa im sog. AMPÈREschen Gestell

(Abb. 269, § 312) drehbar aufgehängte stromdurchflossene Spule richtet sich, wenn sie leicht genug beweglich ist, unter der Wirkung des erdmagnetischen Feldes nach Norden.

Abb. 261 zeigt zwei von AMPÈRE angegebene Apparate, welche die vorstehenden Gesetzmäßigkeiten in einfacher Weise demonstrieren. Der Apparat 261a besteht aus einem mit Quecksilber gefüllten Gefäß, in dem sich, am einen Ende drehbar befestigt, ein Magnet M befindet. Ein Strom tritt durch den Draht S in das Quecksilber ein und unten aus ihm wieder aus. Der Nordpol N bewegt sich, längs der magnetischen Kraftlinien des Stromes kreisend, um den Draht S. Ist der Strom

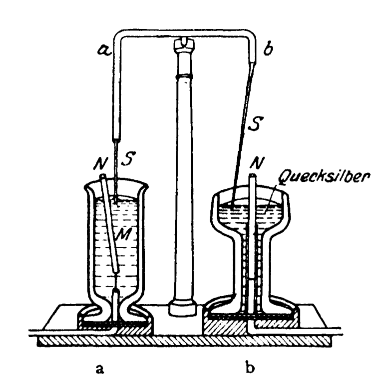


Abb. 261.
AMPÈREsche Rotationsapparate.

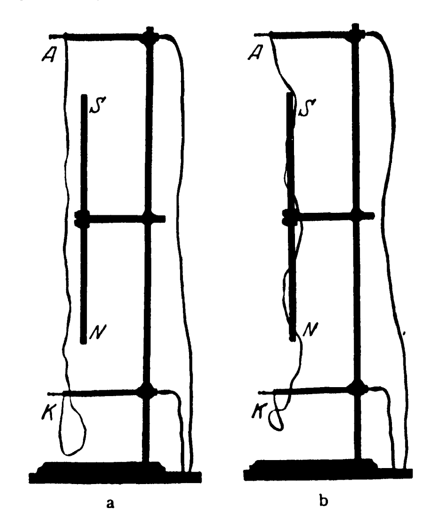


Abb. 262.
Ein Stromleiter wickelt sich um einen Magneten.
(Aus POHL, Elektrizitätslehre.)

von oben nach unten gerichtet, so bewegt sich der Nordpol, von oben gesehen, im Sinne des Uhrzeigers. Kehrt man die Stromrichtung um, so kehrt sich auch der Drehungssinn um. Der Apparat 261b enthält in dem mit Quecksilber gefüllten Gefäß einen festen Magneten, dagegen ist die Stromzuführung S drehbar. Fließt der Strom von oben nach unten, und liegt der Nordpol N oben, so erfolgt die Drehung, von oben gesehen, im Sinne des Uhrzeigers. Dieses Verhalten läßt sich ohne weiteres aus den obigen Regeln ableiten.

Die Tendenz eines beweglichen Leiters, sich senkrecht zu den magnetischen Kraftlinien zu stellen, zeigt auch der folgende Versuch (Abb. 262). Ein Teil eines Stromkreises wird durch ein biegsames Metallband AK gebildet, das lose neben einem Stabmagneten SN herabhängt. Die Kraftlinien des Magneten verlaufen vertikal. Demnach sucht sich das Metallband soweit wie möglich horizontal zu stellen, d. h. es wickelt sich um den Magneten. Kehrt man die Stromrichtung um so wickelt es sich ab und im umgekehrten Sinne wieder auf (vgl. § 306).

306. **Kraftwirkung magnetischer Felder auf bewegte Ladungsträger.** Da jeder elektrische Strom aus einzelnen bewegten Ladungsträgern besteht, so wollen wir die Kraftwirkung magnetischer Felder auf einen Strom zuerst für den Fall eines einzelnen, und zwar völlig frei im Raume beweglichen Ladungsträgers berechnen. Ein einzelner Ladungsträger (Ion, Elektron) von der Ladung ε bewege sich mit der Geschwindigkeit v. Sein magnetisches Feld hat dann nach Gl. 7b im Abstande r die Größe $\mathfrak{H} = \varepsilon v \sin(v, r)/r^2$ Gauß. Demnach wirkt auf einen einzelnen Magnetpol m an dem betreffenden Ort eine Kraft

$$k = \frac{\varepsilon v m}{r^2} \sin(v, r) \text{ dyn}. \tag{12}$$

Nach dem 3. NEWTONschen Axiom sind aber Kraft und Gegenkraft stets gleich groß. Demnach ist die Gl. 12 nicht nur ein Ausdruck für die Größe der Kraft, die der Magnetpol vom bewegten Ladungsträger her, d. h. durch sein magnetisches Feld erfährt, sondern auch für die Größe der Kraft, die der bewegte Ladungsträger vom Magnetpol her, d. h. durch dessen magnetisches Feld erfährt. Nach § 299 ist die magnetische Feldstärke im Abstande r von einem einzelnen Magnetpol $\mathfrak{H} = m/r^2$, und wir erhalten so für die Kraft, die der bewegte Ladungsträger in diesem Felde $\mathfrak{H}$ erfährt, aus Gl. 12 die Beziehung

$$k = \varepsilon v \mathfrak{H} \sin(v, \mathfrak{H}) \text{ dyn}. \quad (13)$$

Wir haben dabei $(v, \mathfrak{H})$ statt des Winkels (v, r) geschrieben, da ja im Fall eines einzelnen Magnetpols das Feld $\mathfrak{H}$ radial ist, also die gleiche Richtung wie der Radiusvektor r hat. Da nun die Quelle des magnetischen Feldes keinen Einfluß auf die Größe der Kraftwirkung desselben haben kann, so gilt die Gl. 13 allgemein in jedem beliebig erzeugten magnetischen Felde $\mathfrak{H}$. Dabei ist die Ladung ε in elektromagnetischen Einheiten gemessen.

Da die vom magnetischen Felde herrührende Kraft senkrecht zur Geschwindigkeit, also auch zur jeweiligen Bahn des bewegten Ladungsträgers steht, so erfährt die Bahn eine Krümmung. In einem homogenen Felde bewegt sich der Ladungsträger in einer Schraubenlinie, deren Achse in der Feldrichtung liegt. Die Bewegung setzt sich dann aus einer Kreisbewegung um diese Achse und aus einer gleichförmigen Bewegung parallel zur Achse zusammen. Die vom magnetischen Felde herrührende Kraft liefert die Zentripetalkraft für das Zustandekommen der Kreisbewegung (§ 37). Wir zerlegen die Geschwindigkeit in die zum Felde $\mathfrak{H}$ parallele Komponente $v \cdot \cos(v, \mathfrak{H})$ und die zu ihm senkrechte Komponente $v \cdot \sin(v, \mathfrak{H})$. Erstere wird durch das Feld nicht beeinflußt. Für die letztere gilt, wenn μ die Masse des Ladungsträgers ist,

$$\frac{\mu v^2 \sin^2(v, \mathfrak{H})}{r} = \varepsilon v \mathfrak{H} \sin(v, \mathfrak{H}) \text{ dyn}, \quad (14)$$

da die Zentrifugalkraft der Zentripetalkraft gleich ist. Der Radius der Schraubenbahn beträgt daher

$$r = \frac{\mu v \sin(v, \mathfrak{H})}{\varepsilon \mathfrak{H}} \text{ cm}. \quad (15)$$

Steht das magnetische Feld senkrecht zur Geschwindigkeit v, so ist $\sin(v, \mathfrak{H}) = 1$ und die Bahn wird ein geschlossener Kreis vom Radius

$$r = \frac{\mu v}{\varepsilon \mathfrak{H}} \text{ cm}. \quad (16)$$

Es ist besonders anzumerken, daß ein magnetisches Feld, da seine Kraftwirkung stets senkrecht zur jeweiligen Bewegungsrichtung des Ladungsträgers steht, eine Beschleunigung daher auch stets senkrecht zu dieser erfolgt, niemals eine Änderung des Betrages der Geschwindigkeit eines einzelnen frei beweglichen Ladungsträgers bewirkt, sondern nur eine Richtungsänderung.

307. **Magnetische und elektrische Ablenkung der Kathodenstrahlen.** Die in § 306 besprochenen Kraftwirkungen eines magnetischen Feldes lassen sich besonders gut an Kathodenstrahlen beobachten. Diese bestehen ja aus schnell bewegten Elektronen (§ 291), die sich frei im Raum bewegen können. Sei μ die Masse, ε die Ladung des Elektrons (elektrisches Elementarquantum, § 213), v die Geschwindigkeit der Elektronen, so wird in einem magnetischen Felde von $\mathfrak{H}$ Gauß, dessen Richtung auf der Elektronenbahn senkrecht steht, die Bahn zu einem Kreise gekrümmt, dessen Radius durch Gl. 16 gegeben ist. Je nach der Richtung des Feldes erfolgt die Krümmung nach der einen oder andern

Seite. Abb. 263 zeigt die Ablenkung eines von einem feinen Oxydfleck auf einer glühenden Kathode (§ 291) ausgehenden Kathodenstrahls, in der Mitte den unabgelenkten Strahl, rechts und links den je nach der Richtung des magnetischen Feldes nach der einen oder andern Seite abgelenkten Strahl.

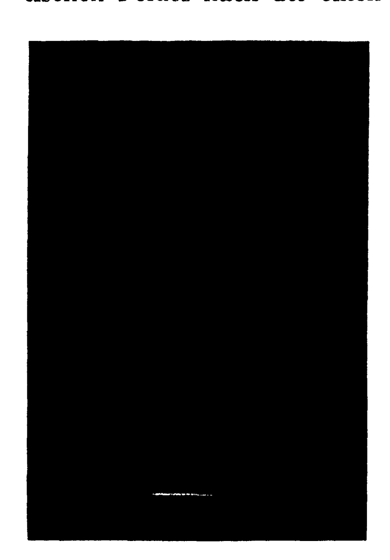


Abb. 263. Magnetische Ablenkung von Kathodenstrahlen.

Wegen seiner elektrischen Ladung unterliegt ein Elektron, wie jeder Ladungsträger, auch einer ablenkenden Wirkung in einem elektrischen Felde. Bewegt sich ein Elektron oder auch ein aus vielen Elektronen bestehender Kathodenstrahl durch einen Kondensator (Abb. 264), in dem die Feldstärke $\mathfrak{E}$ herrscht, parallel zu dessen Platten, so wird es, je nach der Richtung des Feldes nach der einen oder andern Seite aus seiner geradlinigen Bahn gebogen. Die auf das Elektron wirkende Kraft ist, wenn wir von dem hier belanglosen Vorzeichen absehen, gleich $\varepsilon\mathfrak{E} = \mu\gamma$ (γ = Beschleunigung durch das Feld, ε und $\mathfrak{E}$ beide in elektro-

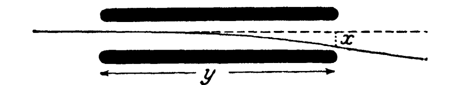


Abb. 264. Elektrische Ablenkung eines Kathodenstrahls.

statischen oder beide in elektromagnetischen Einheiten gemessen), also seine Beschleunigung $\gamma = \frac{\varepsilon}{\mu}\mathfrak{E}$. Es legt daher in der Zeit t in Richtung senkrecht zu seiner ursprünglichen Bewegung den Weg $x = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{\mu}\mathfrak{E}t^2$ zurück. Ist v seine Geschwindigkeitskomponente parallel zu den Platten, also seine ursprüngliche Geschwindigkeit, die Länge des im Felde zwischen den Kondensatorplatten zurückgelegten Weges y, so ist $t = y/v$, also $x = \varepsilon\mathfrak{E}y^2/2\mu v^2$ oder

$$\frac{\mu v^2}{\varepsilon} = \frac{\mathfrak{E} y^2}{2x}. \tag{17a}$$

(Dieser Vorgang ist der Bewegung eines wagerecht geworfenen Körpers im Schwerefeld der Erde vollkommen analog. Wie ein solcher Körper unter der Wirkung dieses Feldes in gekrümmter Bahn zu Boden fällt, so fällt das Elektron im elektrischen Felde des Kondensators in Richtung auf dessen positiv geladene Platte.) Durch Kombination der Gl. 16 und 17a kann man das Verhältnis ε/μ und die Geschwindigkeit v einzeln berechnen. Man kann also aus der Ablenkung eines Kathodenstrahls im magnetischen und elektrischen Felde diese beiden Größen ermitteln. An die Stelle der elektrischen (nicht der magnetischen) Ablenkung kann auch die Messung der vom Elektron durchlaufenen Spannung U, der er seine Geschwindigkeit v verdankt, treten. Die an ihm geleistete Arbeit beträgt εU erg (ε und U beide in elektrostatischen oder beide in elektromagnetischen Einheiten gemessen), und diese findet sich in seiner kinetischen Energie $\frac{1}{2}\mu v^2$ wieder, so daß gilt

$$\frac{1}{2}\mu v^2 = \varepsilon U \quad \text{oder} \quad \frac{\mu v^2}{\varepsilon} = 2U. \tag{17b}$$

Diese Gleichung kann Gl. 17a ersetzen, denn sie enthält wie diese als Unbekannte die Größen ε/μ und v^2.

Die Geschwindigkeit v ist natürlich von Fall zu Fall verschieden. Die Größe ε/μ hingegen ist eine für die Elektronen charakteristische Konstante. Man nennt sie die spezifische Ladung des Elektrons, weil sie die Ladung angibt, die 1 g Elektronen besitzen. Die z. Zt. besten Messungen haben ergeben

$$\frac{\varepsilon}{\mu} = 5{,}29_1 \cdot 10^{17}\,\text{el. stat. Einh./g} = 1{,}76_0 \cdot 10^8\,\text{Coulomb/g}.$$

In Verbindung mit dem Betrage der Ladung des Elektrons (§ 213) ergibt sich daraus die Masse μ des Elektrons zu $9{,}04\,10^{-28}$ g, d. i. 1843 mal kleiner als die des Wasserstoffatoms. Das Atomgewicht (§ 96) des Elektrons beträgt demnach $\frac{1{,}0078}{1843} = 5{,}47 \cdot 10^{-4}$. (Vgl. hierzu § 492 und 537.)

Auf die hier beschriebene Weise kann man durch elektrische und magnetische Ablenkung auch die spezifische Ladung anderer schnell bewegter Ladungsträger, insbesondere der Kanalstrahlen (§ 292) und der α- und β-Strahlen der radioaktiven Stoffe (§ 519) bestimmen.

Die magnetische Ablenkung der Kathodenstrahlen kann man mit einem geeigneten Entladungsrohr und einem starken Magneten ohne weiteres an der Veränderung des Entladungsbildes erkennen. Um die elektrische Ablenkung nachzuweisen, muß man im Innern des Entladungsrohrs zwei Kondensatorplatten anbringen, an die eine ausreichend hohe Spannung gelegt wird, und zwischen denen der Kathodenstrahl hindurchpassiert. Am besten macht man die Ablenkung sichtbar, wenn man am Ende des Rohrs einen Schirm a mit einer fluoreszierenden Substanz anbringt (BRAUNsche Röhre, Abb. 265) und ein möglichst feines Bündel von Kathodenstrahlen verwendet. Dieses erzeugt auf dem Schirm einen feinen leuchtenden Fleck, an dessen Verschiebung man die Ablenkung erkennen und ihre Größe messen kann. Die BRAUNsche Röhre kann zur Analyse des zeitlichen Verlaufs von Strom und Spannung bei Wechselströmen und auch bei schnelleren Schwingungen dienen. Zur Analyse des Stroms läßt man diesen durch eine nahe an das Rohr, senkrecht zur Kathodenstrahlbahn, gestellte Spule $\mathfrak{F}$ von kleinem Widerstand gehen, deren Magnetfeld das Kathodenstrahlbündel ablenkt. Dieses folgt jeder, auch der schnellsten Änderung des Magnetfeldes. Der Lichtfleck erscheint bei schnellen Änderungen in eine Lichtlinie auseinandergezogen. Betrachtet man diese in einem rotierenden Spiegel, so sieht man eine Kurve, die das zeitliche Nacheinander in räumlichem Nebeneinander, also die Stromstärke als Funktion der Zeit, darstellt. Zur Spannungsmessung kann man entweder die elektrische Ablenkung benutzen, indem man die zu messende Spannung an die Platten eines im Rohr befindlichen Kondensators legt, oder man legt die Spannung an die Enden einer Spule $\mathfrak{F}$ von großem Widerstand und verfährt sonst wie bei der Strommessung. Der große Vorzug der BRAUNschen Röhre gegenüber andern dem gleichen Zweck dienenden Instrumenten (Oszillographen) ist der, daß die Kathodenstrahlen wegen der sehr kleinen Masse der Elektronen praktisch trägheitslos sind.

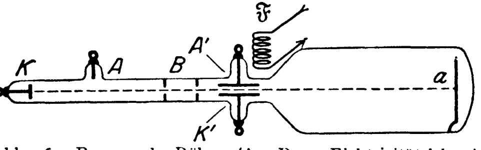


Abb. 265. BRAUNsche Röhre. (Aus POHL Elektrizitätslehre.)

Elektronenstrahlen, welche nahezu axial das Feld einer flachen Spule passieren, erfahren dabei Ablenkungen, welche denen eines Lichtstrahls in einer Linse weitgehend entsprechen. Ein solches Feld kann also als „Linse" für Elektronenstrahlen dienen, und man kann mit seiner Hilfe die Oberfläche eines Elektronen

aussendenden Körpers abbilden, wenn man die Elektronenstrahlen auf einen Fluoreszenzschirm fallen läßt, genau wie man mit einer Linse eine Licht aussendende Fläche abbilden kann. Bei Verwendung zweier Spulen als „Linsen" kann man beträchtliche Vergrößerungen erzielen (sog. Elektronenmikroskop). Die Abbildungsgesetze entsprechen formal durchaus denjenigen bei einer optischen Abbildung mit einer Linse (§ 415). Bild- und Gegenstandsentfernung stehen mit einer Größe, die man als die Brennweite der „Linse" bezeichnen kann, im gleichen Zusammenhange, wie beim Licht. Diese Brennweite ist von der magnetischen Feldstärke abhängig, kann also kontinuierlich variiert werden.

308. **Kraftwirkung elektrischer Felder auf bewegte Magnetpole.** Wir haben in § 306, Gl. 12, die Größe m/r^2 als das magnetische Feld $\mathfrak{H}$ eines ruhenden Magnetpols m betrachtet und auf diese Weise die Kraftwirkung eines magnetischen Feldes auf eine bewegte Ladung berechnet (Gl. 13). Wir können aber ebensogut in Gl. 12 die Größe ε/r^2 herausgreifen, welche nichts anderes ist, als das elektrische Feld $\mathfrak{E}$, welches die bewegte Ladung ε im Abstande r, also am Ort des Magnetpols, hervorruft, und statt Gl. 12 schreiben

$$k = m v \mathfrak{E} \sin (v, r) \text{ dyn.}$$

Man beachte, daß die Gl. 12 ursprünglich die Kraft bedeutet, die der Magnetpol m im magnetischen Felde der bewegten Ladung ε erfährt. Wir wollen jetzt die naheliegende und im übrigen durch die Relativitätstheorie bestätigte Voraussetzung machen, daß es für die zwischen dem Magnetpol und der Ladung wirkende Kraft nichts ausmacht, ob die Ladung sich bewegt und der Pol ruht oder ob der Pol sich bewegt und die Ladung ruht (Abb. 266a und b). Im letzteren Fall aber erhält die obige Gleichung eine neue Bedeutung. $\mathfrak{E}$ ist nunmehr das elektrostatische Feld der ruhenden Ladung ε am Ort des Magnetpols m, und unsere Gleichung sagt aus, daß ein bewegter Magnetpol in einem elektrischen Felde eine Kraft erfährt. Er wird aus seiner Bewegungsrichtung abgelenkt, und zwar steht die Richtung dieser Kraft, ebenso wie bei einer bewegten Ladung, senkrecht auf der durch die Feldrichtung und die Bewegungsrichtung gebildeten Ebene. Überhaupt entsprechen sich die Ablenkung bewegter Ladungen im magnetischen Feld und die Ablenkung von Magnetpolen im elektrischen Feld vollkommen, und die obige Gleichung geht aus der für eine im magnetischen Felde bewegte Ladung gültigen Gl. 13 (§ 306) einfach dadurch hervor, daß man ε durch m und $\mathfrak{H}$ durch $\mathfrak{E}$ ersetzt.

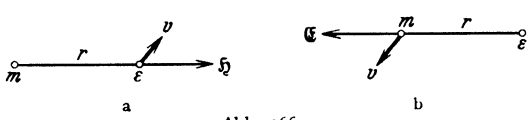


Abb. 266.
a bewegte Ladung im Felde eines ruhenden Magnetpols,
b bewegter Magnetpol im Felde einer ruhenden Ladung.

309. **Kraftwirkungen magnetischer Felder auf Ströme.** Nachdem wir in § 306 die Kraftwirkung eines magnetischen Feldes auf einen einzelnen bewegten Ladungsträger betrachtet haben, gehen wir jetzt auf die Gesamtheit der bewegten Ladungsträger über, die sich in einem Element von der Länge dl eines von einem Strom i durchflossenen Leiters vom Durchschnitt q befinden, indem wir in § 306 an Stelle von ε die gesamte im Element dl bewegte Ladung $n \varepsilon q dl$ setzen (n = Zahl der Elektronen im ccm), und $n \varepsilon q v = i$, der Stromstärke im Element dl, setzen (§ 245, Gl. 4). Wir erhalten dann aus Gl. 13, § 306, die auf ein vom Strome i durchflossenes Längenelement dl eines Leiters im magnetischen Felde $\mathfrak{H}$ wirkende Kraft,

$$dk = i\, dl\, \mathfrak{H} \sin (i, \mathfrak{H}) \text{ dyn.} \tag{18}$$

Dabei haben wir den Winkel $(v, \mathfrak{H})$ durch $(i, \mathfrak{H})$ ersetzt, da die Richtung des Stromes i ja mit der Bewegungsrichtung der einzelnen Ladungsträger überein-

stimmt. Die Kraft dk steht senkrecht zur Stromrichtung und ist proportional der zur Stromrichtung senkrechten Komponente $\mathfrak{H} \sin(i, \mathfrak{H})$ der Feldstärke $\mathfrak{H}$. Die Gesamtwirkung auf ein endliches Leiterstück findet man durch Integration der Gl. 18. Dabei ist zu beachten, daß sich für einen geschlossenen Stromkreis in einem homogenen Felde nicht eine resultierende Einzelkraft, sondern ein Kräftepaar ergibt. D. h. es tritt dann an dem Leiter ein Drehmoment auf (§ 310).

Die in § 306 besprochene Tendenz der einzelnen bewegten Ladungsträger, sich im magnetischen Felde auf einer Schraubenlinie um die Richtung der magnetischen Kraftlinien zu bewegen, ist auch bei den Ladungsträgern in einem stromdurchflossenen Leiter vorhanden und führt bei dem in Abb. 262 dargestellten Versuch zu der spiraligen Aufwicklung des Leiters um den Magneten.

310. Das magnetische Moment von Kreisströmen. Wie § 303 erwähnt, ist ein geschlossener Stromkreis einem Magneten äquivalent, eine lange Spule einem Stabmagneten, ein flacher, nur aus einer oder wenigen Windungen bestehender Stromkreis einer magnetisierten Scheibe. Wie jeder Magnet, so hat demnach auch ein solcher Stromkreis ein magnetisches Moment (§ 339). Abb. 267 stellt eine rechteckige Stromschleife dar, deren Seitenlängen l_1 und l_2 cm seien. Die Fläche der Schleife liege in der Richtung des homogenen magnetischen Feldes $\mathfrak{H}$, und die Seiten l_1 seien zum Felde senkrecht, die Seiten l_2 zu ihm parallel. Dann wirkt eine Kraft nur auf die ersteren, und zwar nach Gl. 18 auf jede die Kraft $k = i l_1 \mathfrak{H}$ dyn. Die beiden Kräfte sind entgegengesetzt gerichtet, weil der Strom die beiden Seiten in entgegengesetztem Sinne durchfließt. Daher wirkt auf den Leiter ein Drehmoment (§ 31) von der Größe

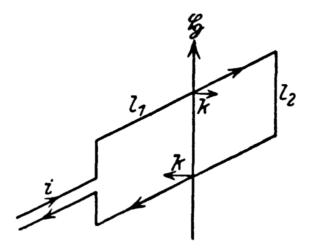


Abb. 267. Zur Ableitung des magnetischen Moments einer Stromschleife.

$$N = k l_2 = i l_1 l_2 \mathfrak{H} = \mathfrak{M} \mathfrak{H} \text{ dyn} \cdot \text{cm}.$$

Durch Vergleich mit Gl. 5, § 300 (mit $\varphi = 90^0$), erkennt man, daß die durch vorstehende Gleichung definierte Größe $\mathfrak{M}$ die gleiche Bedeutung hat wie das magnetische Moment eines Magneten. Sie stellt also das magnetische Moment des Stromkreises dar. Da $l_1 l_2 = F$ die Fläche des Stromkreises ist, so ist

$$\mathfrak{M} = iF. \tag{19a}$$

Diese Gleichung gilt allgemein, nicht nur für den vorliegenden speziellen Fall eines Rechteckes. Für eine kreisförmige Stromschleife ist daher

$$\mathfrak{M} = \pi r^2 i. \tag{19b}$$

Die Gl. 19a läßt sich auch auf folgende Weise ableiten. Wir betrachten eine lange Spule von N Windungen, dem Querschnitt F und der Länge l, die vom Strome i durchflossen werde. Dann treten aus ihrem Ende nach Gl. 11, § 304, $F\mathfrak{H} = 4\pi N i F/l$ Kraftlinien aus. Die „Polstärke" der Spule ist daher nach § 299 $m = N i F/l$, und das magnetische Moment der Spule nach Gl. 1, § 297, $\mathfrak{M} = ml = N i F$. Auf jede einzelne der N Windungen entfällt daher das magnetische Moment iF.

Auch ein einzelner, auf einer Kreisbahn vom Radius r umlaufender Ladungsträger stellt einen Kreisstrom dar. Seine Ladung sei ε, seine Umlaufsfrequenz $\omega = 2\pi\nu$. Dann passiert der Ladungsträger irgendeinen Querschnitt seiner Strombahn in 1 sec ν mal, und seine Bewegung bildet einen Strom von der Stärke $i = \varepsilon\nu = \varepsilon\omega/2\pi$. Demnach ist das magnetische Moment eines solchen elementaren Kreisstromes

$$\mathfrak{M} = \pi r^2 \cdot \frac{\varepsilon\omega}{2\pi} = \frac{1}{2} \varepsilon \omega r^2. \tag{20}$$

Kreisströme dieser Art und ihre magnetischen Momente spielen eine wichtige Rolle in der Theorie der Atome.

311. Die Versuche von ROWLAND, RÖNTGEN und EICHENWALD. Das magnetische Feld einer bewegten Ladung hängt nur von der Bewegung der Ladung ab, aber nicht davon, auf welche Weise diese Bewegung zustande kommt. Bisher haben wir nur die magnetischen Felder von Ladungen betrachtet, die sich entweder ganz frei oder innerhalb eines ruhenden Leiters bewegen und auf diese Weise einen Strom bilden. Man muß aber ebenso erwarten, daß ein elektrischer Ladungsüberschuß, der sich an einem festen Ort innerhalb eines beliebigen Körpers befindet, eine magnetische Wirkung ausübt, wenn er mitsamt diesem Körper bewegt wird. Daß dies zutrifft, und daß die Größe der magnetischen Wirkung der Theorie entspricht, ist durch Versuche, unter denen in erster Linie diejenigen von ROWLAND, RÖNTGEN und EICHENWALD zu nennen sind, bewiesen worden. Abb. 268 gibt das Schema eines solchen Versuchs, und zwar des ROWLANDschen in der Ausführungsform von EICHENWALD. Am Rande einer auf einer Achse montierten Hartgummischeibe D befindet sich ein Stanniolbelag, der mittels Schleifbürsten und eines Schleifringes W auf eine Spannung U gegen Erde aufgeladen werden kann. ABC ist ein geerdeter Metallkasten, der mit dem Stanniolbelag einen Kondensator der Kapazität C bildet. Infolgedessen entsteht auf dem Belag eine Ladung $e = UC$, und auf je 1 cm des Umfanges der Scheibe, deren Radius r sei, entfällt die Ladung $UC/2\pi r$. Ist v die Umfangsgeschwindigkeit der Scheibe, so entspricht die bewegte Ladung einem Strome von der Stärke $i = v\,UC/2\pi r$. Die magnetische Wirkung dieses Stromes wird mit Hilfe eines sog. Magnetometers M gemessen, d. h. einer an einem Faden drehbar aufgehängten Magnetnadel, die in ihrer natürlichen Ruhelage mit der rotierenden Scheibe in gleicher Ebene liegt, und die durch das auf dieser Ebene senkrecht stehende Magnetfeld des Stromes i in die dazu senkrechte Richtung abgelenkt wird, wie die Magnetnadel beim ÖRSTEDschen Versuch durch den Strom in einem Draht.

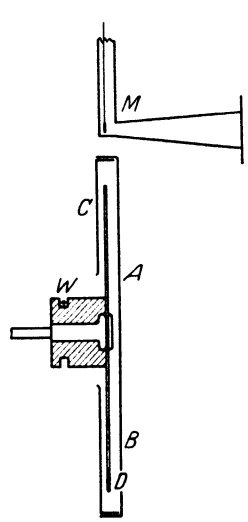


Abb. 268. Der ROWLANDsche Versuch in der Anordnung von EICHENWALD.

Bei weiteren Versuchen bestand die rotierende Scheibe aus einem Dielektrikum, das sich zwischen den Platten eines geladenen Kondensators befand, und dessen beide Flächen daher infolge dielektrischer Polarisation (§ 234) entgegengesetzt gleiche Ladungen trugen. Die durch die Bewegung dieser beiden Ladungen dargestellten Ströme haben zwar gleiche Größe und entgegengesetzte Richtung. Ist aber das Dielektrikum hinreichend dick, so macht sich seitlich neben der Scheibe doch die Differenz ihrer magnetischen Wirkungen bemerkbar. Auch hier haben die Versuche Übereinstimmung mit der Theorie ergeben.

Eine mit der sie tragenden Materie bewegte Ladung hat also die gleiche magnetische Wirkung wie eine mit gleicher Geschwindigkeit durch die Materie bewegte Ladung von gleicher Größe und Geschwindigkeit. Man bezeichnet solche Ströme als Konvektionsströme.

312. Kraftwirkungen zwischen Strömen. Da jeder elektrische Strom Träger eines magnetischen Feldes ist, welches imstande ist, eine Kraftwirkung auf einen andern Strom auszuüben, so kann man auch von der Kraftwirkung zwischen Strömen sprechen, wenngleich diese auch erst durch das begleitende magnetische

Feld vermittelt wird. Um dieser Betrachtungsweise auch formal zu entsprechen, müssen wir nur in Gl. 18, § 309, das magnetische Feld $\mathfrak{H}$ durch den erzeugenden Strom ausdrücken. Das Gesetz kann wieder nur in Differentialform allgemein ausgesprochen werden. Wir betrachten ein Leiterelement von der Länge dl_1, in dem ein Strom i_1 fließt, und ein dazu beliebig orientiertes zweites Leiterelement dl_2, in dem ein Strom i_2 fließt. Das magnetische Feld, welches das letztere Element am Ort des ersten erzeugt, ist nach Gl. 8, § 304, proportional $i_2 dl_2/r^2$, wenn r der Abstand der beiden Elemente voneinander ist. Die Kraft, welche das erste Element in diesem Felde erfährt, ist nach Gl. 18, § 309, proportional zu $i_1 dl_1$. Im übrigen enthalten die genannten Gleichungen nur Faktoren, die von der räumlichen Richtung beider Elemente abhängen. Demnach ist die zwischen den beiden Elementen wirkende Kraft proportional zu $i_1 dl_1 i_2 dl_2/r^2$. Das genaue Gesetz (Ampère 1825), dessen Ableitung hier zu weit führen würde, lautet

$$dk = -\frac{i_1 dl_1\, i_2 dl_2}{r^2}\left(\cos(i_1, i_2) - \frac{3}{2}\cos(i_1, r)\cdot\cos(i_2, r)\right). \qquad (21)$$

Dabei bedeuten (i_1, r) und (i_2, r) die Winkel, die die beiden Stromelemente mit der sie verbindenden Geraden r bilden, und (i_1, i_2) ist der Winkel, den die beiden Stromrichtungen unter sich bilden. Wir betrachten die beiden einfachen Fälle, in denen i_1 und i_2 einander parallel sind, also $(i_1, i_2) = 0^0$, bzw. 180^0, ist. Sind die Ströme auch gleichgerichtet, so ist $(i_1, r) = (i_2, r)$, und es folgt

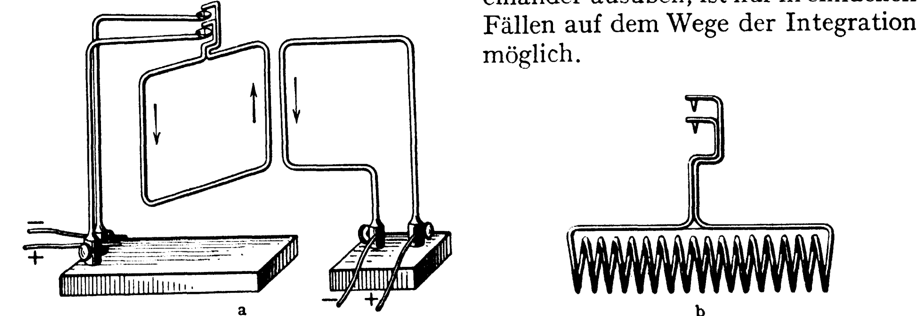
$$dk = -\frac{i_1 dl_1\, i_2 dl_2}{r^2}\left(1 - \frac{3}{2}\cos^2(i_1, r)\right)\ \text{dyn},$$

wobei das negative Vorzeichen einer Anziehung entspricht. Sind die Ströme einander entgegengesetzt gerichtet, so ergibt sich

$$dk = +\frac{i_1 dl_1\, i_2 dl_2}{r^2}\left(1 - \frac{3}{2}\cos^2(i_1, r)\right)\ \text{dyn}$$

mit positivem Vorzeichen, weil sich die Stromelemente jetzt abstoßen.

Die Berechnung der Gesamtkraft, die zwei geschlossene Stromleiter aufeinander ausüben, ist nur in einfachen Fällen auf dem Wege der Integration möglich.



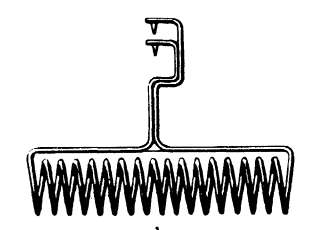


Abb. 269. Anziehung und Abstoßung von Strömen.

Allgemein gelten folgende Sätze: Parallele und gleichgerichtete Ströme ziehen sich an, parallele und entgegengesetzt gerichtete Ströme stoßen sich ab. Frei bewegliche Stromleiter suchen sich so einzustellen, daß die Ströme in ihnen parallel und gleichgerichtet verlaufen. Zum Nachweis kann man sich des in Abb. 269 dargestellten Apparates bedienen, bei denen der eine Stromleiter, dessen Enden in Quecksilbernäpfe tauchen, drehbar ist. In dem in der Abbildung dargestellten Falle stoßen sich die einander benachbarten Teile der beiden Stromkreise ab. Den gleichen Nachweis kann man mit zwei

flachen parallelen Spulen liefern, von denen die eine an zwei Fäden aufgehängt ist, die andere ihr fest gegenübersteht. Sind die Ströme in ihnen gleichgerichtet, so ziehen sie sich an, sind sie entgegengesetzt gerichtet, so stoßen sie sich ab. In diesem Falle ist das Vorzeichen der Wirkung besonders leicht zu verstehen. Bei gleichgerichteten Strömen sind die beiden Spulen zwei im Raume gleich orientierten Scheibenmagneten (§ 303) äquivalent, die sich also ungleichnamige Pole zukehren, demnach anziehen. Bei entgegengesetzten Strömen kehren sie sich gleichnamige Pole zu und stoßen sich ab.

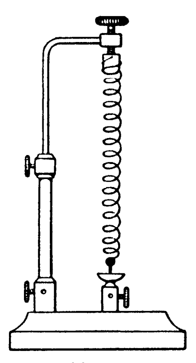


Abb. 270. Zur Anziehung paralleler Ströme.

Abb. 270 stellt eine Drahtspirale dar, welche mit ihrem unteren Ende in Quecksilber taucht. Schickt man durch sie einen Strom, so ziehen sich die parallelen Ströme in ihren Windungen an, die Spirale verkürzt sich, die Verbindung mit der unteren Stromzuführung durch das Quecksilber wird unterbrochen. Sobald der Strom zu fließen aufgehört hat, verlängert sich aber die Spirale wieder, taucht erneut in das Quecksilber, und so erfolgt ein taktmäßiges Schließen und Öffnen des Stromes.

Bei großer Stromstärke, wie sie z. B. in elektrischen Maschinen und Transformatoren auftreten können, sind die Kräfte, die zwischen den einzelnen Teilen von Spulen (Wicklungen) auftreten, sehr erheblich. Benachbarte Windungen, in denen parallele Ströme fließen, ziehen sich mit großer Kraft an, und es muß dafür gesorgt werden, daß die Isolation diesem Druck standhält. Die einander diametral gegenüberliegenden Teile jeder Windung führen entgegengesetzt gerichtete Ströme und stoßen sich ab. Daher besteht bei extrem großer Stromstärke die Gefahr, daß die Wicklung auseinandergesprengt wird.

313. **Das elektromagnetische Maßsystem.** Es ist bereits in § 304 gesagt worden, daß die Fortlassung der Konstanten $1/c$ in der Gl. 7b (historisch korrekter gesagt im LAPLACEschen Gesetz, Gl. 8) die Einführung eines neuen Maßsystems, des elektromagnetischen Maßsystems, und damit neuer Maßeinheiten, der elektromagnetischen Einheiten, bedingt. Und nicht nur dies. Die elektrischen Größen haben im elektromagnetischen Maßsystem auch eine andere Dimension, als im elektrostatischen System (§ 241).

Zur Ableitung dieser Dimensionen gehen wir zweckmäßig vom AMPÈREschen Gesetz, Gl. 21, § 312, aus. Da sich auf der rechten Seite dieser Gleichung die vorkommenden Längen dimensionsmäßig aufheben, sieht man sofort, daß das Produkt zweier Stromstärken, also auch das Quadrat einer Stromstärke, die Dimension einer Kraft haben muß. Es gilt also die Dimensionsgleichung $|i| = |\sqrt{k}| = |m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{1}{2}} t^{-1}|$. Die Dimension einer Elektrizitätsmenge e ergibt sich wegen $i = de/dt$ (§ 244) zu $|e| = |i \cdot t| = |m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{1}{2}}|$. Das Produkt Ue aus einer Spannung und einer Ladung ist nach § 219 eine Arbeit, so daß $|Ue| = |ml^2t^{-2}|$ und die Dimension der Spannung $|U| = |m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{3}{2}} t^{-2}|$. Und schließlich folgt aus dem OHMschen Gesetz für den Widerstand $|R| = |U/i| = |lt^{-1}|$. In Tabelle 25 sind diese Beziehungen noch einmal übersichtlich zusammengestellt.

Tabelle 25. Dimensionen im elektromagnetischen Maßsystem.

Stromstärke	$|i| = |m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{1}{2}} t^{-1}|$,
Elektrizitätsmenge	$|e| = |m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{1}{2}}|$,
Spannung	$|U| = |m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{3}{2}} t^{-2}|$,
Widerstand.	$|R| = |lt^{-1}|$,
Kapazität	$|C| = |l^{-1} t^2|$.

Es sei e_s eine bestimmte Elektrizitätsmenge elektrostatisch gemessen, e_m die gleiche Elektrizitätsmenge elektromagnetisch gemessen. Dann ist nach § 304 $e_s = c \cdot e_m$, wobei die Maßzahl der Konstanten c gleich $3 \cdot 10^{10}$ ist. Daß ihre Dimension gleich der einer Geschwindigkeit, $|lt^{-1}|$ ist, ergibt sich leicht durch Vergleich der Dimensionen der Elektrizitätsmenge in beiden Maßsystemen (vgl. § 241). Da in jedem Falle die Stromstärke als Elektrizitätsmenge/Zeiteinheit definiert ist, so stehen die Maßzahlen der Stromstärke in beiden Maßsystemen im gleichen Verhältnis wie diejenigen der Elektrizitätsmenge, $i_s = c i_m$. Die elektromagnetische Einheit der Stromstärke ist demnach im elektromagnetischen Maßsystem $3 \cdot 10^{10}$mal größer als die elektrostatische Einheit. Auf Grund der zwischen den verschiedenen elektrischen Größen bestehenden Beziehungen lassen sich entsprechende Umrechnungen auch für die übrigen elektrischen Größen anstellen. Es ergibt sich auf diese Weise:

$$i_s = c\, i_m, \quad e_s = c\, e_m, \quad U_s = U_m/c, \quad \mathfrak{E}_s = \mathfrak{E}_m/c^2, \quad R_s = R_m/c^2, \quad C_s = C_m\, c^2.$$

Hiernach und mit Hilfe der Tabelle 20, § 241, kann man leicht die elektromagnetischen Einheiten in die praktischen Einheiten umrechnen (Tabelle 26).

Tabelle 26. Es ist die elektromagnetische Einheit:

der Stromstärke	$= 10$ Ampere,
der Elektrizitätsmenge	$= 10$ Coulomb,
der Spannung	$= 10^{-8}$ Volt,
des Widerstandes	$= 10^{-9}$ Ohm,
der Kapazität	$= 10^{9}$ Farad.

Die Konstante $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec, meist als Lichtgeschwindigkeit bezeichnet, wird in ihrer Eigenschaft als elektrische Größe oft auch die kritische Geschwindigkeit genannt. In der Tat ist sie primär eine elektrische oder richtiger elektromagnetische Größe (§ 327). Daß sie bei der Fortpflanzung des Lichtes eine Rolle spielt, rührt daher, daß das Licht ein elektromagnetischer Vorgang ist. Die Übereinstimmung der kritischen Geschwindigkeit mit der Lichtgeschwindigkeit wurde 1843 von Wilh. Weber erkannt.

314. **Die absoluten und die internationalen Einheiten.** Die Einheiten des praktischen elektrischen Maßsystems (Coulomb, Ampere, Volt, Ohm usw.) sind ursprünglich aus den Einheiten des elektromagnetischen Maßsystems abgeleitet, und zwar auf Grund der in Tabelle 26, § 313, niedergelegten Beziehungen. Die Einheiten des elektromagnetischen Maßsystems lassen sich prinzipiell auf Grund der zwischen den einzelnen elektrischen und gewissen mechanischen Größen bestehenden Beziehungen und Gesetzmäßigkeiten experimentell ermitteln. So kann man z. B. die elektromagnetische Einheit der Stromstärke prinzipiell auf Grund eines Versuches über die Anziehung oder Abstoßung zweier gleich starker Ströme (§ 312) ermitteln, und damit ist die Einheit der Elektrizitätsmenge auch ohne weiteres gegeben. Die Einheit der Spannung ist dann durch die Leistung eines Stromes von bekannter Stärke zu bestimmen (§ 260), die Einheit des Widerstandes durch einen Versuch nach dem Ohmschen Gesetz usw. Die von den so bestimmt gedachten elektromagnetischen Einheiten auf Grund der Tabelle 26 abgeleiteten praktischen Einheiten nennt man die absoluten elektrischen Einheiten.

Die gedachten Messungen, insbesondere die Bestimmung des absoluten Ampere, die die Grundlage für die Bestimmung der andern absoluten Einheiten bildet, sind nur mit großen Hilfsmitteln mit einer für die Bedürfnisse des öffentlichen Lebens ausreichenden Genauigkeit auszuführen. Bei der großen wirtschaftlichen Bedeutung der elektrischen Einheiten sind diese in allen Kulturstaaten auf Grund internationaler Vereinbarungen gesetzlich festgelegt. Hierzu

können aber Definitionen, die an die obigen Messungen anknüpfen, ihrer schwierigen Ausführung wegen nicht herangezogen werden. So ist es z. B. praktisch nicht durchführbar, wenn man die Stromstärken, mittels derer man eine sehr genaue Eichung eines Strommessers durchführen will, jeweils durch eine Messung nach dem AMPÈREschen Gesetz bestimmen wollte. Aus diesem Grunde ist das Ampere und das Ohm gesetzlich durch Meßvorschriften definiert, die ohne allzu großen experimentellen Aufwand zu erfüllen sind. Die Einheit der Spannung ergibt sich dann aus dem OHMschen Gesetz. Die so definierten Einheiten heißen die gesetzlichen oder internationalen Einheiten. Natürlich sind die Bestimmungen über das Ampere und das Ohm so gehalten, daß sie den absoluten Einheiten von Strom und Widerstand nach dem Stande der Meßtechnik zur Zeit der Gesetzgebung möglichst genau entsprachen.

Das Deutsche Reichsgesetz über die elektrischen Einheiten vom 1. Juni 1898 lautet:

1. „Die gesetzlichen Einheiten für elektrische Messungen sind das Ohm, das Ampere und das Volt.“

2. „Das Ohm ist die Einheit des elektrischen Widerstandes. Es wird dargestellt durch den Widerstand einer Quecksilbersäule von der Temperatur des schmelzenden Eises, deren Länge bei durchweg gleichem, einem Quadratmillimeter gleich zu achtenden Querschnitt 106,3 cm und deren Masse 14,4521 g beträgt.“

3. „Das Ampere ist die Einheit der elektrischen Stromstärke. Es wird dargestellt durch den unveränderlichen elektrischen Strom, welcher bei dem Durchgange durch eine wässerige Lösung von Silbernitrat in einer Sekunde 0,001118 g Silber niederschlägt.“

4. „Das Volt ist die Einheit der elektromotorischen Kraft. Es wird dargestellt durch die elektromotorische Kraft, welche in einem Leiter, dessen Widerstand 1 Ohm beträgt, einen elektrischen Strom von 1 Ampere erzeugt.“

Es folgen weitere Bestimmungen über die Einheiten der Elektrizitätsmenge, der elektrischen Leistung und Arbeit, der Kapazität und Induktion.

Mit dem Fortschritt der Meßtechnik hat sich ergeben, daß das internationale Ohm vom absoluten Ohm ein wenig abweicht. Es ist 1 int. Ohm = 1,0005 abs. Ohm. Hingegen entspricht das internationale Ampere dem absoluten Ampere auf 5 Stellen genau. Da das internationale Volt durch Ziff. 4 des Gesetzes auf das Ampere und das Ohm bezogen ist, so ist auf Grund des OHMschen Gesetzes 1 int. Volt = 1,0005 abs. Volt. Zu Ziff. 3 des Gesetzes vgl. § 269.

315. Elektrische Messung der Lichtgeschwindigkeit. Die Lichtgeschwindigkeit (kritische Geschwindigkeit) c kann aus rein elektrischen Messungen ermittelt werden. Es genügt dazu, daß man die Maßzahl der gleichen elektrischen Größe einmal im elektrostatischen, dann im elektromagnetischen Maßsystem bestimmt. Man kann dann c aus einer der in § 313 gegebenen Umrechnungsgleichungen berechnen. Eine der verwandten Methoden benutzt die Beziehung $C_s = c^2 C_m$. Man verwendet dazu einen Kondensator (Kugel-, Zylinder- oder Plattenkondensator), dessen Kapazität man aus seinen Dimensionen im elektrostatischen Maß genau berechnen kann und erhält so C_s. Dann wird die Kapazität des gleichen Kondensators, z. B. nach der MAXWELLschen Methode (§ 253), gemessen, und man erhält seine Kapazität nunmehr, da sie ja aus derjenigen eines in internationalen Ohm geeichten Widerstandes berechnet wird, in internationalen Farad. Dieser Wert ist wegen des kleinen Unterschiedes zwischen dem internationalen und dem absoluten Ohm in absolute Farad zu korrigieren. Hieraus erhält man dann die Kapazität C_m im elektromagnetischen Maßsystem durch Multiplikation mit 10^9 gemäß Tabelle 26, § 313. Dann ist $c = \sqrt{C_s/C_m}$.

Die besten Messungen dieser Art haben $c = 2{,}9978 \cdot 10^{10}$ cm/sec ergeben, in ausgezeichneter Übereinstimmung mit dem zuverlässigsten auf optischem Wege gewonnenen Wert $c = 2{,}9979_6 \cdot 10^{10}$ cm/sec (§ 399).

316. Magnetische Spannung. Magnetisches Potential. In Analogie zur elektrischen Spannung ist die magnetische Spannung M zwischen zwei Punkten eines magnetischen Feldes definiert als die Arbeit, die zu leisten ist, um einen magnetischen Einheitspol von dem einen nach dem andern Punkt zu befördern. Für einen Pol von der Stärke m ist also hierzu die Arbeit

$$A = m \cdot M \text{ erg} \tag{22}$$

erforderlich. Da aber auf den Pol m im Felde $\mathfrak{H}$ die Kraft $k = m\mathfrak{H}$ wirkt, so ist diese Arbeit, wenn ds die einzelnen Elemente des zurückgelegten Weges bedeuten und $\mathfrak{H}_s$ die Komponente des Feldes in Richtung von ds ist, $A = -m\int_1^2 \mathfrak{H}_s\, ds$. (Das negative Vorzeichen rührt daher, daß ja positive Arbeit zu leisten ist, wenn ein positiver Pol gegen die Feldrichtung bewegt wird.) Es folgt also, ganz analog zu Gl. 6 (§ 219), als magnetische Spannung zwischen den Punkten A und B

$$M = -\int_A^B \mathfrak{H}_s\, ds \text{ Gauß} \cdot \text{cm}. \tag{23}$$

Wir betrachten einen geraden Draht, in dem ein Strom i fließt, und denken uns einen Magnetpol m einmal auf einem Kreise vom Radius r um den Draht herumgeführt. Die Feldstärke längs dieses Kreises beträgt nach Gl. 10, § 304, $\mathfrak{H} = 2i/r$, der vom Pol zurückgelegte Weg ist $2\pi r$. Es wird daher bei dieser Bewegung die Arbeit

$$A = \pm \frac{2i}{r} \cdot 2\pi r \cdot m = \pm 4\pi m i \text{ erg} \tag{24}$$

geleistet, + oder —, je nachdem, ob der Pol in der einen oder andern Richtung herumgeführt wird. Bei $n$facher Umführung beträgt die Arbeit $A = \pm n \cdot 4\pi m i$. Die Größe dieser Arbeit ist also vom Radius des Kreises unabhängig, und sie ist überhaupt vom Wege unabhängig, denn man kann sich jeden beliebigen Weg aus unendlich kleinen Wegstücken zusammengesetzt denken, die entweder Teile von Kreisen um den Draht sind oder radial verlaufen. Arbeit wird aber nur auf den ersteren Anteilen geleistet. Auch von der geometrischen Form des Leiters ist die Arbeit unabhängig.

Aus dieser Überlegung folgt aber, daß die magnetische Spannung zwischen zwei Punkten im magnetischen Felde eines Stromes keine eindeutig bestimmte Größe ist. Sie ist davon abhängig, ob der Weg, längs dessen die Spannung gemessen wird, den Strom nicht oder ein oder mehrere Male umfaßt. Es sei M_0 die magnetische Spannung zwischen zwei Punkten, gemessen auf einem beliebigen Wege, der den Strom i nicht umfaßt, dann ist bei $n$facher Umfassung des Stromes die magnetische Spannung

$$M = M_0 \pm 4\pi i \cdot n. \tag{25}$$

(Vorzeichen je nach der Umlaufsrichtung).

Die Vieldeutigkeit der magnetischen Spannung ist eine Folge der Tatsache, daß die magnetischen Kraftlinien stets in sich geschlossen sind. Man sieht das am leichtesten, wenn man bedenkt, daß man die Überführung eines Magnetpols von einem Ort des Feldes nach einem andern an einem beliebigen Punkte unterbrechen und hier einen ein- oder mehrmaligen Umlauf längs der durch diesen Punkt gehenden Kraftlinie einlegen und dann den Weg zum Endpunkte fortsetzen kann. Es braucht aber dieser zusätzliche Weg auch nicht längs einer Kraftlinie zu verlaufen. Er muß nur den das Feld erzeugenden Strom ein oder mehrere Male umfassen. (Bei den magnetischen Feldern permanenter Magnete spielt

die Vieldeutigkeit der magnetischen Spannung keine praktische Rolle, da es dort nicht möglich ist, die das Feld erzeugenden molekularen Kreisströme [§ 338] zu umfassen.)

Als magnetisches Potential in einem Punkt eines magnetischen Feldes definiert man, analog zum elektrischen Potential, die magnetische Spannung, die dieser Punkt gegen einen andern Punkt besitzt, dem man das Potential 0 zuschreibt. Infolge der Vieldeutigkeit der magnetischen Spannung ist auch das Potential im magnetischen Felde eines Stromes vieldeutig gemäß Gl. 25. Man kann es jedoch eindeutig machen, wenn man durch Festsetzung einer „Sperrfläche" das Umfassen der vorhandenen Ströme verhindert. So kann man z. B. bei einer einfachen Stromschleife vorschreiben, daß die von der Schleife eingeschlossene Fläche nicht passiert werden darf. Bei den Feldern permanenter Magnete ist die Eindeutigkeit des Potentials durch die Undurchdringlichkeit des Materials der Magnete von selbst erreicht.

Eine Methode zur Messung magnetischer Spannungen s. § 331.

317. **Elektromagnetische Induktion.** Wird einem geschlossenen Leiterkreise, in den ein Galvanometer eingeschaltet ist, der eine Pol eines Magneten genähert (Abb. 271), so erkennt man an einem Ausschlag des Galvanometers,



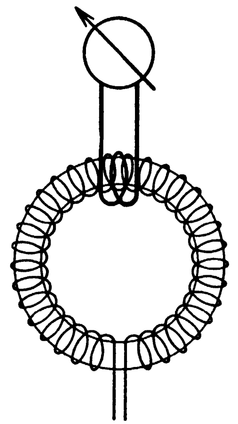
Abb. 271. Induktion im Felde eines Magneten. Abb 272. Induktion im Felde einer Spule.

daß während der Dauer der Bewegung im Kreise ein elektrischer Strom fließt. Entfernt man den Magnetpol wieder, so fließt ein Strom von umgekehrter Richtung. Genau die gleichen Erscheinungen treten ein, wenn man den Leiterkreis relativ zum Magnetpol bewegt. Auch kann man sich statt eines Magneten einer stromdurchflossenen Spule bedienen (Abb. 272), deren Enden ja den Polen eines Stabmagneten magnetisch äquivalent sind (§ 341).

Diese von FARADAY im Jahre 1831 entdeckte Erscheinung heißt elektromagnetische Induktion oder auch kurz Induktion, ein infolge von Induktion auftretender Strom ein Induktionsstrom. Da in einem Leiterkreise, in dem Induktion stattfindet und in dem sich keine Stromquelle der uns bisher bekannten Art befindet, doch ein Strom fließt, so beweist dies, daß wir einen solchen Leiterkreis als den Sitz einer elektromotorischen Kraft von uns bisher unbekannter Art, einer induzierten elektromotorischen Kraft, anzusehen haben.

Bei der Bewegung eines Magnetpols relativ zu einem Leiterkreise tritt am Ort des letzteren nichts anderes ein, als eine zeitliche Änderung des magnetischen Feldes. Diese zeitliche Änderung ist also offenbar für das Auftreten einer induzierten elektromotorischen Kraft verantwortlich. Dementsprechend ist es bei Benutzung der in Abb. 272 dargestellten Vorrichtung gar nicht nötig, Spule und Leiterkreis relativ zueinander zu bewegen. Eine Induktionswirkung tritt im Leiterkreise auch dann auf, wenn er selbst und die Spule ruhen, aber die Stromstärke und damit das magnetische Feld der Spule in ihrem Betrage verändert oder in ihrer Richtung umgekehrt wird. Verstärken des Stromes wirkt wie Annähern der Spule, Schwächen wie Entfernen. Beim Einschalten des Stromes ist der Ausschlag des Galvanometers ebenso groß, aber entgegengesetzt gerichtet, wie beim Ausschalten, beim Kommutieren ist der Ausschlag doppelt so groß wie beim einfachen Ein- und Ausschalten.

Bei den bisher besprochenen Induktionsversuchen lag stets der Fall vor, daß sich der Leiterkreis, in dem Induktion stattfindet, im Bereiche des zeitlich veränderlichen magnetischen Feldes befindet. Denn von dem Magnetpol und von der stromdurchflossenen Spule gehen magnetische Kraftlinien aus, die den ganzen umgebenden Raum erfüllen. Nunmehr wollen wir einen Fall kennenlernen, bei dem sich dieser Leiterkreis in einem Gebiet befindet, das nach unserer bisherigen Kenntnis frei von magnetischen Feldern ist. In Abb. 273 ist eine ringförmig geschlossene Spule dargestellt, in der ein zeitlich veränderlicher Strom fließe. Das Feld innerhalb dieser Spule können wir nach Gl. 11, § 304, berechnen. Es ist auch zeitlich veränderlich, wie der Strom in der Spule. Nach unserer bisherigen Kenntnis ist der Außenraum der Spule feldfrei (§ 303). Aber auch in diesem Falle tritt bei jeder Änderung der Stärke oder Richtung des in der Spule fließenden Stromes in einer außen um die Ringspule gelegten Induktionsspule ein Induktionsstrom auf. Es sieht zunächst so aus, als liege hier eine Fernwirkung des zeitlich veränderlichen magnetischen Feldes vor. Das dies nicht der Fall ist, werden wir in § 327 sehen.


Abb. 273. Induktion durch eine ringförmig geschlossene Spule.

Mit den besprochenen Fällen ist die Zahl der verschiedenen Arten von Induktion noch nicht erschöpft. Induktion findet auch statt, wenn sich die Größe der von einem Leiterkreis umrandeten Fläche ändert, während sich dieser in einem zeitlich konstanten magnetischen Felde befindet, oder wenn der Leiterkreis in einem solchen Felde gedreht wird. Wir werden diese beiden Fälle in § 319 genauer diskutieren.

318. **Das FARADAYsche Induktionsgesetz.** Die Fülle der in § 317 aufgezählten Induktionserscheinungen scheint zunächst verwirrend. Trotzdem kann ihre Gesamtheit durch ein einfaches Gesetz, das FARADAYsche Induktionsgesetz, ausgedrückt werden. Wir betonen dabei noch einmal ausdrücklich, daß sich alle Vorgänge im Vakuum abspielen sollen (vgl. die Vorbemerkung zu Kap. 25, sowie § 357). Es sei $\mathfrak{H}$ die jeweils herrschende magnetische Feldstärke, F die von dem Leiterkreis, in dem Induktion stattfindet, umrandete Fläche, dF ein Element dieser Fläche, $(dF, \mathfrak{H})$ der Winkel, den die am Ort von dF herrschende Feldstärke mit dF bildet. Dabei ist unter F die Windungsfläche des Leiterkreises zu verstehen. Besteht der Leiterkreis aus n Windungen, so ist F n mal so groß, als wenn er nur aus einer Windung besteht. Dann ist die im Leiterkreis induzierte elektromotorische Kraft

$$E = \frac{d}{dt}\int \mathfrak{H} \sin(dF, \mathfrak{H})\, dF \text{ el. magn. Einh.} \qquad (26a)$$

Dabei ist das Integral über den ganzen Bereich der Fläche F zu erstrecken. Der Betrag der Größe

$$\Phi = \int \mathfrak{H} \sin(dF, \mathfrak{H})\, dF \quad \text{Gauß} \cdot \text{cm}^2 \qquad (27)$$

ist, wie man leicht sieht, gleich der Zahl der Kraftlinien des Feldes $\mathfrak{H}$, die durch die Fläche F hindurchtreten. Unter der Voraussetzung, daß sich alle Vorgänge im Vakuum (bzw. in Luft) abspielen, ist Φ der sog. magnetische Kraftfluß, der durch die Fläche F hindurchtritt. Wir können deshalb statt Gl. 26a auch schreiben

$$E = \frac{d\Phi}{dt} \text{ el. magn. Einheiten,} \qquad (26b)$$

und das Induktionsgesetz in der einfachen Form aussprechen: Die **induzierte elektromotorische Kraft ist gleich der zeitlichen Änderung des magnetischen Kraftflusses durch die Windungsfläche des Leiterkreises.** Eine solche zeitliche Änderung des Kraftflusses tritt in der Tat bei allen in § 317 beschriebenen Versuchen ein.

Wir wollen aus der Gl. 26a einige Spezialfälle ableiten.

1. Ein ebener Leiterkreis befinde sich in einem zeitlich konstanten, homogenen Felde $\mathfrak{H}$, d. h. $\mathfrak{H}$ hat in der ganzen Fläche F gleiche Größe und gleiche Richtung, und $\sin(dF, \mathfrak{H})$ hat überall den gleichen Wert $\sin(F, \mathfrak{H})$. Dann folgt aus Gl. 26a

$$E = \mathfrak{H} \sin(F, \mathfrak{H}) \frac{dF}{dt} \text{ el. magn. Einh.} \tag{28a}$$

Es ist dies der Fall, daß sich ein Leiterkreis in einem zeitlich konstanten, homogenen magnetischen Felde befindet und daß sich die Größe seiner Windungsfläche zeitlich ändert.

2. Ein ebener Leiterkreis drehe sich in einem homogenen, zeitlich konstanten Felde $\mathfrak{H}$. Dann ist lediglich $\sin(dF, \mathfrak{H}) = \sin(F, \mathfrak{H})$ zeitlich veränderlich, und es folgt

$$E = F \mathfrak{H} \frac{d}{dt} \sin(F, \mathfrak{H}) \text{ el. magn. Einh.} \tag{28b}$$

3. Ein ebener Leiterkreis befinde sich in einem zeitlich veränderlichen, homogenen Felde $\mathfrak{H}$. Dann folgt entsprechend

$$E = F \sin(F, \mathfrak{H}) \frac{d\mathfrak{H}}{dt} \text{ el. magn. Einh.} \tag{28c}$$

Da die induzierte elektromotorische Kraft von der Größe der Windungsfläche F abhängt, so ist es zur Erzielung kräftiger Induktionswirkungen zweckmäßig, eine aus vielen Windungen bestehende Spule als Induktionsspule zu verwenden. Abb. 274 zeigt eine entsprechende Vorrichtung. Die Spule A ist die Trägerin des induzierenden magnetischen Feldes, B die Induktionsspule. Man erhält Induktion in B bei Nähern oder Entfernen der Spule A oder beim Verstärken oder Schwächen des in A fließenden Stromes.

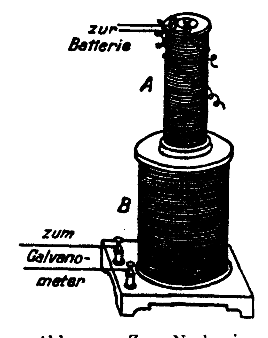


Abb. 274. Zum Nachweis der Induktionserscheinungen.

Bei der Ableitung der Gl. 28a und b haben wir die stillschweigende Voraussetzung gemacht, daß der unter der Wirkung der induzierten elektromotorischen Kraft E fließende Induktionsstrom nicht selbst Ursache eines zeitlich veränderlichen magnetischen Feldes von merklicher Stärke ist. Denn dann würde dieses Feld zum Felde $\mathfrak{H}$ hinzukommen, und das Gesamtfeld wäre nicht mehr zeitlich konstant. Es muß also entweder dF/dt bzw. $d \sin(F, \mathfrak{H})/dt$ zeitlich konstant sein, oder der Widerstand des Leiterkreises muß so groß sein, daß der Induktionsstrom schwach und sein magnetisches Feld gegenüber dem Felde $\mathfrak{H}$ zu vernachlässigen ist. Unter dieser Voraussetzung wollen wir nunmehr wenigstens einen Teil der Induktionserscheinungen auf uns bereits bekannte Erscheinungen zurückführen. (Die Rückwirkungen des eigenen Feldes des Induktionsstromes auf diesen selbst fallen unter den Begriff **Selbstinduktion**, § 333).

319. Induktion in bewegten Leitern und Leiterteilen im konstanten, homogenen magnetischen Feld.

1. **Fall.** Wir betrachten ein rechteckiges Drahtsystem (Abb. 275), dessen eine Seite, der „Läufer", mittels Gleitkontakten längs der beiden angrenzenden

Seiten verschoben werden kann. Die Länge des Läufers sei l, die jeweilige Länge der beiden angrenzenden Seiten sei x. Am Ort des Leitersystems herrsche ein zur Leiterfläche senkrechtes, konstantes und homogenes magnetisches Feld $\mathfrak{H}$. Wir bewegen jetzt den Läufer mit der Geschwindigkeit v nach rechts. In dem Läufer befinden sich, wie in jedem Leiter, frei bewegliche Ladungsträger, in diesem Fall Elektronen. Diese nehmen an der Bewegung des Läufers teil, haben also auch die Geschwindigkeit v. Infolge dieser Bewegung bewirkt aber nach Gl. 13, § 306 [mit $\sin(v, \mathfrak{H}) = 1$] auf jedes Elektron die Kraft

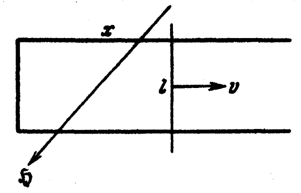


Abb. 275. Induktion in bewegten Leiterteilen.

$$k = \varepsilon v \mathfrak{H} \text{ dyn},$$

und zwar senkrecht zur Feldrichtung und zur Geschwindigkeit v, also in Richtung des Läufers. Die Kraft k setzt die Elektronen im Läufer in Bewegung und leistet bei der Überführung jedes Elektrons über die Länge l des Läufers die Arbeit

$$A = kl = \varepsilon v l \mathfrak{H} \text{ erg}.$$

Nun ist aber die an einer Ladung ε geleistete Arbeit gleich dem Produkt $E\varepsilon$ aus der herrschenden elektromotorischen Kraft E und der Größe ε der Ladung. Es besteht demnach in dem Leitersystem eine elektromotorische Kraft von der Größe

$$E = l v \mathfrak{H} \text{ el. magn. Einh.}$$

Das Auftreten dieser elektromotorischen Kraft ist eine Folge der Bewegung des Läufers im magnetischen Felde. Setzen wir noch $v = dx/dt$ und bedenken wir, daß $lx = F$ die jeweilige vom Leitersystem umschlossene Fläche ist, so ist $lv = l \cdot dx/dt = dF/dt$, und wir können schreiben

$$E = \mathfrak{H} \frac{dF}{dt} \text{ el. magn. Einh.} \tag{29}$$

Es handelt sich hier um einen Sonderfall der Gl. 28a (§ 318), bei dem der $\sin(F, \mathfrak{H}) = 1$ ist. Die Gl. 28a ist damit für diesen Fall aus dem Laplaceschen Gesetz (§ 304) bewiesen.

2. Fall. Wie betrachten ein rechteckiges Drahtsystem mit den Seiten a und b (Abb. 276), das sich in einem zeitlich konstanten, homogenen magnetischen Felde $\mathfrak{H}$ befindet, und das um eine Achse AA' drehbar ist, die dem Seitenpaar b des Rechtecks parallel ist, die Seiten a halbiert und senkrecht auf der Feldrichtung steht. Der jeweilige Winkel, den die Fläche $F = ab$ des Rechtecks mit der Feldrichtung bildet, sei $(F, \mathfrak{H}) = \varphi$. Dreht sich das Rechteck mit der Winkelgeschwindigkeit $d\varphi/dt$, so ist die Geschwindigkeit der Seiten b gleich $a/2 \cdot d\varphi/dt$, so daß nach § 304 auf jedes in diesen Seiten befindliche Elektron die Kraft $k = \varepsilon \frac{a}{2} \frac{d\varphi}{dt} \mathfrak{H} \sin(\mathfrak{v}, \mathfrak{H})$ dyn wirkt oder da $\sin(v, \mathfrak{H}) = \cos(F, \mathfrak{H}) = \cos\varphi$,

Abb. 276. Induktion in einem rotierenden Leitersystem.

$$k = \varepsilon \frac{a}{2} \frac{d\varphi}{dt} \mathfrak{H} \cos\varphi = \varepsilon \frac{a}{2} \mathfrak{H} \frac{d \sin\varphi}{dt} \text{ dyn}.$$

Durch die gleiche Überlegung, die wir zum 1. Fall angestellt haben, und indem wir berücksichtigen, daß der Induktionsvorgang in den beiden Seiten b stattfindet, ergibt sich die an der Ladung ε geleistete Arbeit zu

$$A = \varepsilon \cdot ab \cdot \mathfrak{H} \frac{d \sin\varphi}{dt} = \varepsilon F \mathfrak{H} \cdot \frac{d \sin(F, \mathfrak{H})}{dt} \text{ erg}$$

und die induzierte elektromotorische Kraft zu

$$E = F\mathfrak{H}\frac{d\sin(F,\mathfrak{H})}{dt} \text{ el. magn. Einh.} \tag{30}$$

Wie man sieht, ist dies mit der Gl. 28b (§ 318) identisch.

320. Unipolare Induktion. In allen bisher betrachteten Induktionsfällen haben wir unter der Fläche F die vom Leiterkreis umrandete Fläche, unter dF/dt die zeitliche Änderung der Größe dieser Fläche verstanden. Es gibt jedoch eine Induktionserscheinung, bei der zwar auch das FARADAYsche Induktionsgesetz gilt, die Größe dF/dt jedoch anders zu deuten ist. Wir knüpfen an den Fall 1, § 319, Abb. 275, an, denken uns aber das Drahtrechteck um 90° gedreht, so daß seine Fläche senkrecht zur Zeichnungsebene steht. Den Läufer ersetzen wird durch ein in der Zeichnungsebene liegendes Blech, das zwischen Gleitkontakten in dieser Ebene verschoben werden kann (Abb. 277). Senkrecht zur Zeichnungsebene herrsche ein konstantes magnetisches Feld $\mathfrak{H}$. Es besteht also, da die Fläche des Leiterkreises nicht von Kraftlinien durchsetzt wird [$\sin(F, \mathfrak{H}) = 0$], kein Kraftfluß durch diese Fläche. Wird jetzt das Blech mit der Geschwindigkeit v in seiner eigenen Ebene bewegt, so unterscheidet sich dieser Fall prinzipiell in keiner Weise von dem früher behandelten Fall des bewegten Läufers, und die gleichen Überlegungen wie in § 319 führen auch hier zu der Gl. 29. Nur bedeutet hier dF/dt nicht die Änderung der vom Leiterkreis umrandeten Fläche, sondern dF ist das Stück der Fläche des bewegten Blechs, das in der Zeit dt an den Gleitkontakten vorbeistreicht. Man bezeichnet diesen Sonderfall als unipolare Induktion (ein Beispiel s. § 334).

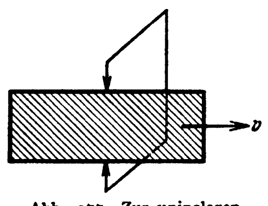


Abb. 277. Zur unipolaren Induktion.

321. Induktion in bewegten Leitern im zeitlich konstanten, inhomogenen magnetischen Felde. Ein kreisförmig geschlossener Drahtring vom Radius r liege so im Felde eines einzelnen Magnetpols m, daß seine Achse auf den Pol hin gerichtet sei (Abb. 278). Wir haben es jetzt mit einem zwar zeitlich konstanten, aber inhomogenen Felde zu tun, dessen Stärke und Richtung also von Ort zu Ort variiert. Die Koordinate des Kreismittelpunktes, gemessen vom Magnetpol ab auf der in der Achse liegenden Geraden, sei x. Wir wollen voraussetzen, daß x sehr groß gegen den Kreisradius sei, so daß der Öffnungswinkel des durch den Ring hindurchtretenden Bündels von Kraftlinien sehr klein ist.

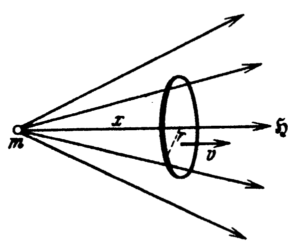


Abb. 278. Induktion bei Bewegung im inhomogenen magnetischen Felde.

Der Ring werde in Richtung seiner Achse mit der Geschwindigkeit $v = dx/dt$ bewegt, so daß wieder auf jedes in ihm befindliche Elektron die Kraft $k = \varepsilon v\mathfrak{H}\sin(v,\mathfrak{H}) = \varepsilon v\mathfrak{H}\sin(v,r)$ dyn wirkt. Die an jedem Elektron bei einem vollen Umlauf um den Ring geleistete Arbeit beträgt demnach $A = 2\pi r\varepsilon v\,\mathfrak{H}\sin(v,r)$ erg, und die im Ring induzierte elektromotorische Kraft E ist, analog zu den bei den vorhergehenden Fällen angestellten Überlegungen,

$$E = 2\pi r v\mathfrak{H}\sin(v,r) \text{ el. magn. Einh.} \tag{31}$$

Wir wollen jetzt zeigen, daß der Betrag von E gleich dem Betrage der zeitlichen Änderung des Kraftflusses Φ, also gleich dem Betrage von $d\Phi/dt$ ist, wie es das Induktionsgesetz verlangt. Zur Berechnung des Kraftflusses Φ durch den Ring können wir jede beliebige Fläche verwenden, die durch den Ring begrenzt wird. Im vorliegenden Falle ist hierzu die mit dem Radius $\varrho = \sqrt{x^2 + r^2}$

um m als Zentrum beschriebene Kugelkalotte am besten geeignet, weil in ihr überall die gleiche Feldstärke $\mathfrak{H} = m/\varrho^2$ herrscht. Die Fläche der Kalotte beträgt $F = 2\pi\varrho^2[1 - \cos(v, r)]$, und demnach ist $\Phi = F\mathfrak{H} = 2\pi\varrho^2\mathfrak{H}[1 - \cos(v, r)] = 2\pi m[1 - \cos(v, r)]$. Nun ist $\cos(v, r) = x/\sqrt{x^2 + r^2}$ und $d\cos(v, r)/dt = dx/dt \cdot r^2/(x^2 + r^2)^{\frac{3}{2}} = v r^2/\varrho^3$. Es folgt

$$\frac{d\Phi}{dt} = -2\pi m \frac{d\cos(v, r)}{dt} = -2\pi m \frac{v r^2}{\varrho^3} = -2\pi r v \mathfrak{H} \cdot \frac{r}{\varrho}$$
$$= -2\pi r v \mathfrak{H} \sin(v, r) \text{ el. magn. Einh.}$$

Das ist, vom Vorzeichen abgesehen, in Übereinstimmung mit Gl. 31. (Über das Vorzeichen, d. h. die Richtung der induzierten elektromotorischen Kraft, s. § 329).

Die Gl. 31 gilt, wie man leicht zeigen kann, nicht nur für kreisförmige, sondern für beliebig geformte Leitersysteme.

322. Induktion in ruhenden Leitern im zeitlich veränderlichen magnetischen Felde. Die von uns in den §§ 319 bis 321 betrachteten Induktionserscheinungen bezogen sich sämtlich auf solche Fälle, in denen sich ein Leiterkreis oder Teile eines solchen in einem zeitlich konstanten, homogenen oder inhomogenen Felde bewegten. Wir haben aber in § 317 gesehen, daß Induktion auch eintritt, wenn sich ein Leiterkreis in einem zeitlich veränderlichen magnetischen Felde in Ruhe befindet. Es ist dort bereits gesagt worden, daß eine Bewegung eines Magnetpols gegenüber einem Leiterkreis in diesem die gleiche Wirkung hervorruft wie eine entsprechende Bewegung des Leiterkreises gegenüber dem Magnetpol. Es kommt also nur auf die relative Bewegung der beiden an, eine Tatsache, die auch aus dem Relativitätsprinzip (Kap. 36) abgeleitet werden kann. Wir schließen daraus, daß die Gl. 31 nicht nur dann gilt, wenn, wie in § 321 angenommen, der Leiterkreis im Magnetfelde bewegt wird, sondern auch dann, wenn der Magnetpol gegenüber dem ruhenden Leiterkreis bewegt wird. An die Stelle eines Magnetpols können wir uns als Ursache des magnetischen Feldes auch eine stromdurchflossene Spule gesetzt denken, die wir gegenüber einem ruhenden Leiterkreis bewegen. Auch dann kann das Auftreten einer Induktionswirkung, genau wie bei der Bewegung eines Magnetpols aus dem Laplaceschen Gesetz hergeleitet werden. In diesen Fällen liegt dann eine zeitliche Änderung des magnetischen Feldes innerhalb der von dem ruhenden Leiterkreis umrandeten Fläche vor, d. h. es handelt sich um den Anteil $d\mathfrak{H}/dt$ in der zeitlichen Änderung $d\Phi/dt$ des Kraftflusses. Wir können nun aber noch einen Schritt weiter gehen, indem wir diese zeitliche Änderung nicht dadurch eintreten lassen, daß wir eine stromdurchflossene Spule und einen Leiterkreis relativ zueinander bewegen, sondern indem wir beide an ihrem Ort lassen und die Stromstärke in der Spule und damit die magnetische Feldstärke verändern. Hier stehen wir vor einer ganz neuen Tatsache, die wir nicht mehr aus dem Laplaceschen Gesetz herleiten können. Wir sehen also, daß das Induktionsgesetz für diejenigen Fälle, bei denen es sich um eine relative Bewegung von Leitern oder Leiterteilen gegenüber einem magnetischen Felde bzw. dem Träger eines solchen handelt, aus dem Laplaceschen Gesetz abgeleitet werden kann, daß es aber in seiner Geltung über diesen Bereich hinausgeht. Wir werden hierauf in § 324 zurückkommen.

323. Induktion im offenen Kreis. Bisher haben wir nur den Fall betrachtet, daß eine Induktion in einem geschlossenen Leitersystem stattfindet, in dem dann unter der Wirkung der induzierten elektromotorischen Kraft ein Induktionsstrom fließen kann. Es findet aber Induktion auch in offenen Kreisen statt. In Abb. 279 ist eine Drahtschleife dargestellt, die durch einen eingeschalteten Kondensator unterbrochen ist. Nähert man z. B. der Schleife den einen Pol eines Magneten, so tritt auch hier selbstverständlich eine Kraftwirkung auf

die einzelnen Elektronen im Draht, also eine elektromotorische Kraft auf. Es fließt ein Induktionsstrom, und das hat zur Folge, daß der Kondensator sich aufzuladen beginnt. Das dauert so lange, bis die Spannung zwischen den Platten des Kondensators ebenso groß, aber entgegengesetzt gerichtet ist wie die induzierte elektromotorische Kraft. Dann hört der Induktionsstrom auf zu fließen, aber der Kondensator behält seine Spannung, solange die zeitliche Änderung des magnetischen Feldes konstant bleibt. Hört diese auf, so entlädt sich der Kondensator wieder, und es fließt ein Strom von umgekehrter Richtung.

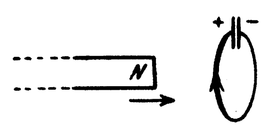


Abb. 279. Induktion im offenen Kreis.

324. Überblick über die Induktionserscheinungen. Die Tatsache, daß das FARADAYsche Induktionsgesetz die Gesamtheit der Induktionserscheinungen deckt, darf nicht darüber hinwegtäuschen, daß es zwei grundsätzlich verschiedene Typen von Induktionserscheinungen gibt.

1. Ein Leiterkreis oder Teile eines solchen bewegen sich in geeigneter Weise in einem zeitlich konstanten, homogenen oder inhomogenen magnetischen Felde. Diesen Typus konnten wir in den §§ 320 und 321 ohne zusätzliche Annahmen auf Grund des LAPLACEschen Gesetzes erklären.

2. Ein ruhender Leiterkreis wird von den Kraftlinien eines zeitlich veränderlichen magnetischen Feldes durchsetzt. Wenn wir auch das Eintreten von Induktionswirkungen in einem Spezialfall dieser Art im Anschluß an die Erscheinungen des 1. Typus plausibel machen konnten (§ 321), so ist doch eine allgemeine Zurückführung dieser Erscheinungen auf bisher bekannte Tatsachen nicht möglich. Hier liegt eine ganz neue physikalische Tatsache vor. Am deutlichsten wird dies an Hand des in Abb. 273 (§ 317) dargestellten Versuchs mit der ringförmig geschlossenen Spule. Die primäre Ursache der Induktion in einer um die Ringspule gelegten Drahtschleife ist die zeitliche Veränderung der Stromstärke in der Ringspule und das von diesem Strom erzeugte zeitlich veränderliche magnetische Feld. Dieses aber erstreckt sich lediglich über den Innenraum der Ringspule. In den Außenraum, in dem sich die Drahtschleife befindet, treten keine Kraftlinien dieses Feldes. Trotzdem erfolgt in diesem Raumbereich eine Induktionswirkung, in Übereinstimmung mit dem FARADAYschen Induktionsgesetz. Denn dieses verlangt für das Auftreten einer induzierten elektromotorischen Kraft lediglich eine Änderung des magnetischen Kraftflusses durch die vom Leiter umrandete Fläche und läßt dabei auch den Fall zu, daß sich der Leiter selbst in einem feldfreien Raum befindet.

Wir sehen also, daß die Wirkung eines zeitlich veränderlichen magnetischen Feldes nicht auf den Raum beschränkt ist, in dem dieses Feld besteht, sondern sich auch auf benachbarte Raumbereiche erstreckt. Damit stehen wir vor einer fundamental wichtigen Erkenntnis.

325. Das elektromagnetische Feld. Wenn wir von dem Auftreten einer induzierten elektromotorischen Kraft sprechen, so ist das nur ein anderer Ausdruck für die Tatsache, daß bei der Induktion auf die elektrischen Ladungsträger eine Kraft wirkt. Als Ursache solcher Beschleunigungen kennen wir bereits das elektrische Feld (§ 218). Nach dem Grundsatz, daß wir aus der gleichen Wirkung auch auf die gleiche Ursache zu schließen haben, folgt, daß bei der Induktion in dem betroffenen Leiter ein induziertes elektrisches Feld auftritt. Dieses elektrische Feld unterscheidet sich aber in einem wesentlichen Punkte von den uns bisher bekannten elektrischen Feldern, den elektrostati-

schen Feldern von Ladungen. Die Kraftlinien dieser Felder beginnen auf einer positiven und endigen auf einer negativen Ladung, sind also nicht geschlossen und haben Anfang und Ende. In einem Leiterkreis jedoch, in dem eine induzierte elektromotorische Kraft besteht, haben die elektrischen Kraftlinien weder Anfang noch Ende, sie laufen in sich selbst zurück. Die Kraftlinien eines induzierten elektrischen Feldes sind ringförmig geschlossen, und zwar umschlingen sie die Kraftlinien des zeitlich veränderlichen magnetischen Feldes. Aus dieser Tatsache hat MAXWELL den folgenden allgemeinen Schluß gezogen:

Die Kraftlinien eines zeitlich veränderlichen magnetischen Feldes sind stets von geschlossenen elektrischen Kraftlinien ringförmig umgeben.

Diese Behauptung gilt ganz allgemein, nicht nur in dem Fall, daß ein Leiterkreis vorhanden ist, in dem wir das Auftreten des Feldes am Fließen eines Induktionsstromes nachweisen können. Die elektrischen Kraftlinien sind stets vorhanden, auch in Dielektrika und im leeren Raum. Damit ist jetzt auch der Induktionsversuch mit der Ringspule (Abb. 273) verständlich gemacht. Das zeitlich veränderliche magnetische Feld des Spulenstroms selbst ist zwar auf das Spuleninnere beschränkt, aber der Außenraum ist trotzdem nicht feldfrei. Er ist erfüllt von den elektrischen Kraftlinien, die das zeitlich veränderliche magnetische Feld ringförmig umgeben, und diese elektrischen Kraftlinien sind die unmittelbare Ursache für die Induktionswirkung im Außenraum.

Nach MAXWELL besteht nun zwischen zeitlich veränderlichen elektrischen und magnetischen Feldern ein vollkommener Parallelismus. In Umkehrung des obigen Satzes gilt auch der folgende:

Die Kraftlinien eines zeitlich veränderlichen elektrischen Feldes sind stets von geschlossenen magnetischen Kraftlinien ringförmig umgeben.

Betrachten wir einen zeitlich veränderlichen elektrischen Strom mit seinem zeitlich veränderlichen magnetischen Feld und den geschlossenen elektrischen Kraftlinien, die dessen Kraftlinien umschlingen, so wird in der Regel auch dieses induzierte elektrische Feld zeitlich veränderlich sein, also selbst wieder zum Auftreten neuer zeitlich veränderlicher magnetischer Felder Veranlassung geben usw. Der zeitlich veränderliche Strom erzeugt also in seiner Umgebung ein zeitlich veränderliches elektrisches und magnetisches Feld, ein elektromagnetisches Feld, dessen elektrische und magnetische Komponenten in einer gegenseitigen Wechselwirkung stehen (§ 359).

326. Verschiebungsströme. Wir betrachten einen Kondensator, der die die Ladung e trägt und dessen Platten über einen Widerstand verbunden werden (Abb. 280). Dann tritt zweierlei ein: Der Kondensator entlädt sich über den Widerstand, in dem also ein Strom fließt, den wir als Leitungsstrom i_l bezeichnen wollen, und es tritt eine zeitliche Änderung der Feldstärke $\mathfrak{E}$ im Kondensator ein. Der Leitungsstrom i_l ist nicht geschlossen, sondern hat Anfang und Ende auf den beiden Platten des Kondensators. Gemäß der Definition der Stromstärke (§ 244) ist $i_l = de/dt$, und da bei einem Plattenkondensator von der Fläche F $e = \frac{F\varepsilon}{4\pi}\mathfrak{E}$ (§ 230), so ist $i_l = \frac{F\varepsilon}{4\pi}\, d\mathfrak{E}/dt$ el. stat. Einh., wenn das den Kondensator erfüllende Medium die Dielektrizitätskonstante ε hat.

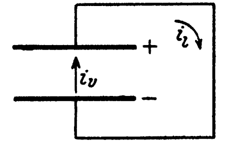


Abb. 280. Zur Einführung des Begriffs Verschiebungsstrom.

Mit der Entladung des Kondensators sind aber zweitens magnetische Wirkungen verbunden. Nicht nur ist der Leitungsstrom i_l Träger eines magnetischen

Feldes, dessen Kraftlinien den Leiter ringförmig umschließen, sondern auch die elektrischen Kraftlinien des zeitlich veränderlichen Feldes im Kondensator sind von magnetischen Kraftlinien ringförmig umgeben. Der Kondensator bildet also, trotz der Unterbrechung des Leitungsstromes i_l, keine Unterbrechung des Feldes der ringförmigen magnetischen Kraftlinien. Es setzt sich auch durch den vom Kondensator eingenommenen Raum hindurch fort. Das zeitlich veränderliche elektrische Feld hat also eine Wirkung, die derjenigen des Leitungsstromes ganz analog ist. Diese Tatsache veranlaßte MAXWELL, den Begriff des elektrischen Stromes zu erweitern, indem er den Begriff des Verschiebungsstromes einführte. Danach soll es ungeschlossene Ströme überhaupt nicht geben, und der an den Kondensatorplatten beginnende und endigende Leitungsstrom i_l soll im Innern des Kondensators durch einen ihm an Stärke gleichen Verschiebungsstrom i_v fortgesetzt gedacht werden. Nach dem oben Gesagten ist demnach

$$i_v = i_l = \frac{F \varepsilon}{4\pi} \frac{d\mathfrak{E}}{dt} \text{ el. stat. Einh.} \qquad (41\text{a})$$

Der Verschiebungsstrom im Kondensator ist also der zeitlichen Änderung der elektrischen Feldstärke im Kondensator proportional. Er ist um so größer, je schneller diese Änderung erfolgt. Der Begriff des Verschiebungsstromes ist jedoch nicht auf den Kondensator beschränkt, sondern findet in allen Fällen Anwendung, wo ein zeitlich veränderliches elektrisches Feld besteht, also auch dann, wenn die Kraftlinien dieses Feldes nicht, wie im Kondensator, Anfang und Ende haben, sondern wenn sie, wie bei der Induktion, ringförmig geschlossen sind. In diesem Falle besteht dann ein ringförmig in sich geschlossener Verschiebungsstrom.

In der Gl. 41a sind Stromstärke und elektrische Feldstärke beide in elektrostatischen Einheiten gemessen. Messen wir sie in elektromagnetischen Einheiten, so stellt man mit Hilfe der in § 313 angegebenen Beziehungen leicht fest, daß wir statt Gl. 41a zu schreiben haben (c = Lichtgeschwindigkeit)

$$i_v = \frac{F \varepsilon}{4\pi c^2} \cdot \frac{d\mathfrak{E}}{dt} \text{ el. magn. Einh.} \qquad (41\text{b})$$

Statt der Feldstärke $\mathfrak{E}$ können wir nach § 235 auch die elektrische Verschiebungsdichte $\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}$ einführen. Wir erhalten dann

$$i_v = \frac{F}{4\pi c^2} \cdot \frac{d\mathfrak{D}}{dt} \text{ el. magn. Einh.} \qquad (41\text{c})$$

Als Dichte des Verschiebungsstromes bezeichnet man denjenigen Betrag, der durch 1 cm² einer zur Richtung des Verschiebungsstromes senkrechten Fläche hindurchtritt, $j_v = i_v/F$, so daß

$$j_v = \frac{\varepsilon}{4\pi c^2} \frac{d\mathfrak{E}}{dt} = \frac{1}{4\pi c^2} \frac{d\mathfrak{D}}{dt} \text{ el. magn. Einh./cm}^2. \qquad (42)$$

Abb. 281 stellt einen Kondensator dar, in dessen Innern sich ein den elektrischen Kraftlinien paralleler Leiter befindet. Ist der Kondensator geladen, so wird der Leiter durch Influenz zu einem elektrischen Dipol. Ändert sich die Ladung des Kondensators, so ändert sich auch die Stärke des Dipols und es fließt in ihm ein Strom, weil die Ladung an seinem Enden zu- oder abnimmt. Genau wie dieser Leitungsstrom von ringförmig geschlossenen magnetischen Kraftlinien umgeben ist, so ist es auch der im Kondensator herrschende Verschiebungsstrom.

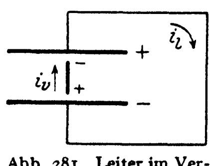


Abb. 281. Leiter im Verschiebungsstrom.

Eine entsprechende Erscheinung tritt immer dann auf, wenn sich ein Leiter im Bereiche eines Verschiebungsstroms befindet. Ein Ver-

schiebungsstrom, den man durch Hineinbringen eines Leiters unterbricht, wird durch einen Leitungsstrom im Leiter geschlossen.

327. **Fortpflanzung elektromagnetischer Störungen.** Ändert sich irgendwo im Raum ein elektrisches oder magnetisches Feld, so wollen wir von einer elektromagnetischen Störung sprechen. Wie wir gesehen haben, macht sich das Vorhandensein einer solchen Störung auch außerhalb des ursprünglichen Raumbereichs bemerkbar, und strenggenommen wird der ganze umgebende Raum bis in beliebige Entfernung von dieser Störung betroffen, wenn auch die Stärke der Wirkung mit der Entfernung abnimmt. Das vom Störungsbereich ausgehende elektromagnetische Feld, bestehend aus den sich gegenseitig ringförmig umschlingenden Kraftlinien des elektrischen und magnetischen Feldes, breitet sich also im Raume aus, und zwar erfolgt diese Ausbreitung mit endlicher Geschwindigkeit. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer elektromagnetischen Störung beträgt im leeren Raum fast genau 300000 km/sec, sie ist also gleich der in § 304 eingeführten Konstanten c, der Lichtgeschwindigkeit oder kritischen Geschwindigkeit. Ihre Identität mit der Lichtgeschwindigkeit hat zuerst auf die Tatsache hingewiesen, daß das Licht nichts anderes ist als die Ausbreitung einer elektromagnetischen Störung (§ 435).

328. **Vieldeutigkeit des elektrischen Potentials in nicht wirbelfreien Feldern.** Im Gegensatz zu den elektrostatischen Feldern, die man als wirbelfreie Felder bezeichnet, sind elektrische Felder mit geschlossenen Kraftlinien nicht wirbelfrei (vgl. § 108). Es sei A ein Punkt in einem solchen Felde. Das elektrische Potential in A sei P. Es ist definiert als die Arbeit, die erforderlich ist, um die Einheitsladung von einem Punkt, dem wir das Potential 0 zuschreiben, nach A zu bringen (§ 220). Jetzt befördern wir die Einheitsladung längs einer durch A gehenden geschlossenen Kraftlinie, mit oder gegen die Richtung der auf ihn wirkenden, von der induzierten elektrischen Feldstärke herrührenden Kraft, bis nach A zurück. Dabei wird, je nach der Richtung dieser Bewegung, ein ganz bestimmter Betrag von Arbeit gewonnen oder aufgewendet. Vollführen wir den Umlauf $n$mal, so ergibt sich das $n$fache dieser Arbeit. Wir erhalten also verschiedene Werte des Potentials P, je nachdem, ob wir die Einheitsladung direkt vom Potential 0 nach A bringen oder ob wir sie auf ihrem Wege ein oder mehrere Male im Kreise um Kraftlinien des zeitlich veränderlichen induzierenden magnetischen Feldes herumführen. Das Potential in einem Punkte eines nicht wirbelfreien elektrischen Feldes ist also nicht eindeutig definiert. Es ist dies völlig analog zu den Verhältnissen in magnetischen Feldern (§ 316).

329. **Das Lenzsche Gesetz.** Für die Richtung der induzierten elektromotorischen Kraft gilt das Lenzsche Gesetz: Die induzierte elektromotorische Kraft ist stets so gerichtet, daß das magnetische Feld eines durch die elektromotorische Kraft erzeugten Induktionsstromes der Ursache der Induktion entgegenwirkt.

Wird die Induktion durch die Bewegung von Leitern oder Leiterteilen im magnetischen Felde eines Magneten oder einer stromdurchflossenen Spule hervorgerufen, so ist das magnetische Feld des Induktionsstromes so gerichtet, daß es diese Bewegung hemmt. Wird ein Pol auf eine Drahtschleife hin bewegt, so ist das magnetische Feld des Induktionsstromes so gerichtet, daß der Pol von der Schleife abgestoßen, seine Bewegung also gehemmt wird. Umgekehrt wird der Pol, wenn er sich von der Drahtschleife entfernt, durch das magnetische Feld des Induktionsstromes in Richtung auf die Schleife angezogen, also auch wieder in seiner Bewegung gehemmt. Dem entspricht es, daß die Richtung der induzierten elektromotorischen Kraft beim Nähern des Poles das umgekehrte Vorzeichen hat wie beim Entfernen. Nachdem man so die Rich-

tung des magnetischen Feldes des Induktionsstromes berechnen kann, kann man durch Umkehrung der in § 302 gegebenen Regeln auch die Richtung des Induktionsstromes bestimmen.

Ist die Ursache der Induktion die zeitliche Änderung des magnetischen Feldes innerhalb der von dem Leitersystem umrandeten Fläche, so ist das magnetische Feld des Induktionsstromes stets so gerichtet, daß es diese zeitliche Änderung verlangsamt. Wird das induzierende magnetische Feld verstärkt oder z. B. durch Einschalten des Stromes in einer Spule überhaupt erst erzeugt, so ist das Feld des Induktionsstromes dem induzierenden Feld entgegengerichtet; wird das induzierende Feld geschwächt oder ganz beseitigt, so ist das Feld des Induktionsstromes ihm gleichgerichtet, so daß wieder die zeitliche Änderung verlangsamt wird.

Das LENZsche Gesetz ist eine Folge aus dem Energieprinzip. Fließt ein Induktionsstrom, so tritt in dem von ihm durchflossenen Leiter Stromwärme auf, und diese Energie kann nur auf Kosten der die Induktion bewirkenden Ursache gehen. Liegt diese in irgendeiner Bewegung materieller Körper (Magnete, Spulen), so müssen diese kinetische Energie verlieren, also in ihrer Bewegung gehemmt werden. Liegt die Ursache der Induktion lediglich in der zeitlichen Änderung der magnetischen Feldstärke, so müssen wir zur Erklärung die erst später (§ 358) zu behandelnde Tatsache vorwegnehmen, daß jedes magnetische Feld der Sitz magnetischer Energie ist. Um ein magnetisches Feld zu erzeugen, muß man Energie aufwenden, und diese Energie wird beim Verschwinden des Feldes wieder frei. Wird ein magnetisches Feld z. B. durch Einschalten eines Stromes in einer Spule erzeugt, und befindet sich im Raum ein Leitersystem, in dem Induktion stattfinden kann, so kommt die von dem Spulenstrom gelieferte Energie nicht nur dem magnetischen Felde zugute, sondern ein Teil dieser Energie wird durch Vermittlung des Feldes zur Erzeugung des Induktionsstromes verbraucht, geht also dem Felde verloren, das infolgedessen langsamer anwächst, als es ohne das Auftreten des Induktionsstromes anwachsen würde. Wird der Spulenstrom ausgeschaltet, so geht ein Teil der Energie des zusammenbrechenden magnetischen Feldes in das Leitersystem über und liefert die Energie für den Induktionsstrom.

Aus dem LENZschen Gesetz folgt ohne weiteres, daß beim Einschalten oder Verstärken des Stromes in einem Draht in einem ihm parallelen Draht ein Induktionsstrom auftritt, der dem induzierenden Strom entgegengerichtet ist, beim Ausschalten oder Schwächen ein solcher, der ihm gleichgerichtet ist.

330. **Messung magnetischer Felder mit der Induktionsspule.** Mit Hilfe der Induktionswirkungen sind wir imstande, die Stärke eines homogenen magnetischen Feldes zu messen. Man bringt zu diesem Zweck eine mit einem ballistischen Galvanometer verbundene Induktionsspule so in das Feld, daß ihre Windungsfläche F senkrecht zu den Kraftlinien des Feldes steht. Alsdann wird sie mit einem Ruck aus dem Felde herausgezogen. Das ballistische Galvanometer zeigt einen Ausschlag, der der Feldstärke proportional ist, die am ursprünglichen Ort der Spule herrschte.

Für den hier vorliegenden Fall gilt die Gl. 28c (§ 318) mit $\sin(F, \mathfrak{H}) = 1$. Integrieren wir diese Gleichung, so erhalten wir

$$\int_{t_1}^{t_2} E\,dt = F \int_{\mathfrak{H}_1}^{\mathfrak{H}_2} d\mathfrak{H} = F\,(\mathfrak{H}_2 - \mathfrak{H}_1)\ \text{Gauß} \cdot \text{cm}^2 .$$

Dabei sollen die Indizes 1 und 2 den Anfangs- und den Endzustand des Vorganges darstellen. Nun ist $\mathfrak{H}_1$ gleich der zu messenden Feldstärke $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}_2 = 0$.

Abgesehen von dem uns hier nicht interessierenden Vorzeichen erhalten wir also

$$\int_{t_1}^{t_2} E\,dt = F\mathfrak{H} \text{ Gauß} \cdot \text{cm}^2. \tag{32}$$

Der Widerstand von Spule und Galvanometer sei R. Die momentane Stromstärke in diesem Kreise sei $i = de/dt$, wobei de die in der Zeit dt durch jeden Querschnitt desselben hindurchtretende Elektrizitätsmenge bedeutet (§ 244). Dann ist

$$F\mathfrak{H} = \int_{t_1}^{t_2} E\,dt = \frac{1}{R}\int_{t_1}^{t_2} i\,dt = \frac{1}{R}\int_{t_1}^{t_2} de = \frac{e}{R} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{H} = \frac{e}{FR} \text{ Gauß}. \tag{33}$$

Hier bedeutet e die gesamte während des Induktionsvorganges durch das Galvanometer geflossene Elektrizitätsmenge. Dieser aber ist der Ausschlag des ballistischen Galvanometers proportional (§ 365), sie kann also nach erfolgter Eichung des Galvanometers gemessen werden. Sind ferner F und R bekannt, so ergibt Gl. 33 die Feldstärke $\mathfrak{H}$ in Gauß, wenn e und R in elektromagnetischen Einheiten gemessen werden. In den Einheiten des praktischen Maßsystems (§ 362) ergibt sich statt Gl. 33

$$\mathfrak{H} = 0{,}796 \frac{e}{FR} \cdot 10^8 \text{ Amp. W./cm}$$

(e in Coulomb, R in Ohm gemessen).

331. Messung magnetischer Spannungen. Auch die magnetische Spannung (§ 316) zwischen zwei Punkten eines magnetischen Feldes kann mit einer geeigneten Induktionsspule, dem magnetischen Spannungsmesser von ROGOWSKI, und einem ballistischen Galvanometer gemessen werden. Der Spannungsmesser besteht aus einer langen Spule, die zur bequemeren Handhabung auf einen Lederriemen aufgewickelt ist (Abb. 282). Die Zuleitungen befinden sich in der Mitte, und der Draht ist nach beiden Seiten hin- und hergewickelt. Der Querschnitt der einzelnen Windungen sei F, und es entfallen auf jedes Zentimeter der Spulenlänge n Windungen. In Abb. 282 ist die Messung der magnetischen Spannung zwischen zwei Punkten des Feldes eines Elektromagneten dargestellt. Die Enden der Spulen werden an die betreffenden Punkte gebracht. Dann läßt man das Feld durch plötzliches Entfernen des Magneten verschwinden. Die hierbei in der Spule eintretende Induktion bewirkt einen Ausschlag in dem mit der Spule verbundenen ballistischen Galvanometer, der der magnetischen Spannung zwischen den Enden der Spule proportional ist.

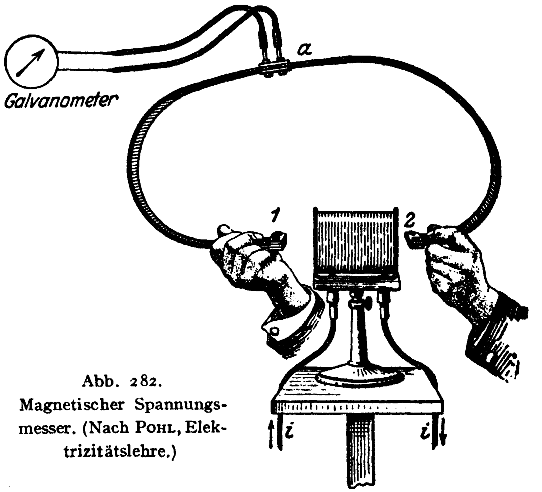


Abb. 282. Magnetischer Spannungsmesser. (Nach POHL, Elektrizitätslehre.)

Wir denken uns die Spule in kleine Elemente der Länge Δs_1, Δs_2 usw. eingeteilt und bezeichnen die in der Achsenrichtung dieser Elemente liegenden Komponenten der magnetischen Feldstärke mit $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ usw. Die Windungsfläche

jedes Elementes beträgt $nF\Delta s_k$. Dann beträgt für jedes Element das Integral $\int E\,dt$ beim Verschwinden des Feldes $nF\mathfrak{H}_k\Delta s_k$ und für die ganze Länge der Spule

$$\int E\,dt = nF(\mathfrak{H}_1\Delta s_1 + \mathfrak{H}_2\Delta s_2 + \cdots) = nF\Sigma\mathfrak{H}_k\Delta s_k$$

oder in Integralform

$$\int E\,dt = nF\int\mathfrak{H}_s\,ds,$$

wobei das rechte Integral über die ganze Länge der Spule zu erstrecken ist.

Nun ist aber nach § 316 $-\int\mathfrak{H}_s\,ds = M$ die magnetische Spannung zwischen den Enden der Spule, so daß

$$\int E\,dt = -nFM \text{ Gauß}\cdot\text{cm}^2. \tag{34}$$

Ist nF — die Windungsfläche der Spule auf 1 cm ihrer Länge — bekannt, so kann man aus der Größe von $\int E\,dt$, die, wie in § 330 angegeben, aus dem Ausschlag des Galvanometers zu ermitteln ist, die magnetische Spannung berechnen.

In entsprechender Weise kann man die magnetische Spannung zwischen zwei Punkten des magnetischen Feldes eines elektrischen Stromes messen. Man kann die in diesem Fall bestehende Vieldeutigkeit der magnetischen Spannung (§ 316) nachweisen, indem man den Spannungsmesser ein oder mehrere Male um den stromführenden Leiter herumlegt. In dem Spezialfall, daß sich die Enden des Spannungsmessers berühren, beträgt die Spannung bei $n$facher Umschlingung des Leiters das $n$fache von $4\pi i$ Gauß · cm.

332. **Gegenseitige Induktion.** Die Stärke des von einem Strome i_1 erzeugten magnetischen Feldes $\mathfrak{H}$ ist der Stromstärke i_1 proportional. Daher ist auch $d\mathfrak{H}/dt$ proportional di_1/dt, wenn i_1 zeitlich veränderlich ist. Befindet sich in der Umgebung des den Strom i_1 führenden Leiters ein zweiter in sich geschlossener Leiter, so wird demnach in diesem eine elektromotorische Kraft E_2 induziert, die nach dem FARADAYschen Gesetz proportional di_1/dt ist,

$$E_2 = -L_{12}\frac{di_1}{dt}. \tag{35}$$

Das negative Vorzeichen wird deshalb gesetzt, weil beim Anwachsen der Stromstärke i_1 die Richtung von E_2 der Spannung, die den Strom i_1 erzeugt, entgegengerichtet ist (§ 329). Den Koeffizienten L_{12} nennt man den Koeffizienten der gegenseitigen Induktion oder die Gegeninduktivität der beiden Leiter. Er ist durch die gegenseitige Lage der beiden Leiter und ihre geometrischen Verhältnisse bedingt. (Außerdem hängt er von der Permeabilität des Mediums ab, in dem sich die beiden Leiter befinden, § 337.) Er ist in einfachen Fällen berechenbar.

Je nach der Größe der Gegeninduktivität L_{12} spricht man von enger oder loser Koppelung der beiden Leiterkreise. Sie ist um so stärker, je näher die beiden Kreise einander liegen, insbesondere bei paralleler Lage der Drähte in ihnen, am stärksten bei ineinander gewickelten Spulen.

Die Einheit der Gegeninduktivität im praktischen Maßsystem ist 1 Henry $= 10^9$ el. magn. Einh. der Gegeninduktivität. Sie liegt dann vor, wenn eine gleichmäßige zeitliche Änderung von i_1 um 1 Ampere/sec. im zweiten Leiter eine elektromotorische Kraft von 1 Volt erzeugt.

333. **Selbstinduktion.** Wenn eine Änderung der Stromstärke in einem Stromkreis in einem benachbarten Leiter eine elektromotorische Kraft induziert, so geschieht das gleiche natürlich auch in den einzelnen Teilen des Stromkreises selbst. Das veränderliche magnetische Feld des Stromkreises wirkt induzierend auf den Stromkreis selbst zurück (FARADAY 1835). Es tritt in ihm eine elektromotorische

Kraft auf, die wir mit E_i bezeichnen wollen. Nach dem LENZschen Gesetz (§ 329) ist sie stets so gerichtet, daß sie die zeitliche Änderung des im Stromkreise fließenden Stromes zu verlangsamen sucht. Sie ist daher bei einem Anwachsen der Stromstärke, insbesondere beim Einschalten des Stromes, der an sich im Stromkreise herrschenden elektromotorischen Kraft (z. B. eines Akkumulators) entgegen-, beim Abnehmen der Stromstärke ihr gleichgerichtet. Wie bei der gegenseitigen Induktion, so ist auch bei dieser sog. Selbstinduktion die induzierte elektromotorische Kraft E_i der zeitlichen Änderung der Stromstärke proportional,

$$E_i = -L\frac{di}{dt}. \tag{36}$$

Die Konstante L heißt der Selbstinduktionskoeffizient oder die Induktivität des betreffenden Stromkreises. Er ist von der geometrischen Konfiguration desselben abhängig, außerdem wie die Gegeninduktivität von dem Material, in das der betreffende Stromkreis eingebettet ist. Hier betrachten wir jedoch zunächst nur den Fall, daß sich der Stromkreis im Vakuum befindet. Der Selbstinduktionskoeffizient ist besonders groß, wenn die einzelnen Teile des Stromkreises einander nahe und auf längere Strecken einander parallel sind, und wenn der Strom in diesen benachbarten Teilen in gleicher Richtung fließt, also besonders bei eng gewickelten Spulen.

Infolge der Selbstinduktion bildet sich in einem Stromkreis vom Widerstande R, in dem sich eine Stromquelle von der elektromotorischen Kraft E befindet, nicht sofort die dem OHMschen Gesetz entsprechende Stromstärke $i = E/R$ aus. Vielmehr gilt nach dem zweiten KIRCHHOFFschen Satz

$$E + E_i = E - L\frac{di}{dt} = iR. \tag{37}$$

Die Lösung dieser Gleichung lautet bei konstantem E, wenn wir für $t = 0$ $i = 0$ setzen,

$$i = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = i_0\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right). \tag{38}$$

Die Stromstärke ist also im ersten Augenblick, beim Einschalten ($t = 0$), gleich Null und steigt dann mit wachsendem t im allgemeinen außerordentlich schnell zum Endwert $i_0 = E/R$, der dem OHMschen Gesetz entspricht, an (Abb. 283a).

Ebenso verschwindet ein Strom i_0 nicht sofort beim Verschwinden der elektromotorischen Kraft E, sofern man dafür sorgt, daß der Stromkreis auch dann noch geschlossen bleibt, sondern er klingt nach der Gleichung

$$i = \frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t} = i_0 e^{-\frac{R}{L}t} \tag{39}$$

ab (Abb. 283b).

Abb. 283. Wirkung der Selbstinduktion.

Die praktische Einheit der Induktivität ist die gleiche, wie die der Gegeninduktivität, das Henry. Ein Leiter hat die Induktivität 1 Henry, wenn eine in 1 sec gleichmäßig erfolgende Änderung der Stromstärke um 1 Ampere ($di/dt = 1$ Amp/sec) in ihm eine induzierte elektromotorische Kraft von 1 Volt hervorruft.

Die Induktivität läßt sich nur in einfachen Fällen in geschlossener Form berechnen. Als Beispiel und zwecks späterer Anwendung berechnen wir die Induktivität einer langen, geraden Spule von der Länge l und dem Querschnitt q, die insgesamt N Windungen, also auf ihre Längeneinheit $n = N/l$

Windungen besitzt. $F = Nq$ ist die Windungsfläche der Spule. Fließt in der Spule ein Strom i, so herrscht in ihr die magnetische Feldstärke $\mathfrak{H} = \frac{4\pi N i}{l}$ Gauß (§ 304, Gl. 11). Bei einer zeitlichen Änderung der Stromstärke wird daher in ihr nach § 318 eine elektromotorische Kraft

$$E_i = N q \frac{d\mathfrak{H}}{dt} = \frac{4\pi N^2 q}{l} \frac{di}{dt} \text{ el. magn. Einh.}$$

induziert. Vergleichen wir dies mit der Definitionsgleichung der Induktivität, Gl. 36, so ergibt sich (auf das Vorzeichen kommt es hier nicht an)

$$L = \frac{4\pi q N^2}{l} = 4\pi q n^2 l. \tag{40}$$

Der gleiche Ausdruck gilt auch für eine Ringspule (Abb. 259b, § 303).

In Schaltungsskizzen zeichnen wir eine Induktivität als eine verschlungene Linie zum Unterschied von einem durch eine Zickzacklinie dargestellten reinen OHMschen Widerstand. Leiter, die sowohl Induktivität als auch OHMschen Widerstand haben, zeichnen wir als eine Induktivität mit einem damit in Reihe geschalteten Widerstand.

334. **Wirbelströme.** Unter Wirbelströmen versteht man das Auftreten von Induktionsströmen in Leitern, welche aus ausgedehnteren Metallmassen bestehen, unter der Wirkung veränderlicher magnetischer Felder. Diese Induktionsströme können z. B. in den Eisenteilen elektrischer Maschinen beträchtliche Stärke haben. Zur Demonstration der Wirbelströme eignet sich das WALTENHOFENsche Pendel (Abb. 284). Eine dicke Kupferscheibe kann zwischen den Polen eines starken Elektromagneten frei hin- und herschwingen. Schaltet man jetzt den Strom des Elektromagneten ein, so bleibt die Kupferscheibe infolge der magnetischen Wirkungen der in ihr auftretenden Induktionsströme zwischen den Polen wie in einer sehr zähen Flüssigkeit stecken (Hemmung der Bewegung gemäß dem LENZschen Gesetz, § 329). Die kinetische Energie des Pendels geht in Stromwärme in der Kupferscheibe über. Das Kupferstück läßt sich nur langsam zwischen den Polen herausziehen.

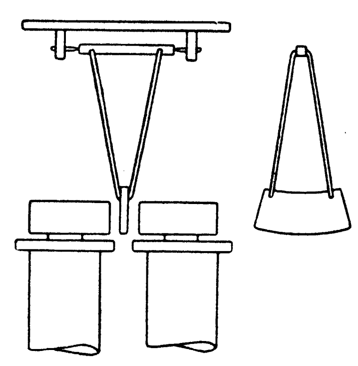


Abb. 284. WALTENHOFENsches Pendel.

Die Vermeidung der nutzlos Energie verbrauchenden Wirbelströme in den Eisenkernen der Magnete elektrischer Maschinen ist ein wichtiges technisches Problem. Man erreicht dies bis zu einem gewissen Grade, indem man diese Teile aus einzelnen voneinander isolierten Streifen aus Weicheisenblech herstellt, die so liegen, daß die Wirbelströme möglichst senkrecht zur Ebene dieser Bleche verlaufen. Vollkommen lassen sich aber Wirbelströme bei elektrischen Maschinen nicht vermeiden.

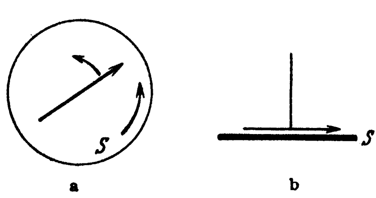


Abb. 285. Sog. Rotationsmagnetismus.

Abb. 285 stellt eine Kupferscheibe S dar, über der eine Magnetnadel drehbar aufgehängt ist. Wird die Kupferscheibe in Drehung versetzt, so wird die Magnetnadel im Sinne der Rotation mitgenommen. Die Erscheinung — von ihrem Entdecker ARAGO als Rotationsmagnetismus bezeichnet — beruht darauf, daß in der Scheibe infolge ihrer Bewegung im Felde der Magnetnadel Wirbelströme induziert werden, und zwar handelt es sich hier um einen Fall von

unipolarer Induktion (§ 322). Nach dem LENZschen Gesetz muß die relative Drehung der Scheibe gegenüber der Magnetnadel, die ja die Ursache der Induktion bildet, durch das magnetische Feld der Wirbelströme gehemmt werden. Wird die Drehung der Scheibe konstant gehalten, so muß demnach die Magnetnadel die Tendenz zeigen, der rotierenden Scheibe zu folgen.

335. **Der Haut- oder Skineffekt.** Sehr schnelle elektrische Schwingungen erzeugen auch in dem Leiter, den sie selbst durchfließen, merkliche Wirbelströme. Wir denken uns den durch einen Draht fließenden Strom in lauter einzelne parallele Stromfäden zerlegt. Jeder dieser Stromfäden ist von ringförmigen magnetischen Kraftlinien umschlossen, die auch im Innern des Leiters vorhanden sind. Ein solcher Stromfaden ist in Abb. 286 durch den geraden Pfeil dargestellt, die zwei Durchstoßpunkte einer seiner ringförmigen Kraftlinien durch die Zeichnungsebene sind durch zwei Punkte angedeutet. Ändert der Strom seine Größe und Richtung, so ändert sich auch die Stärke und Richtung seines magnetischen Feldes. Infolgedessen ist jede magnetische Kraftlinie von induzierten elektrischen Kraftlinien umgeben, die im Leiter elektrische Kreisströme um die Kraftlinien erzeugen. Der Umlaufssinn dieser Ströme ergibt sich an Hand der früher erwähnten Gesetzmäßigkeiten so, wie dies in der Abb. 286 dargestellt ist. Sie laufen an der Oberfläche des Leiters dem fließenden Strom parallel, im Innern sind sie ihm entgegengesetzt gerichtet. Daher wird die Stromdichte im Leiter nicht mehr, wie bei Gleichstrom, überall die gleiche sein; sie wird in der Achse des Leiters geschwächt, an seiner Oberfläche verstärkt. Bei technischem Wechselstrom ist diese Wirkung nur überaus gering, dagegen außerordentlich stark bei schnellen Schwingungen. Bei diesen wird der Strom praktisch fast vollkommen in die äußersten Schichten des Drahtes verdrängt, daher die Bezeichnung als Haut- oder Skineffekt. Die inneren Teile des Drahtes werden zur Stromleitung kaum ausgenutzt, der Widerstand des Drahtes erscheint außerordentlich vergrößert (wie bei jeder Art von Selbstinduktion, um die es sich ja letzten Endes hier auch handelt). Dieser Effekt ist daher in jeder Hinsicht unerwünscht. Man schränkt seine Wirkung in der Praxis dadurch ein, daß man Litzen aus dünnen, voneinander durch einen Lacküberzug isolierten Drähten verwendet, die derart verdrillt sind, daß jeder Draht abwechselnd im Innern und an der Außenseite der Litze liegt (Hochfrequenzlitze).

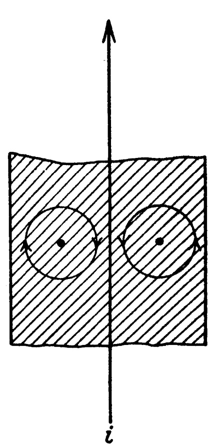


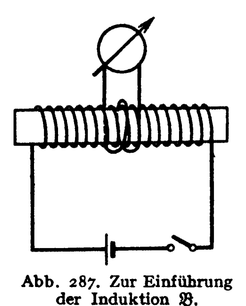
Abb. 286. Zur Theorie des Haut-Effekts.

26. Kapitel.

Die magnetischen Eigenschaften der Stoffe.

336. **Para-, Dia- und Ferromagnetismus.** In Abb. 287 ist eine mit einer Stromquelle verbundene Spule dargestellt, welche von einer zweiten, mit einem ballistischen Galvanometer verbundenen Spule (§ 317) umgeben ist. Das Ganze befinde sich zunächst im leeren Raum, so daß die Bedingungen vorhanden sind, die wir im vorhergehenden Kapitel vorausgesetzt haben. Wird der Stromkreis der ersten Spule geschlossen, so wird durch das in ihr entstehende magnetische Feld in der zweiten Spule eine elektromotorische Kraft induziert, die zu einem Ausschlag des ballistischen Galvanometers führt, aus dem man wie in § 330, Gl. 33, die Feldstärke $\mathfrak{H}$ in der Spule berechnen kann. Nunmehr

werde in die erste Spule ein Kern K aus irgendeiner materiellen Substanz eingeführt und der Versuch wiederholt. Dann ist der Ausschlag des ballistischen Galvanometers größer oder kleiner als vorher, und demnach erhalten wir auf Grund der gleichen Berechnung für das Feld im Innern der Spule einen größeren oder kleineren Wert als im leeren Raum. Wir müssen also daraus den Schluß ziehen, daß die Einführung der materiellen Substanz in das Innere der Spule das Auftreten eines zusätzlichen Feldes zur Folge hat, das dem nach Gl. 11, § 303, berechneten Felde der Spule je nachdem gleich- oder entgegengerichtet ist, es entweder verstärkt oder schwächt.


Abb. 287. Zur Einführung der Induktion $\mathfrak{B}$.

Je nach ihrem Verhalten in dieser Beziehung teilt man die Stoffe in drei Gruppen ein. Bei den diamagnetischen Stoffen tritt eine Schwächung, bei den paramagnetischen Stoffen eine Verstärkung des Feldes ein. Eine ganz besondere Stellung haben schließlich die ferromagnetischen Stoffe, zu denen das Eisen gehört, welche ebenfalls eine Verstärkung hervorrufen, die aber außerordentlich viel größer ist als bei den paramagnetischen Stoffen, und bei denen die Verhältnisse überhaupt viel komplizierter liegen.

337. **Induktion, Permeabilität, Suszeptibilität.** Wir wollen das durch das Einbringen der Substanz hervorgerufene zusätzliche magnetische Feld mit $\mathfrak{H}'$ bezeichnen. Unter $\mathfrak{H}$ verstehen wir nach wie vor dasjenige Feld, welches in der Spule ohne das Vorhandensein der Substanz herrschen würde (Gl. 11, § 303). Tatsächlich besteht also im Innern der substanzerfüllten Spule das magnetische Feld $\mathfrak{H} + \mathfrak{H}'$ Gauß. In den para- und ferromagnetischen Stoffen hat $\mathfrak{H}'$ das gleiche Vorzeichen wie $\mathfrak{H}$, in den diamagnetischen Stoffen das entgegengesetzte Vorzeichen. Der absolute Betrag von $\mathfrak{H}'$ ändert sich gleichsinnig mit demjenigen von $\mathfrak{H}$, d. h. die Stärke des zusätzlichen Feldes wächst, wenn das Feld $\mathfrak{H}$ wächst, und umgekehrt. Man setzt daher

$$\mathfrak{H}' = 4\pi\varkappa\mathfrak{H}. \tag{1}$$

Die Materialkonstante $\varkappa$ heißt die Suszeptibilität der betreffenden Substanz. Sie hat bei den para- und ferromagnetischen Stoffen positives, bei den diamagnetischen Stoffen negatives Vorzeichen. Bei den para- und diamagnetischen Stoffen ist sie von der erregenden Feldstärke $\mathfrak{H}$ unabhängig. Bei den diamagnetischen Stoffen ist sie fast temperaturunabhängig, bei den meisten paramagnetischen Stoffen der absoluten Temperatur umgekehrt proportional. Ihre Zahlenwerte sind bei diesen Stoffen, wie man aus der Tabelle 27 sieht, außerordentlich klein, von der Größenordnung 10^{-6}. Die Suszeptibilität der ferromagnetischen Stoffe ist außerordentlich viel größer, außerdem ist sie eine Funktion der erregenden Feldstärke $\mathfrak{H}$ und hängt von der magnetischen Vorgeschichte des Materials ab.

Tabelle 27. Suszeptibilität $\varkappa$ und Massensuszeptibilität χ einiger Stoffe.

Diamagnetisch			Paramagnetisch		
	$\varkappa \cdot 10^6$	$\chi \cdot 10^6$		$\varkappa \cdot 10^6$	$\chi \cdot 10^6$
Wismut, 15° C	— 15	— 1,47	Zinn, weiß	+ 0,3	+ 0,03
Wismut, flüssig	— 0,1	— 0,01	Aluminium, fest, 18° C	+ 1,8	+ 0,65
Antimon, 18° C	— 6	— 0,9	Aluminium, flüssig, 1000° C		+ 0,5
Quecksilber, 18° C	— 2,6	— 0,19	Sauerstoff, 0° C, 1 Atm.	+ 0,15	+ 105
Wasserstoff, Gas	— 0,00018	— 2	Sauerstoff, flüssig, — 185° C		+ 241
Wasserstoff, flüssig	— 0,19	— 2,7	Sauerstoff, fest, — 253° C		+ 375
Kohlensäure, Gas	— 0,00084	— 0,42			
Argon, Gas	— 0,00164	— 0,45			

Wegen der Bedeutung von χ s. § 341.

Wegen der Kleinheit der Suszeptibilität der para- und ferromagnetischen Stoffe ist das zusätzliche Feld $\mathfrak{H}'$ in diesen stets sehr klein gegenüber dem erregenden Felde $\mathfrak{H}$, und der in § 336 beschriebene Versuch ist bezüglich dieser Stoffe lediglich als ein Gedankenexperiment zu werten. Zur Messung ihrer Suszeptibilität dienen andere Methoden (§ 355). Besonders klein ist die Suszeptibilität der Gase. Das beruht auf ihrer geringen Dichte (§ 341). Daher unterscheiden sich die magnetischen Erscheinungen in Luft, wie in der Vorbemerkung zum vorhergehenden Kapitel erwähnt, nur äußerst wenig von denjenigen im Vakuum, dessen Suszeptibilität definitionsgemäß gleich 0 ist, da ja in ihm kein zusätzliches Feld auftritt. Das gesamte magnetische Feld in einer magnetisierten Substanz beträgt also $\mathfrak{H} + \mathfrak{H}'$. Man bezeichnet es mit dem Buchstaben $\mathfrak{B}$ und nennt es die Induktion in dem betreffenden Material. Es ist also

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + \mathfrak{H}' = (1 + 4\pi\varkappa)\,\mathfrak{H} = \mu\mathfrak{H} \tag{2}$$

wobei

$$\mu = 1 + 4\pi\varkappa. \tag{3}$$

Die Größe $\mu = 1 + 4\pi\varkappa$ nennt man die Permeabilität der betreffenden Substanz. Bei den para- und diamagnetischen Stoffen unterscheidet sich μ nur sehr wenig von 1, und es ist bei den paramagnetischen Stoffen $\mu > 1$, bei den diamagnetischen Stoffen $\mu < 1$. Hingegen ist bei den ferromagnetischen Stoffen $\mu \gg 1$ und, wie $\varkappa$, eine Funktion der erregenden Feldstärke $\mathfrak{H}$, und außerdem von der magnetischen Vorgeschichte des Materials abhängig. Die Permeabilität des Vakuums ist gleich 1.

Bei den anisotropen Stoffen, insbesondere den Kristallen — außer denen des regulären Systems —, hängen μ und $\varkappa$ von der Orientierung des Körpers im Felde ab.

Da wir die Induktion $\mathfrak{B}$ als die wahre Feldstärke im magnetisierten Material definieren, so messen wir sie, wie jede Feldstärke, in der Einheit 1 Gauß. Demnach sind die Größen μ und $\varkappa$ reine Zahlen. (Vgl. hierzu § 362.)

Zur Gl. 2 ist folgendes zu bemerken. Die Auffassung der Induktion $\mathfrak{B}$ als Summe des Feldes $\mathfrak{H}$, wie es im Vakuum, also bei Fehlen der materiellen Substanz, herrschen würde, und des zusätzlichen Feldes $\mathfrak{H}'$ ist in allen Fällen korrekt, in denen die Permeabilität μ nur sehr wenig von 1 verschieden ist, also bei den para- und diamagnetischen Stoffen. Bei den großen Werten von μ, die bei den ferromagnetischen Stoffen auftreten, sind die Verhältnisse sehr viel komplizierter und können im einzelnen hier nicht behandelt werden (vgl. § 345). Aber auch in diesen Fällen bleibt die Auffassung von $\mathfrak{B}$ als wahre Feldstärke in der magnetisierten Substanz zutreffend.

338. **Theorie des Para- und Diamagnetismus.** Zum Verständnis des Para- und Diamagnetismus muß zunächst gesagt werden, daß man den Atomen der verschiedenen Stoffe die Eigenschaft zuschreiben muß, Träger von atomaren Kreisströmen zu sein. Diese Vorstellung wurde zuerst von AMPÈRE, WEBER und anderen zur Deutung der Eigenschaften der ferromagnetischen Stoffe entwickelt, ist aber nach unserer heutigen Kenntnis auf alle Stoffe zu übertragen. Die heutige Atomtheorie deutet diese Kreisströme als kreisende Bewegungen von Elektronen um die einzelnen Atome, und diese Kreisströme sind, wie die Ströme in Leitern, Träger eines magnetischen Moments (§ 310, vgl. ferner § 512). Bei einem Teil der Elemente sind die Kreisströme so beschaffen, daß sich ihre magnetischen Momente an jedem Atom gerade gegenseitig aufheben. Diese Atome besitzen also kein resultierendes magnetisches Moment. Es sind dies die diamagnetischen Stoffe. Bei den paramagnetischen Stoffen hingegen findet eine solche gegenseitige Kompensation der magnetischen Momente

der einzelnen Kreisströme nicht statt, ihre Atome besitzen also ein resultierendes magnetisches Moment. Sie sind magnetische Dipole. (Über die Größe der magnetischen Momente der Atome vgl. § 512.)

Dieser Tatsache zufolge beruht auch das Verhalten para- und diamagnetischer Stoffe im magnetischen Felde auf ganz verschiedenen Ursachen. Bei den paramagnetischen Substanzen liegen die Dinge verhältnismäßig einfach. Die Atome, die infolge ihrer magnetischen Momente magnetische Dipole sind, suchen sich mit ihrer magnetischen Achse in Richtung des magnetischen Feldes einzustellen. Das Verhalten der diamagnetischen Substanzen ist aber nur auf Grund der Induktionsgesetze zu verstehen. Die atomaren Kreisströme, die ja dauernd ungeschwächt fließen, können wir uns als in widerstandslosen Strombahnen verlaufend denken. Ein diamagnetischer Körper befinde sich zunächst in einem feldfreien Raum. Wird jetzt in diesem Raum ein magnetisches Feld erregt, so entstehen in den gedachten widerstandslosen Strombahnen zusätzliche Induktionsströme, deren magnetisches Feld nach dem Lenzschen Gesetz (§ 329) dem äußeren Feld entgegengesetzt gerichtet ist. Noch präziser läßt sich der Vorgang dahin beschreiben, daß an einem Atom diejenigen Kreisströme, deren magnetisches Feld dem äußeren Feld entgegengesetzt gerichtet ist, verstärkt, diejenigen, deren magnetisches Feld ihm gleichgerichtet ist, geschwächt werden. D. h. die in ersteren kreisenden Elektronen werden beim Entstehen des Feldes beschleunigt, die in letzteren kreisenden verlangsamt. Während sich nun die Wirkungen der ganz regellos gelagerten Kreisströme vorher aufhoben, ist das jetzt nicht mehr der Fall. Es überwiegt die Wirkung derjenigen Atome, deren magnetisches Moment gegen die Richtung des äußeren Feldes weist. Das überwiegende magnetische Moment ist also gerade umgekehrt gerichtet wie bei den paramagnetischen Atomen, deren magnetische Momente sich in Richtung des Feldes einstellen. So erklärt sich wenigstens qualitativ das entgegengesetzte Verhalten paramagnetischer und diamagnetischer Substanzen. Beim Verschwinden des magnetischen Feldes treten natürlich Induktionsströme auf, welche den beim Entstehen des Feldes erzeugten gleich, aber entgegengesetzt gerichtet sind, sie also genau wieder aufheben, so daß die Substanz wieder vollkommen in ihren alten Zustand zurückkehrt.

Es ist zu bemerken, daß das bei den diamagnetischen Stoffen beschriebene Verhalten tatsächlich auch bei allen anderen Stoffen eintreten muß. Paramagnetismus tritt daher dann ein, wenn die paramagnetischen Eigenschaften die diamagnetischen überwiegen.

339. **Die Induktion $\mathfrak{B}$ als das wahre Feld in einer magnetisierten Substanz.** Wir sind nunmehr in der Lage, das zusätzliche Feld in den para- und diamagnetischen Stoffen zu verstehen. In einer paramagnetischen Substanz suchen sich die atomaren Dipole unter der Wirkung eines äußeren Felde $\mathfrak{H}$ mit ihren magnetischen Achsen in die Richtung dieses Feldes einzustellen, wie dies in Abb. 288, die einen schematischen Querschnitt durch einen paramagnetischen Körper im magnetischen Felde darstellen soll, durch die kurzen Pfeile angedeutet ist. Die langen, ausgezogenen Pfeile stellen die Kraftlinien des äußeren Feldes $\mathfrak{H}$ dar. Die von den einzelnen atomaren Dipolen ausgehenden magnetischen Kraftlinien (gestrichelt gezeichnet) verlaufen im Innern des Körpers von einem Dipol zum andern, und sie sind im wesentlichen dem äußeren Felde $\mathfrak{H}$ gleichgerichtet, verstärken dieses also. Denkt man sich senkrecht zum Felde eine Ebene q durch den Körper gelegt und zählt die Kraftlinien ab, die durch diesen Querschnitt hindurchtreten, so erhält man die durchschnittliche Feldstärke in der Substanz, indem man die Kraftlinienzahl durch die Größe der Fläche q dividiert. Diese durchschnittliche Feldstärke, die sich aus der äußeren Feldstärke $\mathfrak{H}$ und dem

zusätzlichen Feld $\mathfrak{H}'$ der ausgerichteten atomaren Kreisströme zusammensetzt, ist die Induktion $\mathfrak{B}$. (Der Deutlichkeit halber ist der von den atomaren Feldern herrührende Anteil sehr viel zu groß gezeichnet. In Wirklichkeit tragen diese Felder, wie man aus der Kleinheit der Suszeptibilitäten sieht, nur äußerst wenig zum Felde bei. Bei den ferromagnetischen Stoffen ist das, wie wir sehen werden, anders.)

Für die diamagnetischen Stoffe kann man eine ganz analoge Betrachtung anstellen. Nur muß man auf Grund von § 336 in Abb. 288 die Achsenrichtungen der Dipole und die Richtung der zusätzlichen Feldstärke bei gleichbleibender Richtung von $\mathfrak{H}$ gerade umgekehrt denken. Das zusätzliche atomare Feld in der diamagnetischen Substanz ist der Richtung des Feldes $\mathfrak{H}$ entgegengerichtet und schwächt es.

Bei der Abb. 288 ist zu beachten, daß die magnetischen Kraftlinien des zusätzlichen Feldes nicht etwa durch die Dipole unterbrochen werden, sondern daß sie durch die von den Kreisströmen umlaufene Fläche hindurchtreten. Die Pfeile der Abb. 288 sollen nur die magnetischen Momente der Kreisströme symbolisch darstellen.

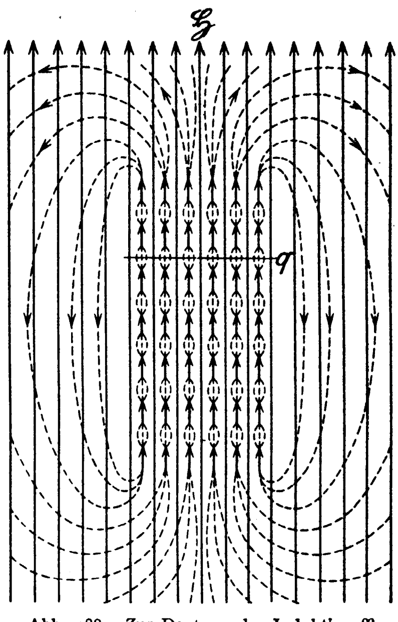


Abb. 288. Zur Deutung der Induktion $\mathfrak{B}$ in einem paramagnetischen Körper.

Zwischen den elektrischen und magnetischen Erscheinungen besteht ja eine weitgehende Analogie, und das gilt formal auch für die Beziehungen $\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E}$ (§ 235). In der Bedeutung dieser beiden Gleichungen besteht aber insofern ein fundamentaler Unterschied, als das wahre magnetische Feld in einer magnetisierten Substanz $\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}$, das wahre elektrische Feld in einer dielektrisch polarisierten Substanz $\mathfrak{E} = \mathfrak{D}/\varepsilon$ ist.

340. **Die Magnetisierung.** Durch die Ausrichtung der atomaren Dipole in einem magnetischen Felde gewinnt ein magnetisierter Körper in gewissem Sinne die Eigenschaften eines Magneten. Wie bei einem solchen treten an seinem einen Ende Kraftlinien des zusätzlichen Feldes aus, am anderen Ende wieder ein (vgl. die Abb. 288). Der Körper erhält also sozusagen an seinen beiden Enden Pole, er wird im magnetischen Felde zu einem magnetischen Dipol. Ist die Stärke des zusätzlichen Feldes $\mathfrak{H}' = \mathfrak{B} - \mathfrak{H}$, und sei die Größe der zum Felde senkrecht gedachten Endflächen q, so treten also durch seine Enden $q(\mathfrak{B}-\mathfrak{H})$ Kraftlinien des zusätzlichen Feldes, und wir können, da nach § 299 von einem Magnetpol der Stärke m $4\pi m$ Kraftlinien ausgehen, den Enden eine Polstärke $q(\mathfrak{B}-\mathfrak{H})/4\pi$ zuschreiben. Davon entfällt auf die Flächeneinheit der Anteil $\mathfrak{J} = (\mathfrak{B}-\mathfrak{H})/4\pi$. Aus Gl. 2, § 337, ergibt sich, daß wir dafür setzen können

$$\mathfrak{J} = \varkappa\mathfrak{H}. \tag{4}$$

$\mathfrak{J}$ nennt man die Magnetisierung der Substanz.

Die Magnetisierung hat eine anschauliche Bedeutung. Ein magnetisierter Körper habe die Länge l und den Querschnitt q. Dann beträgt die Polstärke an seinen beiden Enden $\pm\mathfrak{J}q$, und der ganze Körper bildet einen magnetischen Dipol vom Moment $\mathfrak{M} = \mathfrak{J}ql$ (§ 297). ql ist aber das Volumen des Körpers,

und es folgt, daß $\mathfrak{J}$ das magnetische Moment der Volumeinheit des magnetisierten Körpers ist. Aus den Gl. 2 und 4 folgt die Beziehung

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{J}. \tag{5}$$

341. **Massensuszeptibilität. Molekularsuszeptibilität.** Aus den vorhergehenden Erörterungen über $\mathfrak{J}$ erkennt man, daß die Suszeptibilität $\varkappa$ das vom Felde $\mathfrak{H} = 1$ Gauß in der Volumeinheit einer Substanz erzeugte magnetische Moment ist. Dividieren wir demnach $\varkappa$ durch die Dichte ϱ der Substanz, so erhalten wir das im Felde von 1 Gauß auf 1 g der Substanz entfallende magnetische Moment, die sog. Massensuszeptibilität

$$\chi = \frac{\varkappa}{\varrho}. \tag{6a}$$

Multiplizieren wir diese mit dem Molekulargewicht M der Substanz, so ergibt sich das magnetische Moment von 1 Mol derselben, die sog. Molekularsuszeptibilität

$$\chi_m = \chi \cdot M. \tag{6b}$$

Entsprechend ergibt sich die Suszeptibilität von 1 Grammatom, die sog. Atomsuszeptibilität

$$\chi_a = \chi \cdot A \tag{6c}$$

durch Multiplikation mit dem Atomgewicht A. Da im Mol bzw. Grammatom stets die gleiche Zahl von Molekülen bzw. Atomen enthalten ist (§ 96), so ergeben die durch diese Zahl (N, LOSCHMIDTsche Zahl) dividierten Werte von χ_m und χ_a das auf jedes einzelne Molekül, bzw. Atom im Felde 1 Gauß entfallende magnetische Moment.

In Tabelle 27 (§ 337) sind einige Zahlenwerte angegeben. Man beachte den hohen Wert von χ für den Sauerstoff. Daß trotzdem die Permeabilität der Luft sehr nahezu gleich 1 ist, beruht darauf, daß trotz des hohen Wertes von χ die Suszeptibilität $\varkappa = \chi \cdot \varrho$ des Sauerstoffs wegen seiner kleinen Dichte ϱ sehr klein ist.

342. **Ferromagnetismus.** Die ferromagnetischen Stoffe, deren Hauptvertreter das Eisen ist, unterscheiden sich in ihrem magnetischen Verhalten in mehreren Hauptpunkten von allen übrigen Stoffen. Während die Permeabilitäten der para- und diamagnetischen Stoffe vom Wert 1 nur äußerst wenig abweichen, nehmen sie bei den ferromagnetischen Stoffen sehr große Werte, bis zu mehreren 1000, an. Zweitens besteht nicht, wie bei den übrigen Stoffen, eine eindeutige Zuordnung zwischen der äußeren Feldstärke $\mathfrak{H}$ und der Induktion $\mathfrak{B}$. Zwar wird die Beziehung $\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}$ zur Definition der Permeabilität auch hier aufrechterhalten. Aber die Permeabilität ist durchaus keine Konstante, auch nicht annähernd, sondern ihr Betrag hängt von der erregenden Feldstärke $\mathfrak{H}$ und von der magnetischen Vorgeschichte des Materials ab. Damit hängt es auch zusammen, daß bei diesen Stoffen bei verschwindendem äußeren Feld $\mathfrak{H}$ doch die Induktion $\mathfrak{B}$ und die Magnetisierung $\mathfrak{J}$ einen endlichen Wert haben können. Das ist der Fall bei den permanenten Magneten. Und schließlich zeigt sich bei den Ferromagnetika die Erscheinung der magnetischen Sättigung, d. h. ihre Magnetisierung strebt mit wachsender Feldstärke einem Grenzwert zu, während sich bei den übrigen Stoffen auch bei den höchsten erreichbaren Feldstärken keine Spur einer solchen Sättigung zeigt.

Außer dem Eisen, bei dem die ferromagnetischen Eigenschaften weitaus am stärksten ausgeprägt sind, gehören zu den ferromagnetischen Stoffen die ihm chemisch sehr nahe verwandten Metalle Nickel und Kobalt. Auch manche

ihrer Legierungen unter sich und gewisse chemische Verbindungen dieser Metalle, sowie auch ihre Legierungen mit gewissen anderen Stoffen, insbesondere mit Mangan, Aluminium, Chrom und Silizium, die an sich nicht ferromagnetisch sind, zeigen ferromagnetische Eigenschaften. Man kann daher die verschiedenen Ansprüche, die in der Technik an ferromagnetische Materialien gestellt werden, weitgehend durch Wahl einer passenden Legierung befriedigen. Besonders interessant ist es, daß gewisse Legierungen aus den an sich nicht ferromagnetischen Metallen Kupfer, Mangan und Aluminium, die sog. HEUSLERschen Legierungen, ferromagnetisch sind.

Unter den ferromagnetischen Verbindungen ist der Magneteisenstein oder Magnetit (Fe_3O_4) besonders interessant, der ein weitverbreitetes Eisenerz darstellt (im schwedischen Lappland und im östlichen Rußland). Am Magnetit ist der Magnetismus schon im Altertum entdeckt worden, und aus ihm (sog. natürliche Magnete) wurden die ersten Kompasse hergestellt.

Ein Ferromagnetikum zeigt im magnetischen Felde kleine Änderungen seiner Dimensionen. Zum Beispiel nimmt die Länge eines Eisenstabes in einem longitudinalen Felde bis zu etwa 100 Gauß an Länge zu. Die Längenänderung wird bei weiter wachsender Feldstärke geringer und verschwindet bei etwa 200 Gauß. Wächst die Feldstärke noch weiter an, so tritt Verkürzung ein (sog. JOULE-Effekt). Man bezeichnet den ganzen Erscheinungskomplex, der eine gewisse Analogie zur Elektrostriktion bildet, als Magnetostriktion.

343. Hysteresis. Sättigung. Wir wollen die wichtigsten Eigenschaften der Ferromagnetika im folgenden an ihrem Hauptvertreter, dem Eisen, näher untersuchen. Zu diesem Zweck gehen wir von einem zunächst unmagnetischen Stück Eisen aus, das wir in einer Spule, bei kleiner Feldstärke $\mathfrak{H}$ beginnend, einer Magnetisierung unterwerfen. Zur graphischen Darstellung der Verhältnisse dient ein Diagramm (Abb. 289a), in dem die Induktion $\mathfrak{B}$ als Funktion der äußeren Feldstärke $\mathfrak{H}$ aufgetragen ist. Da aber, wie gesagt, beim Eisen die Permeabilität μ sehr große Werte erreicht, demnach $\mathfrak{B}$ sehr viel größer als $\mathfrak{H}$ ist, so müssen wir den Maßstab von $\mathfrak{B}$ gegenüber demjenigen von $\mathfrak{H}$ auf weniger als $^1/_{1000}$ verkürzen.

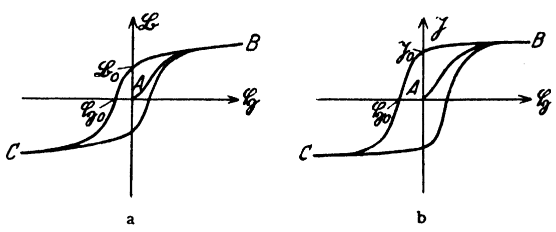


Abb. 289. Hysteresisschleifen. a ($\mathfrak{B}$, $\mathfrak{H}$)-Kurve, b ($\mathfrak{J}$, $\mathfrak{H}$)-Kurve.

Steigern wir, mit noch nicht magnetischem Eisen im Felde $\mathfrak{H} = 0$ beginnend, die Feldstärke, so steigt die Induktion $\mathfrak{B}$ zuerst langsam, dann schneller an. Bei noch weiterer Steigerung von $\mathfrak{H}$ wird die Zunahme von $\mathfrak{B}$ wieder geringer, und bei sehr hoher Feldstärke $\mathfrak{H}$ nimmt schließlich $\mathfrak{B}$ nur noch um die gleichen Beträge zu wie $\mathfrak{H}$ selbst, d. h. das zusätzliche Feld $\mathfrak{H}'$ bleibt nunmehr konstant. Dieser Magnetisierungsprozeß wird durch die Kurve AB der Abb. 289a dargestellt. Man nennt sie die jungfräuliche oder Nullkurve des Materials. (Man beachte, daß diese Kurve, wenn der Maßstab von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ gleich groß gewählt werden könnte, bei B in eine unter 45^0 geneigte Gerade auslaufen würde.)

Das Eisen strebt also bei hoher Feldstärke einem Zustand magnetischer Sättigung zu, und dieser Zustand ist offenbar dadurch bedingt, daß schließlich die gesamten atomaren magnetischen Dipole in die Richtung des Feldes $\mathfrak{H}$ eingestellt sind, so daß nunmehr ein weiteres Anwachsen des zusätzlichen Feldes $\mathfrak{H}'$ nicht mehr stattfinden kann.

Die als das Verhältnis $\mu = \mathfrak{B}/\mathfrak{H}$ definierte Permeabilität des Eisens ist demnach längs der Kurve AB nicht konstant, sondern eine Funktion der Feldstärke. Die verschiedenen Eisensorten verhalten sich in dieser Hinsicht verschieden, wie Tabelle 28 zeigt. Jedoch ist ihnen allen gemeinsam, daß die Permeabilität zunächst relativ klein ist (sog. Anfangspermeabilität), dann wächst, um schließlich wieder zu sinken. Bei sehr hoher Feldstärke muß sie sich asymptotisch dem Wert 1 nähern, da dann die zusätzliche Feldstärke $\mathfrak{H}'$ schließlich verschwindend klein gegen $\mathfrak{H}$ ist und daher nahezu $\mathfrak{B}/\mathfrak{H} = 1$ wird.

Tabelle 28. Permeabilität des Eisens.

Dynamostahl		Geglühtes Gußeisen	
$\mathfrak{H}$	μ	$\mathfrak{H}$	μ
0,25	960	0,25	360
1,0	2300	0,5	590
1,5	4030	0,75	515
2,5	3720	1,0	340
5	2430	1,5	172
10	1410	2,5	99,5
20	775	5	73,6
100	180	10	59,6
500	42,8	100	16,2
1000	22,4	1000	4,1
2000	11,7	2000	3,6
3000	8,2		
4000	6,3		

Abb. 289b gibt den beschriebenen Magnetisierungsvorgang gleichfalls wieder, doch ist hier nicht $\mathfrak{B}$, sondern die Magnetisierung $\mathfrak{J}$ des Eisens als Funktion von $\mathfrak{H}$ aufgetragen. In diesem Falle verläuft natürlich die Kurve AB nach erreichter vollständiger Sättigung horizontal, da die Magnetisierung jetzt bei wachsender Feldstärke nicht mehr zunehmen kann. Denn nach § 340 ist $\mathfrak{J}$ der zusätzlichen Feldstärke $\mathfrak{H}'$ proportional.

344. **Remanenz und Koerzitivkraft.** Wir wollen jetzt, vom Zustande der Sättigung ausgehend, das Eisen einem weiteren sog. zyklischen Magnetisierungsprozeß unterwerfen. Zu diesem Zweck vermindern wir die Feldstärke $\mathfrak{H}$ allmählich wieder. Dabei zeigt sich, daß die Magnetisierung nicht etwa längs der Kurve BA rückwärts verläuft, sondern die Werte von $\mathfrak{B}$ liegen jetzt höher als auf der Nullkurve. Und bei der Feldstärke $\mathfrak{H} = 0$ ist die Induktion $\mathfrak{B}$ keineswegs verschwunden, sondern hat noch einen endlichen Betrag $\mathfrak{B}_0$ (Abb. 289a), der für die verschiedenen Eisensorten verschieden groß ist. Daher bleibt auch eine Restmagnetisierung $\mathfrak{J}_0$ übrig (Abb. 289b). Das bedeutet, daß das Eisen auch beim Verschwinden des magnetisierenden Feldes noch ein magnetischer Dipol bleibt. Das Stück Eisen ist ein permanenter Magnet geworden. Diese typisch ferromagnetische Erscheinung heißt Remanenz.

Wir lassen nunmehr die Feldstärke $\mathfrak{H}$ mit umgekehrtem Vorzeichen wieder anwachsen. Dadurch wird die beim Felde $\mathfrak{H} = 0$ verbliebene Induktion bzw. Magnetisierung weiter geschwächt, und bei einer Feldstärke $\mathfrak{H}_0$ verschwindet sie völlig. Das Eisen hat also nunmehr bei einer endlichen Feldstärke seine Magnetisierung verloren und ist in den Zustand zurückgekehrt, den es zu Beginn des ganzen Prozesses beim Felde 0 hatte. Die Feldstärke $\mathfrak{H}_0$ nennt man die Koerzitivkraft des Eisens. Auch sie ist bei den verschiedenen Eisensorten verschieden.

Wird der Magnetisierungsprozeß im gleichen Sinne weiter fortgesetzt, so kehrt sich nunmehr das Vorzeichen von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{J}$ um, ihre absoluten Beträge wachsen wieder, und es wird schließlich wieder Sättigung erreicht, aber mit umgekehrtem Vorzeichen wie beim erstenmal (Punkt C, Abb. 289a u. b).

Nunmehr werde der Betrag der Feldstärke wieder vermindert. Auch jetzt verläuft der Rückweg nicht wieder längs der gleichen Kurve wie der Hinweg, sondern auf der unteren Kurve CB, die zu der oberen Kurve BC spiegelbildlich liegt und bei Sättigung wieder in sie hineinmündet. Der Punkt A, von dem das Material ursprünglich ausging, wird also bei einem solchen Prozeß nie wieder erreicht.

Man bezeichnet diesen ganzen, 1880 von WARBURG entdeckten Erscheinungskomplex als *Hysteresis*, die Kurven der Abb. 289 als *Hysteresisschleifen*. Ihre Gestalt hängt von der Eisensorte ab.

Zur Herstellung von *permanenten Magneten* (Dauermagneten) ist Eisen von hoher Remanenz und gleichzeitig hoher Koerzitivkraft erforderlich (Stahl). Denn erstens soll das beim Felde $\mathfrak{H} = 0$ verbleibende magnetische Moment groß sein, zweitens sollen äußere Felder die Magnetisierung möglichst wenig beeinflussen. Das Produkt aus Remanenz und Koerzitivkraft eines Magneten nennt man seine *Güteziffer*. Wo es aber darauf ankommt, daß ein Stück Eisen seine Magnetisierung möglichst leicht wieder verliert, ist kleine Remanenz erforderlich (weiches Eisen). Das kommt z. B. bei den Eisenkernen elektrischer Apparate und Meßinstrumente in Frage.

Wie man aus der Erscheinung der Hysteresis sieht, ist die Magnetisierung des Eisens ein nicht umkehrbarer, irreversibler Vorgang (§ 196). Tatsächlich ist er das auch im thermodynamischen Sinne, denn es wird bei ihm Arbeit in Wärme verwandelt. Der Betrag der bei einer zyklischen Magnetisierung erzeugten Wärme ist nach WARBURG unmittelbar durch den Flächeninhalt der Hysteresisschleife gegeben.

345. **Entmagnetisierung.** Die in den vorstehenden Paragraphen durchgeführte Darstellung, daß die Induktion $\mathfrak{B}$ die Summe aus dem äußeren Felde $\mathfrak{H}$ und dem zusätzlichen Felde $\mathfrak{H}'$ der ausgerichteten elementaren Dipole sei, bedarf noch eines Zusatzes. Im Innern eines magnetisierten Materials heben sich die Wirkungen der einander zugekehrten, entgegengesetzt polaren Enden dieser Dipole im Durchschnitt gegenseitig auf. An den Enden des magnetisierten Stückes bleiben aber unkompensierte Pole, eine magnetische Flächenbelegung, die Magnetisierung $\mathfrak{J}$, übrig. Zwischen diesen entgegengesetzt polaren magnetischen Belegungen der beiden Enden des magnetisierten Körpers verlaufen Kraftlinien, nicht nur durch den Außenraum, sondern auch innerhalb des Magneten, und dieses Feld wirkt dem Felde $\mathfrak{H}$ entgegen, es verringert also dessen magnetisierende Wirkung. Die Größe dieser entmagnetisierenden Wirkung hängt von der Form des magnetisierten Körpers ab, und es gibt für jeden Körper einen sog. *Entmagnetisierungsfaktor*, der sich in gewissen einfachen Fällen (insbesondere bei Rotationsellipsoiden) berechnen läßt. Eine solche entmagnetisierende Wirkung besteht auch bei permanenten Magneten. Entmagnetisierung fehlt, wenn man einen Ring mit einer darauf gewickelten Spule durch einen Strom in der Spule magnetisiert, denn in diesem Falle sind ja Enden mit magnetischen Belegungen gar nicht vorhanden. Natürlich spielen die entmagnetisierenden Wirkungen der Enden nur bei den ferromagnetischen Körpern eine merkliche Rolle. Bei den übrigen Stoffen ist die Magnetisierung so schwach, daß das entmagnetisierende Feld der Enden gegenüber dem äußeren Feld praktisch verschwindet. Bei einem geraden Stab wird die entmagnetisierende Wirkung bei gegebenem Querschnitt um so schwächer, je länger er ist. Denn bei gegebener äußerer Feldstärke ist die Stärke der an seinen Enden induzierten Pole stets die gleiche, das von ihnen herrührende entmagnetisierende Feld aber um so schwächer, je weiter die Enden voneinander entfernt sind. Natürlich spielt die Entmagnetisierung nur bei großen Werten von μ, also bei den ferromagnetischen Stoffen, eine praktische Rolle.

346. **Das Feld in der Umgebung eines magnetisierten Körpers.** Wird ein magnetisierbarer Körper, z. B. ein Stück Eisen, in ein vorher homogenes magnetisches Feld gebracht, so wird durch die von seinen induzierten Polen ausgehenden Kraftlinien das Feld in seiner Umgebung verzerrt, wie dies das Eisenfeilichtbild Abb. 290 zeigt. Die Kraftlinien werden sozusagen in den magnetisierten Körper

hineingezogen, und es tritt seitlich neben dem Körper eine Verminderung der Kraftliniendichte, also eine Herabsetzung der Feldstärke, ein. Die Abb. 291 gibt eine Deutung dieser Erscheinung. Durch die Magnetisierung des Körpers entsteht ein zusätzliches Feld, welches im Innern dem äußeren Felde gleich gerichtet ist. Dadurch wird die Feldstärke im Innern erhöht und das Feld im Außenraum verzerrt. (Vgl. hierzu Abb. 145, § 227. Dort ist das Innere des Leiters feldfrei, d. h. das äußere Feld ist durch die Kraftlinien der Polarisationsladungen kompensiert. In der Abb. 291 aber addieren sich das äußere Feld und das Feld der Magnetisierung zur Induktion $\mathfrak{B}$.)

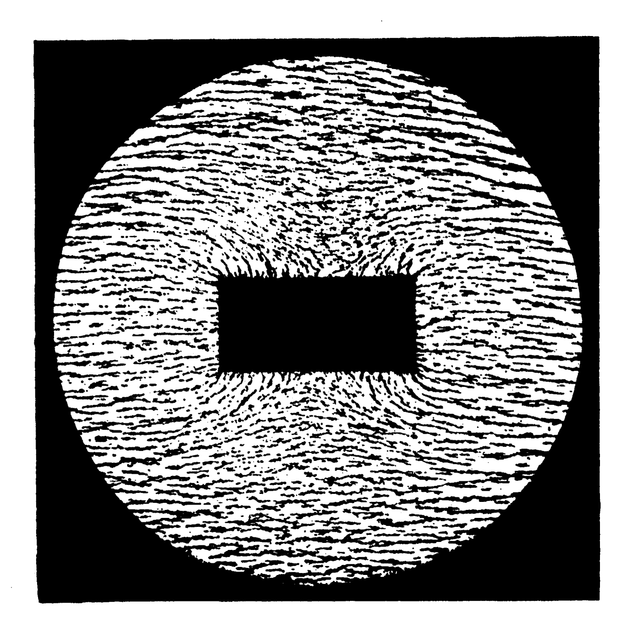


Abb. 290. Eisen im magnetischen Felde. (Aus POHL, Elektrizitätslehre.)

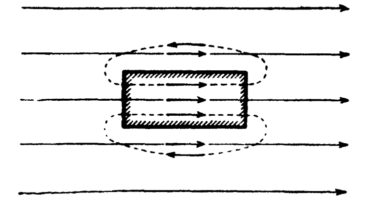


Abb. 291. Zur Deutung der Abb. 290. (Aus POHL, Elektrizitätslehre.)

347. **Brechung magnetischer Kraftlinien.** Treten magnetische Kraftlinien aus einem Medium unter einem beliebigen Einfallswinkel in ein andres Medium über, so gilt folgende Grenzbedingung an der Grenzfläche der beiden Medien: Die zur Grenzfläche senkrechte Komponente der Induktion $\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}$ bleibt konstant, und die zur Grenzfläche parallele Komponente der Feldstärke $\mathfrak{H}$ bleibt konstant. Es gilt also (Abb. 292)

$$\mu_1 \mathfrak{H}_1 \cos\alpha_1 = \mu_2 \mathfrak{H}_2 \cos\alpha_2 \quad \text{und} \quad \mathfrak{H}_1 \sin\alpha_1 = \mathfrak{H}_2 \sin\alpha_2 .$$

Hieraus folgt

$$\operatorname{tg}\alpha_1 : \operatorname{tg}\alpha_2 = \mu_1 : \mu_2 . \tag{7}$$

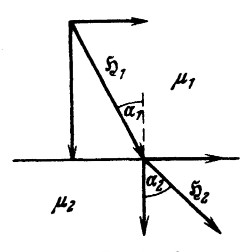


Abb. 292. Zur Brechung der magnetischen Kraftlinien.

Die Kraftlinien erfahren also eine Richtungsänderung (Brechung der Kraftlinien), und zwar werden sie vom Einfallslot weggebrochen, wenn die Permeabilität des zweiten Mediums größer ist als die des ersten.

Abb. 293 nebst der entsprechenden schematischen Abb. 294 zeigen als Beispiel die Wirkung der Kraftlinienbrechung in einem Eisenring im homogenen magnetischen Felde. Die von der einen Seite in den Ring eintretenden Kraftlinien verlaufen weiter im Innern des Ringes und treten erst am symmetrisch gelegenen Punkt der andern Ringhälfte wieder aus dem Ringe aus. Das Innere des Ringes ist feldfrei. Was hier an einem zweidimensionalen Beispiel gezeigt ist, gilt auch im räumlichen. Das Innere einer Hohlkugel aus weichem Eisen im magnetischen Felde ist weitgehend feldfrei. Man benutzt diese Tatsache, um Teile von Apparaten gegen die störende Wirkung äußerer magnetischer Felder, z. B. des erdmagnetischen Feldes zu schützen (Schirmwirkung des Eisens).

Die vorstehenden Ausführungen gelten auch für para- und diamagnetische Stoffe. Nur ist die Brechung bei ihnen, weil μ nahezu gleich 1 ist, sehr gering.

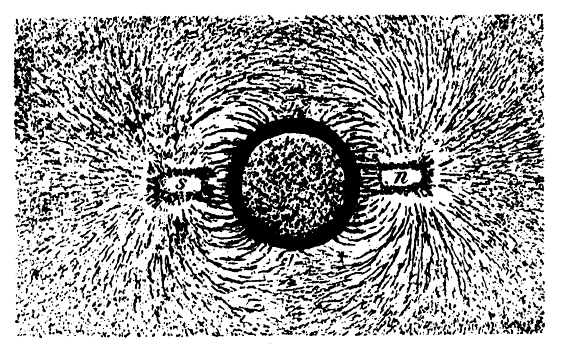


Abb. 293. Schirmwirkung von weichem Eisen.

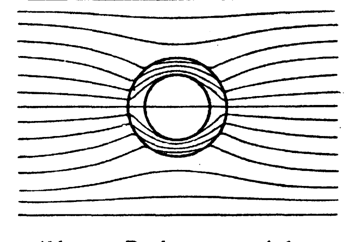


Abb. 294. Brechung magnetischer Kraftlinien in einem Eisenring.

348. **Magnetisierung im erdmagnetischen Felde.** Das erdmagnetische Feld ist, wie jedes andere magnetische Feld, imstande, Eisen zu magnetisieren. Daher ist jedes Stück Eisen auf der Erde stets ein wenig magnetisiert. Man kann diese Wirkung mit dem in Abb. 295 dargestellten Apparat leicht nachweisen. Zwei etwa 1 m lange Stangen aus weichem Eisen von quadratischem Querschnitt sind an einem Gestell drehbar so angeordnet, daß man sie in die Richtung des erdmagnetischen Feldes $\mathfrak{H}$, also in die Richtung der Inklination, einstellen kann. (Die Stangen müssen lang sein, damit nicht durch die Entmagnetisierung das Feld zwischen ihren zugewandten Enden zu sehr geschwächt wird, vgl. § 345). Ihre einander zugekehrten Enden haben einen Abstand von etwa $^1/_2$ cm. Sind sie einigermaßen in Richtung des Feldes orientiert, so kann man ein zylindrisches Stück weichen Eisens E von etwas größerem Durchmesser als der Abstand der Stäbe zwischen ihnen anhängen, ohne daß es abfällt. An den Enden der Eisenstäbe entstehen im Erdfelde Pole, welche das Eisenstück festhalten. Bewegt man die Stäbe in eine andere Lage, so fällt das Eisenstück ab.

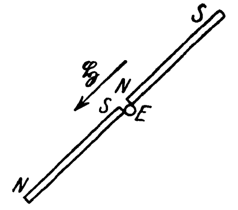


Abb. 295. Magnetisierung im Erdfelde.

Man beobachtet ferner, daß stählerne Gegenstände, insbesondere Werkzeuge, Feilen, Hämmer u. dgl., welche regelmäßig in einer bestimmten Orientierung im Raume — etwa nordsüdlich oder vertikal — benutzt werden und dabei Erschütterungen ausgesetzt sind, stets in der gleichen Weise magnetisiert sind. Hämmer haben auf der nördlichen Halbkugel fast stets an dem beim Schlagen nach unten gerichteten Ende einen Nordpol, Feilen einen Nordpol an dem Ende, das bei der Benutzung am häufigsten gegen Norden gerichtet ist, die Eisenstangen von Regenschirmen an ihrem unteren Ende. Man kann eine Stange aus Eisen von nicht zu geringer Remanenz magnetisieren, indem man sie in die Richtung des erdmagnetischen Feldes — schräg nach unten und nach Norden — hält und einige kräftige Hammerschläge auf ihr eines Ende ausführt. Am unteren Ende entsteht dann ein Nordpol. Wiederholt man den Versuch nach Umdrehung der Stange, so kehren sich die Pole um. In allen diesen Fällen erleichtern die mit den betreffenden Gegenständen vorgehenden Erschütterungen durch die dabei vorübergehend eintretende Lockerung des inneren Gefüges die Magnetisierung.

349. **Magnetische Kraftlinien sind immer geschlossen.** Wir haben früher gesehen, daß die Kraftlinien des durch einen Strom erzeugten magnetischen Feldes stets geschlossene Kurven darstellen, die den stromführenden Leiter

umschließen. Bei den durch Magnetpole erzeugten Feldern haben wir aber bisher meist nur davon gesprochen, daß Kraftlinien von dem positiven Pol eines magnetischen Dipols ausgehen und auf den negativen Pol hin verlaufen. Nachdem wir nun wissen, daß die Magnetisierung eines Magneten auf der gleichsinnigen Orientierung seiner molekularen Dipole beruht, diese selbst aber ihre Dipoleigenschaft molekularen Kreisströmen verdanken, so folgt, daß auch diese Kraftlinien in sich geschlossen sind. Sie verlaufen nach ihrem Eintritt in den Südpol des Magneten in der Richtung vom Südpol zum Nordpol und treten dort wieder aus (vgl. dazu die schematischen Abb. 288 und 291). Magnetische Kraftlinien sind immer in sich geschlossen. Es gibt also keine wirbelfreien magnetischen Felder.

Hier liegt ein fundamentaler Unterschied zwischen den elektrischen und magnetischen Feldern vor. Elektrische Kraftlinien können zwar auch in sich geschlossen sein (§ 325), aber in den rein elektrostatischen Feldern haben sie stets einen Anfang auf einer positiven, ein Ende auf einer negativen Ladung. Daß das möglich ist, beruht auf der Tatsache, daß es wahre Elektrizitätsmengen gibt. Bei magnetischen Feldern ist es nicht möglich, weil es keinen wahren Magnetismus, sondern nur magnetische Dipole gibt.

Daher verlaufen auch bei einem elektrischen Dipol, im Gegensatz zu einem magnetischen Dipol, sämtliche Kraftlinien in der Richtung von der positiven zur negativen Ladung. Das Kraftlinienbild eines Elektreten (§ 234) ist also zwar im Außenraum dem eines Magneten ganz analog, in seinem Innern aber verlaufen die Kraftlinien gerade umgekehrt wie beim Magneten.

350. **Magnetischer Kraftfluß. Magnetischer Widerstand.** Es sei dF ein Flächenelement innerhalb eines magnetisierten Körpers, $\mathfrak{B}$ die durch ein Feld $\mathfrak{H}$ hervorgerufene Induktion am Ort von dF und $\sin(dF, \mathfrak{B})$ der Winkel zwischen dF und $\mathfrak{B}$. Dann bezeichnet man die Größe

$$d\Phi = \mathfrak{B} \sin(dF, \mathfrak{B})\, dF \text{ Gauß} \cdot \text{cm}^2 \tag{8a}$$

als den Kraftfluß durch das Flächenelement dF. Den Kraftfluß durch eine endliche Fläche F erhält man durch Integration der Gl. 8a über diese Fläche,

$$\Phi = \int \mathfrak{B} \sin(dF, \mathfrak{B})\, dF \text{ Gauß} \cdot \text{cm}^2 . \tag{8b}$$

Da im Vakuum $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$ ist, so durften wir in § 318, wo angenommen wurde, daß sich die Vorgänge im Vakuum abspielen, den Kraftfluß $\Phi = \int \mathfrak{H} \sin(dF, \mathfrak{H})\, dF$ setzen.

In einem länglichen und längs seiner Achse homogen magnetisierten Körper vom Querschnitt q herrscht der Kraftfluß $\Phi = \mathfrak{B} q = \mu \mathfrak{H} q$. Sei l die Länge des Körpers, so beträgt die magnetische Spannung des magnetisierenden Feldes $\mathfrak{H}$ zwischen den Enden des Körpers $M = \mathfrak{H} l$ (§ 316). Wir können demnach schreiben

$$\Phi = \mu \frac{q}{l} M . \tag{9}$$

Diese Gleichung ist dem Ohmschen Gesetz (§ 246) formal ganz analog; der Kraftfluß steht in Parallele zur Stromstärke, die magnetische Spannung zur elektrischen, und die Größe $\mu \frac{q}{l}$ setzt sich wie der reziproke Wert des elektrischen Widerstandes aus einer Materialkonstante μ und dem Formfaktor q/l zusammen. Man nennt daher

$$\frac{l}{\mu q} = R_m \tag{10}$$

den magnetischen Widerstand des Körpers. Man beachte, daß es sich hier lediglich um eine formale Analogie handelt. Denn während ein elektrischer Strom tatsächlich eine Bewegung elektrischer Ladungen gegen reibungsartige Kräfte

bildet, ist ja der magnetische Kraftfluß keineswegs ein Strom magnetischer Ladungen, da es ja solche gar nicht gibt. Und daher hat der Begriff des magnetischen Widerstandes nur formale Bedeutung. Seine Einführung ist aber insbesondere für die Technik nützlich. Denn in einfacheren Fällen gilt mit ziemlich weitgehender Genauigkeit der Satz, daß sich der magnetische Widerstand eines Systems von mehreren aneinander grenzenden (hintereinander geschalteten) ferromagnetischen Körpern additiv aus deren Einzelwiderständen zusammensetzt, wie das ja für elektrische Widerstände streng gilt.

351. **Theorie des Ferromagnetismus.** Während das para- und diamagnetische Verhalten auf Grund der Eigenschaften der einzelnen atomaren Dipole in der betreffenden Substanz erklärt werden kann (§ 338), genügt dies bei den Ferromagnetika nicht zur Deutung ihrer magnetischen Eigenschaften. Zur erschöpfenden Darstellung des heutigen Standes muß Kenntnis der neueren Quantentheorie vorausgesetzt werden, wir müssen uns daher hier mit einer Darstellung in groben Zügen begnügen. Den ferromagnetischen Stoffen ist mit den paramagnetischen Stoffen gemeinsam, daß sie magnetische Dipole enthalten, die sich unter der Wirkung eines äußeren Feldes in die Feldrichtung einzustellen suchen. Ein Ferromagnetikum unterscheidet sich aber dadurch von allen übrigen Stoffen, daß diese Dipole auch schon im unmagnetisierten Ferromagnetikum nicht völlig regellos angeordnet sind, wie das sonst der Fall ist, sondern daß sie in kleinen Bereichen, deren Größe allerdings sehr verschieden und noch nicht genau bekannt ist, infolge von zwischen ihnen wirkenden Kräften unter sich gleichsinnig gerichtet sind (sog. Elementarbezirke, Theorie von Weiss). So besteht also ein äußerlich bzw. als Ganzes unmagnetisches Stück Eisen aus einer meist sehr großen Zahl solcher Elementarbezirke, in denen die magnetischen Dipole sämtlich in gleicher Richtung orientiert sind. Diese Elementarbezirke bilden also als Ganzes magnetische Dipole. Ist das Stück Eisen nicht magnetisiert, so liegen die magnetischen Achsen der einzelnen Elementarbezirke bezüglich ihrer Richtung völlig regellos angeordnet, wie dies ganz schematisch Abb. 296a andeutet.

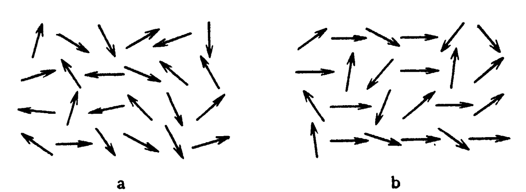


Abb. 296. Schema der Elementarmagnete. a im unmagnetisierten, b im teilweise magnetisierten Ferromagnetikum.

Wird jetzt das Stück Eisen in ein magnetisches Feld gebracht, so bewirkt dieses bei einem Teil der Elementarbezirke stetige Richtungsänderungen der einzelnen Dipole. Bei einem andern Teil bewirkt aber das Feld, daß die Dipolachsen der einzelnen Elementarbezirke als Ganzes plötzlich in die Feldrichtung umklappen, d. h. daß sich alle einzelnen Dipole, aus denen ein solcher Bezirk besteht, plötzlich gleichzeitig in die Feldrichtung einstellen. Das geschieht bei den einzelnen Elementarbezirken nicht bei der gleichen Feldstärke, sondern hängt u. a. von der ursprünglichen Orientierung ihrer magnetischen Momente zum Felde und von den mechanischen Spannungsverhältnissen ab. Wird also das magnetische Feld, in dem sich ein Stück Eisen befindet, allmählich gesteigert, so nimmt seine Magnetisierung zu, indem einerseits die Dipolachsen sich mehr und mehr in die Feldrichtung einstellen, andererseits aber einzelne Elementarbezirke in einer mit der Feldstärke ständig wachsenden Zahl vollkommen in die Feldrichtung umklappen (Abb. 296b). Ist bei ausreichend hoher Feldstärke dieser Prozeß an allen Elementarbezirken restlos vollzogen, so ist Sättigung eingetreten, und es kann keine weitere Magnetisierung erfolgen.

Die Erscheinung der Remanenz erklärt sich dadurch, daß die Elementarbezirke eine Tendenz haben, in der von ihnen einmal eingenommenen Orientierung zu verbleiben. Es findet daher ein Zurückklappen ihrer Achsenrichtungen in die ursprüngliche Richtung bei Schwächung des äußeren Feldes nicht bei der gleichen Feldstärke statt, bei der das Hineinklappen in die Feldrichtung bei der Magnetisierung erfolgte, sondern erst bei einer kleineren Feldstärke, und eine mehr oder weniger große Zahl von Elementarbezirken behält auch beim Verschwinden des äußeren Feldes die einmal eingenommene Orientierung noch ganz oder teilweise bei, das Stück Eisen behält remanenten Magnetismus. Um diesen zum Verschwinden zu bringen, ist ein magnetisierendes Feld von entgegengesetzter Richtung, als das ursprünglich magnetisierende, erforderlich, dessen Stärke (die Koerzitivkraft) davon abhängt, wie groß der Widerstand der Elementarbezirke gegen eine Änderung der einmal eingenommenen Orientierung ist. Die Gestalt der Hysteresisschleife (Abb. 289, § 343) wird damit verständlich.

352. BARKHAUSEN-Effekt. Der Versuch von EINSTEIN und DE HAAS. Das spontane Umklappen der Dipolachsen der Elementarbezirke wird sehr eindrucksvoll durch einen von BARKHAUSEN gefundenen Effekt demonstriert. Über einen Eisendraht ist eine Spule geschoben. Wird nun der Draht, etwa durch Annähern eines Magnetpols, magnetisiert, so vergrößert jedes Umklappen von Elementarbezirken die Induktion $\mathfrak{B}$ im Draht und erzeugt dadurch einen momentanen Induktionsstrom in der Spule. Dieser kann durch eine Verstärkungseinrichtung (§ 394) so sehr verstärkt werden, daß jeder Induktionsstoß als ein Knacken in einem eingeschalteten Telephon gehört werden kann, wenn die Magnetisierung langsam genug erfolgt. Bei schneller Änderung hört man ein prasselndes Rauschen.

Die Existenz der molekularen Kreisströme und ihre Einstellung in die Feldrichtung bei der Magnetisierung haben EINSTEIN und DE HAAS durch folgenden schönen Versuch bewiesen. Ein Eisenstab hängt vertikal in einer Spule. Beim Einschalten eines Stromes in der Spule, also bei der Magnetisierung des Eisens, erfährt dieses einen Drehimpuls um die Feldrichtung. Die Erklärung ist folgende. Im unmagnetisierten Eisen liegen die molekularen Kreisströme völlig ungeordnet, keine Richtung ihrer Dipolachsen ist bevorzugt. Jeder einzelne Kreisstrom besitzt wegen der Rotation der Elektronen einen mechanischen Drehimpuls. Die Vektorsumme aller Drehimpulse im Eisen ist jedoch wegen der völligen Unordnung gleich Null. Tritt nun beim Einschalten eines magnetisierenden Feldes eine Ausrichtung der Dipolachsen ein, so besteht nunmehr eine Vorzugsrichtung, und die Vektorsumme der molekularen Drehimpulse ist nicht mehr Null, sondern hat einen endlichen Wert. Nun gilt aber für den Drehimpuls ein Erhaltungssatz, und da dem Eisenstab als Ganzes kein Drehimpuls zugeführt wurde, so muß die Summe der in ihm enthaltenen Drehimpulse nach wie vor verschwinden. Infolgedessen erhält der Stab als Ganzes einen Drehimpuls, der die entgegengesetzte Richtung hat wie der bevorzugte Drehimpuls der in ihm umlaufenden molekularen Kreisströme.

Das magnetische Moment eines elementaren Kreisstromes ist nach § 310, Gl. 20, $\mathfrak{M} = \frac{1}{2}\varepsilon r^2 \omega$. Der Drehimpuls eines auf einer Kreisbahn vom Radius r mit der Frequenz ω umlaufenden Elektrons von der Masse m ist nach § 46, Gl. 34, $F = m r^2 \omega$. Demnach sollte das Verhältnis von magnetischem Moment zu Drehimpuls für jedes einzelne umlaufende Elektron $\mathfrak{M}/F = \varepsilon/2m$ sein, also gleich der halben spezifischen Ladung (§ 307) des Elektrons. Das gleiche Verhältnis muß dann auch für die Summe aller ausgerichteten Kreisströme und demnach für das magnetische Moment und den Drehimpuls des ganzen Eisen-

stabes gelten. Das Verhältnis $\mathfrak{M}/F$ wurde von EINSTEIN und DE HAAS und später genauer von andern gemessen. Dabei ergab sich der doppelte Wert des Verhältnisses $\varepsilon/2m$. Während also durch diesen Versuch die Existenz der molekularen Kreisströme eindeutig bewiesen wurde, ergab sich ein Widerspruch mit der Theorie, der jedoch später durch den Elektronenspin erklärt werden konnte (§ 512).

353. **Der CURIE-Punkt.** Wir haben bereits beim Kondensations- und Gefriervorgang einen Fall kennengelernt, wo die Temperaturbewegung der Moleküle der Herstellung einer höheren molekularen Ordnung entgegenwirkt. Auch bei der Magnetisierung eines Stoffes handelt es sich um eine solche, nämlich um die Herstellung einer einheitlichen Richtung der molekularen Dipole. Es ist ohne weiteres verständlich, daß infolge der Temperaturbewegung der Moleküle eine Tendenz zur Zerstörung einer solchen Ordnung bestehen kann. Tatsächlich wird die gleichsinnige Orientierung der Elementarbezirke, die charakteristische Eigenschaft der Ferromagnetika, bei steigender Temperatur zuerst allmählich vernichtet, und die Magnetisierbarkeit der Ferromagnetika wird schließlich bei einer bestimmten Temperatur, dem sog. CURIE-Punkt oder magnetischen Umwandlungspunkt, sprunghaft von sehr viel kleinerer Größenordnung, als bei tieferer Temperatur. Eisen unterhalb des CURIE-Punktes (769° C) nennt man α-Eisen, oberhalb desselben β-Eisen. α- und β-Eisen sind einander kristallographisch gleich. Aber das β-Eisen ist paramagnetisch. Bei 900° C verwandelt es sich in das sog. γ-Eisen, und seine Suszeptibilität sinkt noch einmal sprunghaft. Das γ-Eisen ist ebenfalls paramagnetisch und kristallographisch vom α- und β-Eisen verschieden. Der CURIE-Punkt des Nickels liegt bei 356°, der des Kobalts bei 1075°, der der HEUSLERschen Legierungen zwischen 60° und 380°.

Man sieht, daß der Ferromagnetismus keine Eigenschaft der Atome der ferromagnetischen Stoffe an sich ist, sondern von der Art ihrer Bindung abhängt.

354. **Eisenkerne in Spulen. Elektromagnete.** Wir haben in § 303 gesehen, daß eine stromdurchflossene Spule einem Stabmagneten äquivalent ist. Indem aus ihrem einen Ende Kraftlinien austreten und in das andere Ende wieder eintreten, entsprechen diese Enden den Polen eines Magneten. Die magnetischen Wirkungen einer solchen Spule sind jedoch im Außenraum bei normalen Stromstärken relativ schwach. Sie können aber außerordentlich verstärkt werden, wenn man das Innere der Spule mit einer ferromagnetischen Substanz, insbesondere mit Eisen, erfüllt. An die Stelle der Feldstärke $\mathfrak{H}$ im Innern der Spule tritt jetzt die sehr viel größere Induktion $\mathfrak{B}$, und die Zahl der aus den Enden der Spule austretenden Kraftlinien

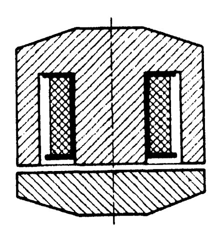


Abb. 297. Topfmagnet.

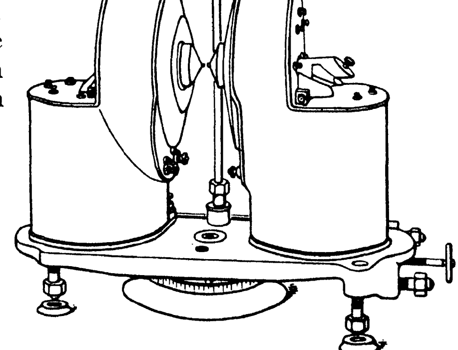


Abb. 298. Großer Elektromagnet.

wird sehr erheblich vergrößert. Die an den Enden des Eisenkörpers auftretende Magnetisierung $\mathfrak{J}$ macht das Eisen in der stromdurchflossenen Spule zu einem sehr starken Magneten, einem Elektromagneten.

Diese Tatsache ist von größter technischer Bedeutung, ja man kann sie als die Grundlage der gesamten Elektrotechnik bezeichnen.

Abb. 297 zeigt einen sog. Topfmagneten, bei dem die den Magneten erregende Spule ganz von Eisen umschlossen ist, und der sich durch ganz besonders starke Wirkung auszeichnet, weil praktisch keine Kraftlinien in den Außenraum treten, sondern alle Kraftlinien innerhalb des Eisenkörpers verlaufen, wenn der Anker anliegt. In Abb. 298 ist ein großer Elektromagnet für Laboratoriumszwecke dargestellt. Solche Elektromagnete können bei Verwendung einer Wasserkühlung mit sehr starken Strömen beschickt werden, und man erreicht zwischen ihren Polen, insbesondere wenn sie konisch geformt sind, wenigstens in kleinen Bereichen Feldstärken von vielen zehntausend Gauß.

355. **Kraftwirkungen magnetischer Felder auf para-, dia- und ferromagnetische Körper.** Jeder Körper, sei er para-, dia- oder ferromagnetisch, wird in einem magnetischen Felde zu einem magnetischen Dipol und erfährt infolgedessen drehende oder beschleunigende Kraftwirkungen, je nachdem, ob das Feld homogen oder inhomogen ist (§ 300).

Ebenso wie bei den Dielektrika die Kraftwirkungen eines elektrischen Feldes nach Größe und Richtung davon abhängen, ob das sie umgebende Medium eine größere oder kleinere Dielektrizitätskonstante hat, als sie selbst, so gilt das gleiche für ferro- und paramagnetische Körper, wenn wir an die Stelle des elektrischen das magnetische Feld, an die Stelle der Dielektrizitätskonstanten ε die Permeabilität μ setzen. Indem wir die bei den Dielektrika gemachten Ausführungen auf unsern Fall übertragen, können wir folgende Schlüsse ziehen. Im homogenen Felde stellt sich ein länglicher ferro- oder paramagnetischer Körper mit seiner Längsachse in die Feldrichtung ein, wenn seine Permeabilität größer ist als die des ihn umgebenden Mediums. (Hierbei ist von den nicht regulären Kristallen abgesehen, die ein kompliziertes Verhalten zeigen.) Im inhomogenen Felde wird er im gleichen Falle in Richtung wachsender Feldstärke gezogen. Ist jedoch seine Permeabilität kleiner als die des ihn umgebenden Mediums, so stellt er sich im homogenen Felde mit seiner Längsachse senkrecht zur Feldrichtung. Im inhomogenen Felde wird er in Richtung abnehmender Feldstärke getrieben. Durch Vorstehendes findet die Anziehung unmagnetischen Eisens durch einen Magneten (inhomogenes Feld) seine Erklärung.

Diamagnetische Körper verhalten sich in inhomogenen Feldern analog zu den paramagnetischen Körpern. Hat das sie umgebende Medium eine größere Permeabilität als sie selbst, so werden sie in Richtung abnehmender Feldstärke getrieben, andernfalls in Richtung wachsender Feldstärke. Hieraus ergibt sich aber ein unterschiedliches Verhalten im Vakuum (und bei Substanzen von nicht allzu kleiner Suszeptibilität auch in Luft). Die Permeabilität der paramagnetischen Stoffe ist größer, die der diamagnetischen kleiner als die des Vakuums. Daher werden paramagnetische Körper im inhomogenen Felde im Vakuum in Richtung wachsender, diamagnetische Körper in Richtung abnehmender Feldstärke getrieben. Zur Untersuchung von Substanzen auf Para- oder Diamagnetismus ist das sehr inhomogene Feld in der Nähe eines spitzen Polschuhs eines starken Magneten besonders geeignet. Paramagnetische Stoffe werden, sofern ihre Suszeptibilität größer als die der umgebenden Luft ist, genau wie ein Stück Eisen, nur sehr viel schwächer, vom Pol angezogen, diamagnetische Stoffe werden abgestoßen (Abb. 296).

In homogenen Feldern aber verhalten sich para- und diamagnetische Körper (wenn wir wieder von den komplizierteren Verhältnissen bei den nicht regulären Kristallen absehen) gleich. Dieses auf den ersten Blick überraschende Verhalten wird durch Abb. 300 erläutert. Die Ursache liegt in der Brechung

der Kraftlinien. Diese werden in den paramagnetischen Stoffen, wie beim Eisen, vom Einfallslot weg, bei den diamagnetischen Stoffen aber zum Einfallslot hin gebrochen (Gl. 7, § 347). Nun entstehen an den Eintritts- und Austrittsflächen des Körpers durch magnetische Induktion magnetische Belegungen, und diese sind bei den paramagnetischen und den diamagnetischen Körpern in entgegengesetztem Sinne zur Feldrichtung gegeneinander verschoben. In der Abb. 300 ist beim paramagnetischen Körper der Schwerpunkt der positiven Flächenbelegung nach rechts, der der negativen Flächenbelegung nach links verschoben. Bei dem diamagnetischen Körper ist es ebenso. Aber die Belegungen der entsprechenden Flächen haben in den beiden Fällen wegen des entgegengesetzten Vorzeichens von $\varkappa$ verschiedenes Vorzeichen. Beim paramagnetischen Körper bildet sich auf der der Feldrichtung entgegengewandten Fläche eine negative, auf der anderen Fläche eine positive Belegung. Beim diamagnetischen Körper ist es umgekehrt. Denkt man sich nun die vom äußeren Felde herrührende Kraft in den Schwerpunkten der beiden entgegengesetzten Ladungen angreifend, so sieht man aus der Abb. 300, daß in beiden Fällen ein gleichsinniges Drehmoment resultiert, nämlich ein solches, das den Körper mit seiner Längsachse in die Richtung des Feldes einzustellen sucht.

Abb. 299. a) Paramagnetischer, b) diamagnetischer Körper im inhomogenen Felde.

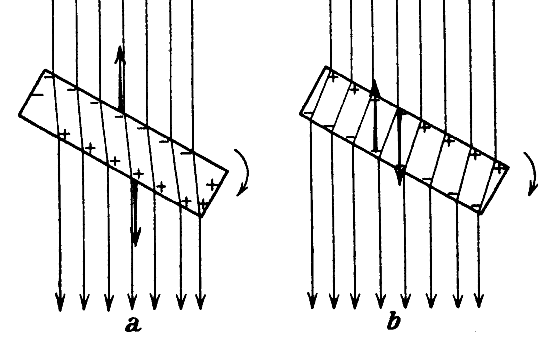


Abb. 300. a) Paramagnetischer, b) diamagnetischer Körper im homogenen Felde.

Die Kraftwirkung inhomogener Felder wird zum Nachweis der magnetischen Natur von Substanzen und zur Messung ihrer Permeabilität benutzt. Für Flüssigkeiten ist die sog. Steighöhenmethode in Gebrauch. Man bringt die Flüssigkeit in ein U-förmiges Glasrohr, dessen einen Schenkel man zwischen die Pole eines Magneten setzt. Der andere Schenkel befindet sich außerhalb des Feldes des Magneten. Ist die Flüssigkeit para- oder ferromagnetisch, so wird sie im Rohr hochgezogen, ist sie diamagnetisch, so wird sie herabgedrückt. Aus der Stärke der Wirkung kann man die Suszeptibilität berechnen.

Wenn auch die Kräfte, die in magnetischen Feldern auf para- und diamagnetische Substanzen wirken, klein sind gegenüber den auf Eisen ausgeübten Kräften, so ist es doch gelungen, sie dazu zu benutzen, um in technischem Maßstabe Substanzen verschiedenen magnetischen Verhaltens voneinander zu trennen. Es st dies heute ein wichtiges Erzscheideverfahren.

356. Das COULOMBsche Gesetz für Magnetpole in materiellen Medien. Das COULOMBsche Gesetz für Magnetpole in der Form der Gl. 2, § 298, bezog sich auf den Fall, daß sich die beiden Pole im Vakuum ($\mu = 1$), oder, was nahezu das gleiche ist, in Luft befinden, und gilt streng nur für diesen Fall. Ist aber $\mu > 1$ oder < 1, so gelten Überlegungen der gleichen Art, wie wir sie bezüglich des COULOMBschen Gesetzes für elektrische Ladungen, die sich in einem materiellen Medium befinden, angestellt haben (§ 236). Unter der Wirkung des von den Polen ausgehenden magnetischen Feldes wird das umgebende Medium magnetisch polari-

siert, und es bilden sich auf der Oberfläche der Pole magnetische Belegungen (eine Magnetisierung $\mathfrak{J}$) aus, deren Wirkung auf den zweiten Pol sich der Wirkung des ersten überlagert. Diese magnetische Belegung hat bei einer para- oder ferromagnetischen Substanz das entgegengesetzte Vorzeichen, wie der Pol selbst, bei einer diamagnetischen Substanz aber das gleiche Vorzeichen. In einem para- oder ferromagnetischen Medium wird daher die Anziehung der beiden Pole gegenüber derjenigen im Vakuum verringert, in einem diamagnetischen Medium aber vergrößert. Durch eine ganz analoge Überlegung, wie wir sie bei dem COULOMBschen Gesetz für elektrische Ladungen angestellt haben, folgt, daß das allgemeine COULOMBsche Gesetz für Magnetpole lautet:

$$k = \frac{1}{\mu} \frac{m_1 m_2}{r^2} \text{ dyn.} \tag{11}$$

Die zwischen zwei Polen wirkende Kraft ist also in einem para- oder ferromagnetischen Medium kleiner, in einem diamagnetischen Medium größer als im Vakuum.

357. **Das Induktionsgesetz in materiellen Medien.** Wir haben gesehen, daß die wahre magnetische Feldstärke in einer magnetisierten Substanz nicht das magnetisierende Feld $\mathfrak{H}$, sondern die Induktion $\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$ ist, und es ist schon in § 336 gezeigt worden, daß die Stärke der elektromagnetischen Induktion zwischen zwei Leitern nicht von der Änderung von $\mathfrak{H}$, sondern von derjenigen von $\mathfrak{B}$ abhängt. Denn die Wirkungen des in § 337 eingeführten zusätzlichen Feldes $\mathfrak{H}'$ addieren sich zu denjenigen des magnetisierenden Feldes $\mathfrak{H}$. Das FARADAYsche Induktionsgesetz in der Form der Gl. 26a (§ 318) gilt deshalb nur im Vakuum, wo $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$ ist, in allen materiellen Medien ist $\mathfrak{B}$ an die Stelle von $\mathfrak{H}$ zu setzen, so daß wir das FARADAYsche Induktionsgesetz allgemein in der Form

$$E = \frac{d}{dt}\int \mathfrak{B} \sin(dF, \mathfrak{B})\, dF \text{ el. magn. Einh.} \tag{12a}$$

zu schreiben haben. Hingegen bleibt die Gl. 26b (§ 318),

$$E = \frac{d\Phi}{dt} \text{ el. magn. Einh.,} \tag{12b}$$

erhalten, denn sie ist auf Grund der allgemeinen Definition des Kraftflusses Φ (§ 350, Gl. 8b) mit Gl. 12a identisch.

Da bei Anwesenheit eines Mediums von der Permeabilität μ die induzierte elektromotorische Kraft μ mal größer wird als im Vakuum, so wird auch der Koeffizient der gegenseitigen Induktion (§ 302) und der Selbstinduktionskoeffizient (§ 333) μ mal größer, wenn wir die betreffenden Leiter aus dem Vakuum in ein Medium der Permeabilität μ bringen. An Stelle der nur im Vakuum — sehr nahezu auch in Luft — gültigen Gl. 40, § 333, gilt allgemein für die Induktivität einer langen Spule bzw. einer Ringspule

$$L = \frac{FN^2}{l} 4\pi\mu = Fn^2 l \cdot 4\pi\mu. \tag{13}$$

(Dabei ist von der Entmagnetisierung [§ 345] bei geraden Spulen abgesehen.)

Bei allen para- und diamagnetischen Stoffen ist der Unterschied von μ gegen 1 so klein, daß er bei der Selbstinduktion praktisch zu vernachlässigen ist. Hingegen bewirkt die Anwesenheit eines ferromagnetischen Stoffes, insbesondere von Eisen, eine sehr beträchtliche Vergrößerung der Induktivität.

Durch das Hinzutreten der Permeabilität μ ergibt sich jetzt zu den drei in § 318 diskutierten Möglichkeiten eine vierte mögliche Ursache von Induktionswirkungen, nämlich die Veränderung von μ. In einer Spule, die, wie in § 336 (Abb. 287) beschrieben, von einer zweiten, mit einem ballistischen Galvano-

meter verbundenen Spule umgeben ist, fließe ein konstanter Strom, so daß auch das Spulenfeld $\mathfrak{H}$ konstant ist. Wird in die Spule nunmehr ein Eisenkern hineingeschoben, so zeigt ein starker Ausschlag des ballistischen Galvanometers eine Induktionswirkung an, die während des Hineinschiebens des Eisenkerns andauert und erst verschwindet, wenn der Eisenkern zur Ruhe gekommen ist. Die Induktionswirkung hat ihren Grund darin, daß beim Einschieben des Eisenkerns zu dem Spulenfelde $\mathfrak{H}$ das sehr viel stärkere zusätzliche Feld $\mathfrak{H}'$ hinzugekommen ist, d. h. daß die Feldstärke $\mathfrak{H}$ durch die Induktion $\mathfrak{B}$ im Eisen ersetzt wird, wodurch der die zweite Spule durchsetzende Kraftfluß außerordentlich vermehrt wird.

358. **Die Energie des magnetischen und des elektromagnetischen Feldes.** Wir haben bereits in § 329 erwähnt, daß ein magnetisches Feld der Sitz magnetischer Energie ist. Zur Berechnung dieser Energie wollen wir von dem Felde im Innern einer Ringspule ausgehen. Die in einem solchen Leiter in der Zeit dt geleistete Stromarbeit ist, wenn E die elektromotorische Kraft der Stromquelle, $E_i = -L\,di/dt$ die induzierte elektromotorische Kraft der Selbstinduktion (§ 333) ist,

$$dA = (E + E_i)\,i\,dt = \left(E - L\frac{di}{dt}\right) i\,dt = E\,i\,dt - L\,i\,di$$

(§ 260). In einem praktisch selbstinduktionsfreien Leiter, also einem solchen, der nur ein sehr schwaches magnetisches Feld hat (z. B. ein gerader Draht), ist die Stromarbeit $dA = E\,i\,dt$, also um den Betrag $L\,i\,di$ größer. Aus der Stromquelle jedoch wird bei der Stromstärke i stets die Energie $E\,i\,dt$ entnommen. Die Differenz $L\,i\,di$ tritt in unserem Falle nicht als JOULEsche Wärme im Leiter in die Erscheinung, sondern sie dient zum Aufbau des magnetischen Feldes. Es wächst also in der Zeit dt die Feldenergie um den Betrag

$$dA_m = L\,i\,di \text{ erg}. \tag{14}$$

Durch Integration ergibt sich hieraus, wenn wir über die Zeit vom Einschalten des Spulenstroms ($i = 0$) bis zum praktischen Konstantwerden des Stromes $i = E/R$ (§ 333) integrieren,

$$A_m = \tfrac{1}{2} L\,i^2 \text{ erg}. \tag{15}$$

Wenn wir nach Gl. 13, § 357, noch den Ausdruck für die Induktivität L einführen und berücksichtigen, daß die Induktion in der Spule $\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H} = 4\pi n i \mu$ ist, erhalten wir schließlich

$$A_m = \frac{1}{8\pi\mu}\mathfrak{B}^2 F\,l = \frac{\mu}{8\pi}\mathfrak{H}^2 F\,l \text{ erg}. \tag{16}$$

Das Feld ist auf den Innenraum der Spule beschränkt, dessen Volumen gleich $F\,l$ ist. Demnach entfällt auf die Volumeinheit die Energie

$$\varrho_m = \frac{1}{8\pi\mu}\mathfrak{B}^2 = \frac{\mu}{8\pi}\mathfrak{H}^2 \text{ erg/cm}^3. \tag{17}$$

Dies ist die Energiedichte des magnetischen Feldes. Die Gl. 17 gilt für jedes magnetische Feld unter der Voraussetzung daß $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ einander proportional, also μ eine Konstante ist. Bei den Ferromagnetika ist das nicht der Fall, und bei diesen tritt deshalb an die Stelle der Gl. 17 ein etwas komplizierterer Ausdruck.

Es ist daher die Gesamtenergiedichte eines elektromagnetischen Feldes (§ 234, Gl. 26)

$$\varrho = \varrho_e + \varrho_m = \frac{1}{8\pi}(\varepsilon\mathfrak{E}^2 + \mu\mathfrak{H}^2) \text{ erg/cm}^3. \tag{18}$$

Dabei haben wir ε und $\mathfrak{E}$ im elektrostatischen Maße, μ und $\mathfrak{H}$ im magnetischen Maße angesetzt.

359. **Die MAXWELLschen Gleichungen.** In Abb. 301 ist ein in der Zeichnungsebene — der xy-Ebene — liegendes rechteckiges Flächenelement mit den Seiten dx und dy dargestellt. Senkrecht zu diesem Flächenelement stehe ein zeitlich veränderliches elektrisches Feld $\mathfrak{E}_z$. Infolgedessen tritt durch das Flächenelement ein Verschiebungsstrom (§ 326) vom Betrage $i_v = \frac{\varepsilon}{4\pi c^2} \cdot \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t} dx dy$. Ist $d\mathfrak{E}_z/dt$ positiv, i_v also in Richtung der positiven z-Achse nach hinten gerichtet, so umlaufen die magnetischen Kraftlinien des Verschiebungsstromes diesen im Sinne des Uhrzeigers, wie man an Hand der in § 302 angegebenen Regeln feststellen kann. Die Komponente der magnetischen Feldstärke längs der Strecke AB sei $\mathfrak{H}_x$, längs AD $\mathfrak{H}_y$. Dann ist wegen der Kleinheit der Strecken dx und dy die Feldstärke längs BC gleich $\mathfrak{H}_y + \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} dx$ und längs CD gleich $\mathfrak{H}_x + \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y} dy$. Wir bilden jetzt die Summe der magnetischen Spannungen $\mathfrak{H}_s ds$ längs der vier Seiten des Rechtecks, indem wir, bei A beginnend, das Rechteck einmal im Sinne des Uhrzeigers umlaufen. Dabei sind diejenigen Anteile, die beim Durchlaufen einer Seite in der positiven Koordinatenrichtung gewonnen werden (AD, DC) mit dem positiven Vorzeichen, die übrigen (CB, BA) mit dem negativen Vorzeichen zu versehen. Wir erhalten so die magnetische Spannung bei einem vollen Umlauf um den Verschiebungsstrom i_v, und diese ist nach § 316 gleich $4\pi i_v = \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t} dx\, dy$. Es ist demnach

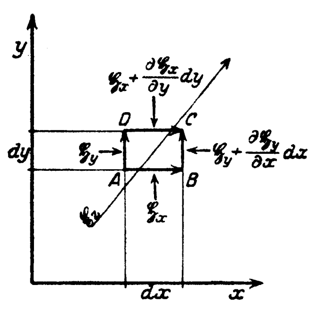


Abb. 301. Zur Ableitung der ersten MAXWELLschen Gleichung.

$$\frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t} dx\, dy = \mathfrak{H}_y dy + \left(\mathfrak{H}_x + \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y} dy\right) dx - \left(\mathfrak{H}_y + \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} dx\right) dy - \mathfrak{H}_x dx$$
$$= \left(\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x}\right) dx\, dy.$$

Dividieren wir dies durch die Rechtecksfläche $dx\, dy$, so folgt die 1. MAXWELLsche Gleichung (1864),

$$\frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x}. \tag{19}$$

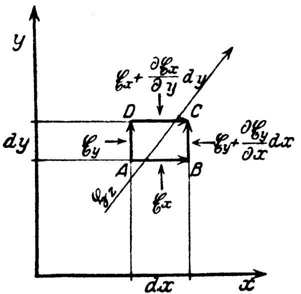


Abb. 302. Zur Ableitung der zweiten MAXWELLschen Gleichung.

Nunmehr stellen wir eine ganz analoge Betrachtung für ein senkrecht zur Zeichnungsebene stehendes, zeitlich veränderliches magnetisches Feld $\mathfrak{H}_z$ an (Abb. 302). Die Kraftlinien des zeitlich veränderlichen Feldes $\mathfrak{H}_z$ sind nach § 325 von elektrischen Kraftlinien ringförmig umgeben, und zwar umlaufen diese Kraftlinien, wie man aus den früher angegebenen Regeln feststellen kann, in unserm Falle die magnetischen Kraftlinien gegen den Sinn des Uhrzeigers. Es sei die Komponent der elektrischen Feldstärke längs AB gleich $\mathfrak{E}_x$, längs AD gleich $\mathfrak{E}_y$. Dann ergeben sich die Komponenten längs der Seiten BC und CD, analog zu den obigen Betrachtungen so, wie in Abb. 302 angegeben. Nunmehr bilden wir, indem wir das Rechteck einmal gegen den Uhrzeigensinn — von A über B, C, D nach A zurück — umlaufen, die Summen der elektrischen Teilspannungen längs

der Rechtecksseiten, die gleich dem Produkt aus dem Weg und der Komponente der Feldstärke in der Wegrichtung sind. Dabei ist wieder darauf zu achten, ob wir eine Seite in der positiven (AB, BC) oder der negativen Koordinatenrichtung (CD, DA) durchlaufen. Die Summe der Teilspannungen längs dieses geschlossenen Weges ist aber gleich der im Umfang des Rechtecks herrschenden, vom zeitlich veränderlichen Felde $\mathfrak{H}_z$ induzierten elektromotorischen Kraft, und diese ist im vorliegenden Falle nach Gl. 12a, § 357, gleich $\frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial t} dx\, dy = \mu \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} dx\, dy$. Somit erhalten wir

$$\mu \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} dx\, dy = \mathfrak{E}_x dx + \left(\mathfrak{E}_y + \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x} dx\right) dy - \left(\mathfrak{E}_x + \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y} dy\right) dx - \mathfrak{E}_y dy$$
$$= \left(\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y}\right) dx\, dy.$$

Dividieren wir wieder durch die Fläche $dx\, dy$, so erhalten wir die 2. MAXWELLsche Gleichung,

$$\mu \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} = -\left(\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x}\right). \tag{20}$$

Den Gl. 19 und 20 entsprechende Gleichungen gelten nun auch für die übrigen Koordinatenrichtungen. Sie entstehen aus ihnen durch zyklische Vertauschung. Man erhält so ein System von sechs Gleichungen, die man in vektorieller Schreibweise zu zwei Gleichungen zusammenfassen kann

$$\varepsilon \frac{d\mathfrak{E}}{dt} = \frac{d\mathfrak{D}}{dt} = c^2 \operatorname{rot} \mathfrak{H}, \tag{21a}$$

$$\mu \frac{d\mathfrak{H}}{dt} = \frac{d\mathfrak{B}}{dt} = -\operatorname{rot} \mathfrak{E}. \tag{21b}$$

($\mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E}$ ist die dielektrische Verschiebung, § 235.) Dabei sind $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ im elektromagnetischen Maßsystem gemessen. Messen wir jedoch $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$ im elektrostatischen Maße, so ergibt sich an Hand des § 313 die in $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ bzw. $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{B}$ bis auf das Vorzeichen symmetrische Form

$$\varepsilon \frac{d\mathfrak{E}}{dt} = \frac{d\mathfrak{D}}{dt} = c \operatorname{rot} \mathfrak{H}, \tag{22a}$$

$$\mu \frac{d\mathfrak{H}}{dt} = \frac{d\mathfrak{B}}{dt} = -c \operatorname{rot} \mathfrak{E}. \tag{22b}$$

Tritt durch die betrachtete Fläche noch ein Leitungsstrom von der Stromdichte j_l, so ist, wie man ohne Mühe ableiten kann, zur rechten Seite der Gl. 21a noch $4\pi c^2 j_l$, zur rechten Seite der Gl. 22a noch $4\pi j_l$ zu addieren.

Die MAXWELLschen Gleichungen bilden die Grundgleichungen der Elektrodynamik und beherrschen auch die Theorie des Lichtes.

360. Thermomagnetische und galvanomagnetische Erscheinungen. Unter dieser Bezeichnung faßt man eine Reihe von Erscheinungen zusammen, die durch Einwirkung eines magnetischen Feldes auf einen elektrischen oder Wärmestrom in Metallen eintreten. Je zwei dieser Effekte, ein thermischer und ein elektrischer, bilden ein sich entsprechendes Paar.

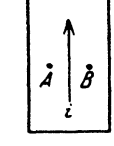


Abb. 303. Zu den thermomagnetischen und galvanomagnetischen Effekten.

1a. HALL-Effekt. Die in Abb. 303 dargestellte Metallplatte werde in Richtung des Pfeils von einem elektrischen Strom i durchflossen. A und B seien zwei Punkte gleichen Potentials, was etwa dadurch festgestellt sei, daß durch einen sie verbindenden Stromkreis mit Galvanometer kein Strom fließt. Wird ein auf der Metallplatte senkrecht stehendes magnetisches Feld erregt, so entsteht zwischen A und B eine elektrische Spannung, die der magnetischen Feldstärke proportional ist.

1b. NERNST-(ETTINGSHAUSEN-)Effekt. Thermische Analogie zum Effekt 1a. Der Pfeil in Abb. 303 stellt jetzt einen Wärmestrom dar. Zwei Punkte A und B, welche ohne magnetisches Feld keine Temperaturdifferenz zeigten, zeigen eine solche bei Erregung eines zur Platte senkrechten Feldes.

2. Thermomagnetische Transversaleffekte. a) Bei der gleichen Anordnung wie beim HALL-Effekt entsteht zwischen A und B auch eine Temperaturdifferenz (RIGHI-LEDUC-Effekt).

b) Thermische Analogie: Bei der gleichen Anordnung wie bei 1b entsteht zwischen A und B auch eine elektrische Spannung (ETTINGSHAUSEN-Effekt).

3. Änderung des Leitvermögens. a) Erregung eines magnetischen Feldes vermindert das elektrische Leitvermögen eines Metalls (THOMSON-Effekt).

b) Erregung eines magnetischen Feldes vermindert das Wärmeleitvermögen des Metalls (MAGGI-RIGHI-LEDUC-Effekt).

4. Thermomagnetische Longitudinaleffekte. a) Fließt durch die Platte ein Wärmestrom, so entsteht in ihr eine dem Wärmestrom entgegengesetzte Spannung (ETTINGSHAUSEN-NERNST-Effekt).

b) Die elektrische Analogie zu diesem Effekt besteht in dem Auftreten eines Temperaturgefälles längs eines stromdurchflossenen Leiters (NERNST-Effekt).

Diese Erscheinungen können zum Teil durch die Einwirkung des magnetischen Feldes auf die im Metall bewegten Elektronen erklärt werden. Doch fehlt es bis heute noch an einer vollständigen Theorie.

Die genannten Effekte sind beim Wismut besonders ausgeprägt und nur bei ihm sämtlich beobachtet worden. Nach LENARD benutzt man die Widerstandsänderung einer flachen Wismutspirale zur Messung der Stärke magnetischer Felder (Effekt 3a).

361. Dimensionen der magnetischen Größen im CGS-System. Da die magnetische Polstärke m im COULOMBschen Gesetz des Magnetismus in der gleichen Weise mit Kraft und Länge kombiniert auftritt wie die Elektrizitätsmenge e im COULOMBschen Gesetz der Elektrostatik, so ergibt sich für m die gleiche Dimension im CGS-System wie für e im elektrostatischen Maßsystem. Das gleiche gilt für die magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}$ und die magnetische Spannung M bezüglich der entsprechenden elektrischen Größen $\mathfrak{E}$ und U im elektrostatischen Maßsystem. Die Permeabilität μ und die Suszeptibilität $\varkappa$ sind reine Zahlen. Die Induktion $\mathfrak{B}$ ist eine Feldstärke; die gleiche Dimension hat die Magnetisierung $\mathfrak{J}$, wie man aus Gl. 4, § 340, erkennt. Es ergibt sich daher die nachstehende Tab. 29.

Tabelle 29. Dimensionen der magnetischen Größen.

Polstärke m	$\lvert m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{3}{2}} t^{-1} \rvert$,
Magnetisches Moment $\mathfrak{M}$	$\lvert m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{5}{2}} t^{-1} \rvert$,
Feldstärke $\mathfrak{H}$, Induktion $\mathfrak{B}$, Magnetisierung $\mathfrak{J}$	$\lvert m^{\frac{1}{2}} l^{-\frac{1}{2}} t^{-1} \rvert$,
Magnetische Spannung M	$\lvert m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{1}{2}} t^{-1} \rvert$,
Permeabilität μ, Suszeptibilität $\varkappa$	$\lvert m^0 l^0 t^0 \rvert$.

362. Die magnetischen Größen im praktischen Maßsystem. Die in den Kap. 25 und 26 benutzten Definitionen und Einheiten für die magnetischen Größen sind diejenigen, die in der reinen Physik im allgemeinen üblich sind. In der Technik liegt aber der Definition dieser Größen ein vollkommen anderer Gedankengang zugrunde. Da die praktischen Definitionen und Einheiten neuerdings auch in physikalische Lehrbücher Eingang gefunden haben, so entstehen für den Anfänger zunächst beträchtliche Schwierigkeiten, und er gerät leicht in Verwirrung. Aus

diesem Grunde soll hier zunächst noch einmal der von uns verfolgte Gedankengang in kurzen Zügen dargelegt werden, um anschließend den Gedankengang auseinanderzusetzen, der zur Aufstellung der praktischen Definition der magnetischen Größen und ihrer praktischen Einheiten geführt hat.

Wir sind von dem Begriff der Polstärke ausgegangen und haben ihre Einheit durch die Festsetzung definiert, daß das COULOMBsche Gesetz für Magnetpole im Vakuum ohne Konstante geschrieben werden soll (§ 298). Daran schloß sich die Definition der magnetischen Feldstärke als die in einem magnetischen Felde auf den Einheitspol wirkende Kraft, wobei die Kraft in dyn gemessen wird. Die Einheit der Feldstärke haben wir 1 Gauß genannt. Weiter haben wir die elektromagnetische Einheit der Stromstärke dadurch definiert, daß das LAPLACEsche Gesetz ohne die Konstante $1/c$ geschrieben werden soll (§ 304). Auf Grund dieser Festsetzungen ergab sich, was für das Folgende anzumerken wichtig ist, die magnetische Feldstärke im Innern einer langen, gestreckten Spule zu

$$\mathfrak{H} = \frac{4\pi N i}{l} \text{ Gauß} \tag{19}$$

(§ 304). Die spezielle Form dieser Gleichung, insbesondere auch der Zahlenfaktor 4π, ist eine Konsequenz der vorerwähnten Festsetzungen. Wir definierten schließlich die Induktion $\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}$ als das wahre durchschnittliche Feld in einer magnetisierten Substanz, maßen sie demnach auch in der Einheit 1 Gauß. Die Permeabilität μ ist daher nach unseren Festsetzungen eine reine Zahl, ebenso die Suszeptibilität $\varkappa$.

Das praktische magnetische Maßsystem basiert unmittelbar auf dem praktischen elektrischen Maßsystem, also auf den Einheiten Ampere, Volt usw. Der Definition der magnetischen Feldstärke und der Festsetzung ihrer Einheit wird die praktisch wichtigste und einfachste Feldform zugrunde gelegt, das Feld in einer langen, gestreckten Spule. Das magnetische Feld in einer solchen Spule ist nach der obigen Gl. 19 der Stromstärke i, der Zahl N der Spulenwindungen und der Länge l der Spule, also der Größe Ni/l, proportional. Man nennt das Produkt Ni, wenn i in Ampere gemessen wird, die Amperewindungszahl der Spule, und die Größe Ni/l hat also die Bedeutung Amperewindungszahl/cm. Im praktischen magnetischen Maßsystem wird nun festgesetzt, daß die Feldstärke $\mathfrak{H}$ in einer Spule unmittelbar durch die Größe Ni/l gemessen werden soll, und daher gilt als Einheit der Feldstärke $\mathfrak{H}$ die Einheit dieser Größe, i in Ampere gemessen, also 1 Amperewindungszahl/cm oder meist kürzer 1 Amperewindung/cm. Es ist also die Feldstärke in einer langen gestreckten Spule hiernach

$$\mathfrak{H} = \frac{N i}{l} = n i \text{ Amperewindungen/cm}, \tag{20}$$

wobei $n = N/l$ die auf 1 cm der Spulenlänge entfallende Windungszahl ist. Dieser Ausdruck unterscheidet sich von der Gl. 19 formal nur durch das Fehlen des Zahlenfaktors 4π. Aber es ist zu beachten, daß als Stromeinheit in Gl. 19 die elektromagnetische Einheit gleich 10 Ampere, in Gl. 20 das Ampere zu verwenden ist. Führen wir in Gl. 19 statt der elektromagnetischen Einheit der Stromstärke das Ampere ein, so ist die rechte Seite mit dem Faktor 1/10 zu multiplizieren, wenn wieder der richtige Wert der Feldstärke in Gauß herauskommen soll. Es folgt also, wenn wir das gleiche Feld einmal in Gauß, einmal in Amperewindungen/cm ausdrücken, und die Stromstärke in beiden Fällen in Ampere messen

$$\mathfrak{H} = 0{,}4\pi\, n i/l \text{ Gauß} = n i/l \text{ Amperewindungen/cm}$$

oder

$$1 \text{ Amperewindung/cm} = 0{,}4\pi \text{ Gauß} = 1{,}257 \text{ Gauß}.$$

Die praktische Einheit der magnetischen Feldstärke ist also rund 26% größer als das Gauß.

Die Induktion $\mathfrak{B}$ wird im praktischen Maßsystem durch die Induktionswirkung definiert. Nach § 357 ist die elektromotorische Kraft, die in einer senkrecht zum veränderlichen Felde $\mathfrak{H}$ stehenden Spule induziert wird,

$$E = F \cdot \frac{d\mathfrak{B}}{dt}, \quad \text{also} \quad \mathfrak{B} = \frac{1}{F}\int E\,dt \ \text{Volt} \cdot \text{sec/cm}^2. \tag{21}$$

Mißt man die elektromotorische Kraft $\mathfrak{E}$ in Volt, so wird das Integral $\int E\,dt$ in Volt $\times$ sec gemessen oder, wie man kürzer sagt, in Voltsekunden. Auf Grund der Gl. 21 wird nun die Induktion $\mathfrak{B}$ im praktischen Maßsystem in den gleichen Einheiten gemessen wie die rechte Seite dieser Gleichung, also in Voltsekunden $/\text{cm}^2$. Die Gl. 21 gilt auch in dem von uns benutzten Maßsystem, nur wird die linke Seite in Gauß, die rechte in elektromagnetischen Spannungseinheiten $\times$ sec/cm^2 gemessen. Da nun 1 Volt $= 10^8$ elektromagnetischen Spannungseinheiten ist, so ist, wenn wir $\mathfrak{B}$ in Gauß ausdrücken, die elektromotorische Kraft E aber in Volt messen wollen,

$$\mathfrak{B} \ \text{Gauß} = 10^{-8}\,\mathfrak{B} \ \text{Voltsekunden/cm}^2$$

oder

$$1 \ \text{Gauß} = 10^{-8} \ \text{Voltsekunden/cm}^2.$$

Die Beziehung $\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}$ wird auch im praktischen Maßsystem aufrechterhalten. Daraus ergibt sich aber, daß die Permeabilität μ in diesem System keine reine Zahl mehr ist und auch einen andern absoluten Betrag hat als im elektromagnetischen System. Wir wollen zur Unterscheidung die im praktischen Maßsystem gemessenen Größen hier mit dem Index p bezeichnen. Dann ist also $\mathfrak{B}_p = \mu_p\mathfrak{H}_p$. Im elektromagnetischen Maßsystem gilt $\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}$. Es folgt

$$\mu_p = \mu \cdot \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{H}_p}\,\frac{\mathfrak{B}_p}{\mathfrak{B}}\,\frac{\text{Voltsekunden/cm}^2}{\text{Amperewindungen/cm}}.$$

Nun ist aber $\mathfrak{H}/\mathfrak{H}_p = 0{,}4\pi = 1{,}257$ und $\mathfrak{B}_p/\mathfrak{B} = 10^{-8}$, so daß

$$\mu_p = \mu \cdot 1{,}257 \cdot 10^{-8}\,\frac{\text{Voltsekunden/cm}^2}{\text{Amperewindungen/cm}}.$$

Demnach sind die im praktischen Maßsystem gemessenen Permeabilitäten aller Stoffe um den Faktor $1{,}257 \cdot 10^{-8}$ kleiner, als im elektromagnetischen Maßsystem. Die Permeabilität des Vakuums, die im letzteren System den Wert 1 hat, hat im praktischen Maßsystem den Zahlenwert $1{,}257 \cdot 10^{-8}$. Vom Standpunkt des praktischen Maßsystems erscheinen die Permeabilitäten des elektromagnetischen Systems als relative, d. h. auf das Vakuum bezogene Größen.

27. Kapitel.

Elektromagnetische Meßinstrumente, Apparate und Maschinen.

363. **Tangentenbussole.** Eine Tangentenbussole besteht aus einer kreisförmigen, vertikal aufgestellten Stromschleife, oder aus einer kleinen Zahl von derartigen, dicht nebeneinanderliegenden Schleifen, in deren Mittelpunkt sich eine meist auf einer Spitze drehbare Magnetnadel befindet, deren Einstellung man auf einer Kreisteilung ablesen kann (Abb. 304). Die Tangentenbussole wird so aufgestellt, daß die Ebene der Stromschleife in der Richtung

der Horizontalkomponente des erdmagnetischen Feldes liegt, die Magnetnadel also in dieser Ebene steht, wenn kein Strom fließt. Schickt man einen Strom durch die Schleife, so entsteht ein senkrecht zur Schleifenebene gerichtetes magnetisches Feld, welches den Magneten ablenkt. Die Stärke des Feldes in der Mitte der Schleife ist nach Gl. 9, § 304, $\mathfrak{H}_i = 2\pi i/r$ bzw. bei n Windungen $\mathfrak{H}_i = 2\pi n i/r$ Gauß (i in elektromagnetischen Einheiten gemessen). Die Stärke der Horizontalkomponente des erdmagnetischen Feldes sei $\mathfrak{H}_e$. Dann addieren sich die beiden senkrecht aufeinanderstehenden Felder nach dem Parallelogrammsatz zum Felde $\mathfrak{H}$ (Abb. 305). In der Richtung dieses Feldes stellt sich die Magnetnadel ein. Man entnimmt aus der Abbildung, daß der Ablenkungswinkel der Magnetnadel durch

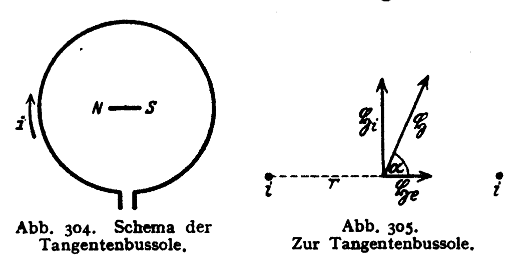


Abb. 304. Schema der Tangentenbussole.

Abb. 305. Zur Tangentenbussole.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\mathfrak{H}_i}{\mathfrak{H}_e} = \frac{2\pi n i}{r \mathfrak{H}_e}$$

gegeben ist.

Ist die Stärke des erdmagnetischen Feldes und sind die geometrischen Abmessungen der Stromschleife bekannt, so kann man hieraus den Strom i berechnen. Das Instrument könnte daher im Prinzip als Strommeßinstrument dienen. In der Praxis geschieht dies nicht mehr, weil das Instrument viel zu unempfindlich, zu unbequem zu handhaben und zu vielen Störungen ausgesetzt ist. Verwendung findet es z. B., indem man mit ihm nicht i, sondern mittels eines bekannten i die Horizontalkomponente $\mathfrak{H}_e$ des erdmagnetischen Feldes mißt.

364. **Nadelgalvanometer.** Bei den Nadelgalvanometern wird die Ablenkung einer Magnetnadel zur Strommessung benutzt. (Erste Konstruktion durch SCHWEIGGER und POGGENDORFF 1820, sog. Multiplikator.) Das einfachste Nadelgalvanometer wäre die Tangentenbussole. Um Vorteile gegenüber dieser zu erzielen, müssen zwei Bedingungen erfüllt sein: 1. Die Empfindlichkeit muß gesteigert werden; dies geschieht durch Verwendung von Spulen mit zahlreichen Windungen statt einer oder weniger Stromschleifen. 2. Die Störungen infolge der Schwankungen der Größe und Richtung des erdmagnetischen Feldes müssen beseitigt werden. Man darf sich also nicht, wie bei der Tangentenbussole, des erdmagnetischen Feldes als Richtkraft für die Magnetnadel bedienen, sondern diese wird an einem Faden, z. B. Kokon- oder Quarzfaden, aufgehängt, dessen Torsionselastizität die erforderliche Richtkraft ergibt. Um die Wirkung des erdmagnetischen Feldes auszuschalten, werden zwei verschiedene Wege eingeschlagen. Der eine besteht darin, daß man ein sog. *astatisches Nadelpaar* verwendet. Das drehbare System besteht in diesem Falle nicht aus einer, sondern aus zwei möglichst gleichen, starr miteinander verbundenen und entgegengesetzt gerichteten Magnetnadeln (Abb. 306). Auf ein solches Nadelpaar kann das Erdfeld (soweit es homogen, d. h. am Orte der beiden Nadeln gleich stark und gleich gerichtet ist) kein Drehmoment ausüben, weil es die beiden Magnete gleich stark nach entgegengesetzten Richtungen zu drehen strebt. Die untere Magnetnadel hängt zwischen zwei flachen, parallelen Spulen so, daß sie in ihrer Ruhelage senkrecht zur Spulenachse steht; die

Abb. 306. Astatisches Nadelpaar.

obere Nadel hängt über den Spulen. Fließt durch die Spulen ein Strom, so sucht sich die untere Nadel in Richtung der Spulenachse einzustellen. (Bei manchen Instrumenten befinden sich auch beide Nadeln im Innern von zwei gleichgebauten Spulen, die vom Strome in entgegengesetzten Richtungen durchflossen werden.) Auf die obere Nadel wirkt ein allerdings sehr viel schwächeres Drehmoment im gleichen Sinne, da die Richtung des magnetischen Feldes der Spule außen derjenigen im Innern entgegengesetzt ist. Mit dem Nadelsystem ist ein Spiegel zur Ablesung der Drehungen fest verbunden. Die Drehung aus der Ruhelage ist um so größer, je stärker der Strom ist. Und zwar ist die Gleichgewichtslage der Nadel dadurch gegeben, daß sich die ablenkende Kraft des Stromes und die rücktreibende Kraft der Torsion der Aufhängung das Gleichgewicht halten. Galvanometer dieser Art sind zuerst von THOMSON konstruiert worden. Abb. 307 zeigt als Beispiel ein Nadelgalvanometer nach einem Vorschlag von NERNST. Das astatische Nadelpaar M besteht aus zwei Magnetchen, von denen sich das eine innerhalb, das zweite dicht oberhalb der von dem zu messenden Strom durchflossenen Spule befindet. Darüber befindet sich ein Spiegel zur Ablesung der Drehungen.

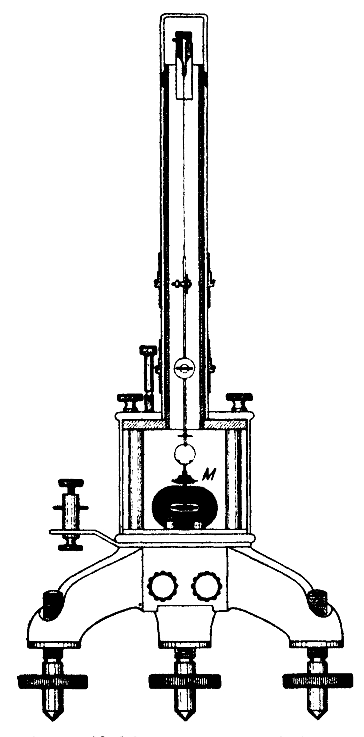


Abb. 307. Nadelgalvanometer nach NERNST.

Der andere Weg, der zur Beseitigung der erdmagnetischen Wirkungen eingeschlagen wird, besteht darin, daß man sie von der Nadel nach Möglichkeit überhaupt fernhält. Das geschieht bei den Panzergalvanometern nach DU BOIS, RUBENS und PASCHEN. Diese besitzen kein astatisches Nadelpaar, aber das ganze Instrument ist in einen dreifachen und nur mit den notwendigsten Beobachtungs- und Zuführungsöffnungen versehenen Panzer aus etwa 1 cm dickem weichen Eisen eingeschlossen. Dieses schirmt die erdmagnetischen Kraftlinien vom Innern so gut wie vollständig ab (vgl. § 336 u. 338). Zwecks Erzielung eines kleinen Trägheitsmoments (kleine Schwingungsdauer) ohne Einbuße an magnetischem Moment benutzt man als Nadel ein System von mehreren kurzen, parallel und gleichsinnig gerichteten Magnetchen. Mit den besten Nadelgalvanometern erzielt man eine Empfindlichkeit von etwa 10^{-12} Amp. (Empfindlichkeit = Strom, der einen Ausschlag von 1 mm bei 1 m Skalenabstand hervorruft.)

Die Nadelgalvanometer werden nur in solchen Fällen verwendet, wo es auf die mit ihnen erreichbare hohe Empfindlichkeit ankommt, also zur Messung schwächster Ströme. Im übrigen kommt die Verwendung von Nadelinstrumenten für die praktische Meßtechnik heute überhaupt nicht mehr in Betracht.

365. **Drehspulinstrumente für Gleichstrom.** Die modernen Instrumente zur genauen Messung von Strömen und Spannungen beruhen durchweg auf dem Drehspulprinzip (DEPREZ-D'ARSONVAL, 1881). Es ist dies sozusagen eine Umkehrung des den Nadelgalvanometern zugrunde liegenden Prinzips. Die Instrumente bestehen aus einem starken Hufeisenmagneten M, zwischen dessen Polen P sich eine drehbare, von dem zu messenden Strom durchflossene Spule S befindet. Zwischen den zylindrisch geformten Polen befindet sich ortsfest (nicht

etwa mit der Spule drehbar) ein zylindrischer Weicheisenkern E, der nur einen schmalen Luftspalt für die Drehung der Spule frei läßt (Abb. 308). Er bewirkt, daß in dem Luftspalt ein starkes, radial gerichtetes und weitgehend homogenes magnetisches Feld herrscht.

Durch diese Anordnung wird eine praktisch vollkommene Unschädlichmachung der magnetischen Störungen erreicht, da das magnetische Feld im Luftspalt ganz außerordentlich viel stärker ist als das erdmagnetische Feld, so daß dessen Wirkungen, insbesondere seine Schwankungen im allgemeinen nicht mehr ins Gewicht fallen.

Die Drehspule ist bei weniger empfindlichen Instrumenten auf Spitzen gelagert und mit einem Zeiger versehen, der die Ablenkungen auf einer Skala anzeigt. Solche Instrumente können mit einer festen Eichung versehen werden. Die Ruhelage der Spule ist durch eine Schneckenfeder bestimmt. Bei empfindlichen Instrumenten ist die Spule an einem Kokonfaden oder an einem dünnen Metallband aufgehängt. Die Stromzuführung erfolgt durch dünne Metallbänder oder Metallfedern, gegebenenfalls auch durch die Aufhängung. Mit der Spule ist ein Spiegel zur Ablesung der Drehungen verbunden (Abb. 309, M Magnet, P Polschuhe, E Eisenkern, S Spule).

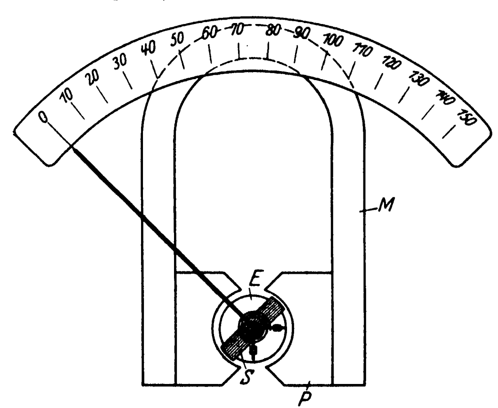


Abb. 308. Drehspulgalvanometer mit Zeigerablesung.

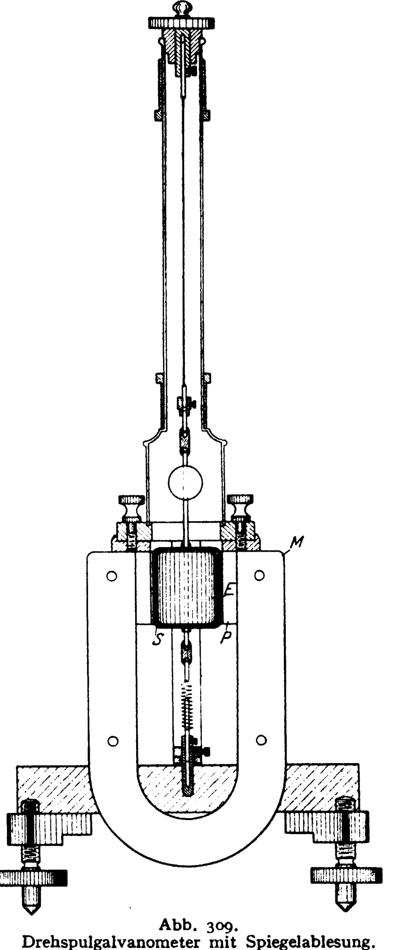


Abb. 309. Drehspulgalvanometer mit Spiegelablesung.

Bei Stromdurchgang sucht sich die Spule mit ihrer Windungsfläche senkrecht zu den Kraftlinien zu stellen. Sie darf also nicht schon in ihrer natürlichen Ruhelage in dieser Stellung stehen, sondern muß mit ihr einen nicht zu kleinen Winkel bilden, bei Instrumenten, die nach beiden Seiten ausschlagen können, einen solchen von 90°, wie in Abb. 309. Der Ausschlagssinn ist von der Stromrichtung abhängig. Daher sind solche Instrumente nur für Gleichstrom verwendbar.

Gleichstromgalvanometer mit nicht zu großer Dämpfung (§ 366) können auch zur Messung von Elektrizitätsmengen, welche in sehr kurzer Zeit durch sie entladen werden, benutzt werden, wenn die Dauer eines solchen Stromstoßes

klein gegen die natürliche Schwingungsdauer des Galvanometersystems ist. Die Spule erhält durch den Stromstoß, wie ein kurz angestoßenes Pendel, einen Drehimpuls und schwingt bis zu einem bestimmten, von der Stärke des Stromstoßes abhängigen Umkehrpunkt aus. Es läßt sich zeigen, daß die Größe dieses sog. ballistischen Ausschlages (unter der Voraussetzung gleichbleibender Dämpfung) der bei dem Stromstoß durch die Spule geflossenen Elektrizitätsmenge proportional ist. In dieser Verwendungsart bezeichnet man ein Galvanometer als ballistisches Galvanometer.

366. Dämpfung von Galvanometern. Die Drehspule eines Galvanometers, welche durch einen äußeren Stromkreis geschlossen sei, werde auf irgendeine Weise, etwa durch einen Stromstoß, aus ihrer Ruhelage entfernt. Sie schwingt dann in diese wieder zurück. Sind ihre Enden nicht leitend verbunden, so wird dieser Schwingungsvorgang ausschließlich durch die mechanischen Eigenschaften des Systems und durch die geringe Dämpfung infolge der Luftreibung im Luftspalt bedingt. Ist aber die schwingende Spule außen durch einen Stromkreis geschlossen, so entsteht in der Spule wegen ihrer Drehung im Felde des permanenten Magneten eine induzierte elektromotorische Kraft, und damit ein Induktionsstrom, der nach dem LENZschen Gesetz die Bewegung der Spule zu hemmen sucht. Dabei geht die Bewegungsenergie der Spule in Energie des Induktionsstromes, also schließlich in Stromwärme, über. Die Bewegung klingt infolge dieses Energieverlustes allmählich ab, sie ist gedämpft.

Die Art des Überganges in die endgültige Ruhelage hängt ganz vom äußeren Widerstand ab. Ist er groß, so ist der durch die Drehung der Spule entstehende Induktionsstrom schwach, und es wird der Spule nur wenig Schwingungsenergie entzogen. Diese ist beim erstmaligen Erreichen der natürlichen Ruhelage noch nicht verbraucht. Die Spule schwingt noch über diese hinaus und kommt erst nach einer mehr oder weniger großen Zahl von Hin- und Herschwingungen zur Ruhe (Abb. 310a). In diesem Falle liegt also eine — je nach der Größe des äußeren Widerstandes mehr oder weniger stark — gedämpfte periodische Schwingung vor. Aus der Schwingungstheorie folgt, daß die Amplituden (jeweils diejenigen auf der gleichen Seite vom Nullpunkt) nach der Gleichung

$$\alpha_n = \alpha_0 e^{-\Lambda n}$$

abnehmen, wobei α_0 den Anfangsausschlag und α_n den Ausschlag nach n vollen Schwingungen bedeutet. Die Größe Λ heißt das logarithmische Dekrement der Schwingung, denn es ist

$$\log \alpha_n - \log \alpha_{n+1} = \Lambda.$$

Mit wachsender Dämpfung, d. h. bei Verkleinerung des äußeren Widerstandes, nimmt aber die Schwingungsdauer erst langsam, dann schneller zu und wird bei einem bestimmten Wert des äußeren Widerstandes unendlich groß. Von hier ab, bei noch kleinerem äußeren Widerstand, ist die Bewegung der Spule nicht mehr periodisch; sie kriecht von einem einmal vorhandenen Ausschlag in ihre natürliche Ruhelage zurück, ohne je über diese hinaus zu schwingen (Abb. 310b). Die Schwingungsenergie der Spule wird auf dem Wege bis zur Ruhelage restlos aufgezehrt. Je kleiner der äußere Widerstand ist, desto langsamer erfolgt die Rückkehr in die Ruhelage. Genau das gleiche, was hier für die Rückkehr in die Ruhelage gesagt ist, gilt für die Einstellung der Spule auf irgendeinen Ausschlag beim Einschalten eines Stromes. Den äußeren Widerstand, bei dem die beiden geschilderten Bewegungsformen ineinander übergehen, nennt man den Grenzwiderstand des Galvanometers. Seine Größe hängt von verschiedenen Faktoren ab, insbesondere von der Stärke des Magnetfeldes, in dem sich die Spule befindet, von der Win-

dungsfläche der Spule, vom Spulenwiderstand und von der Größe der Torsionskraft in der Aufhängung der Spule.

Für ein bequemes und sicheres Arbeiten ist ein häufiges Hin- und Herschwingen der Spule vor der Einstellung ebenso unerwünscht wie ein langsames Hinkriechen in diese. Die schnellste Einstellung wird erreicht, wenn der äußere Widerstand gleich dem Grenzwiderstand ist (sog. aperiodischer Grenzfall, Abb. 310c). Dieser Fall soll beim praktischen Arbeiten mit Galvanometern stets nach Möglichkeit verwirklicht werden. Im allgemeinen richtet man es so ein, daß man die Dämpfung ein klein wenig geringer macht, als dem Grenzfall entspricht, so daß die Spule sich noch um eine ganz kurze Strecke über die Ruhelage hinwegbewegt, ehe sie sich endgültig in diese einstellt.

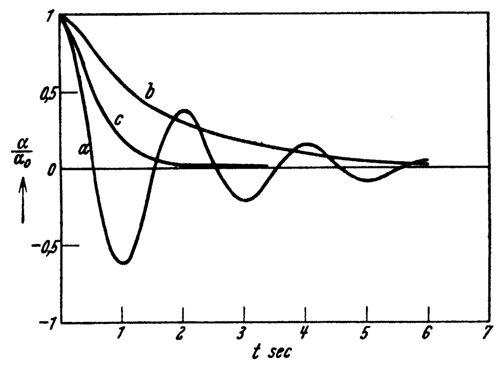


Abb. 310. Schwingungsformen des Galvanometers.

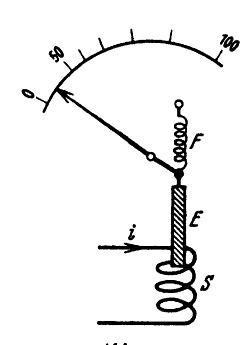


Abb. 311. Schema der Wirkung eines Weicheiseninstruments.

367. Weicheiseninstrumente. An Stelle der ziemlich kostspieligen Drehspulinstrumente verwendet man für technische Zwecke, bei denen es nicht auf große Meßgenauigkeit ankommt, die Weicheiseninstrumente. Abb. 311 dient zur Veranschaulichung des dabei verwendeten Prinzips. Der zu messende Strom durchfließt eine Spule S, vor deren einem Ende sich ein z. B. durch eine Feder F festgehaltenes Stück weichen Eisens befindet. Das magnetische Feld des in der Spule fließenden Stroms ist an den Enden der Spule inhomogen und nimmt nach außen hin an Stärke ab. Deshalb wird das weiche Eisen in Richtung wachsender Feldstärke, d. h. in die Spule hinein, gezogen (§ 355). Und zwar ist die Richtung dieser Bewegung von der Stromrichtung unabhängig. Weicheiseninstrumente können daher nicht nur für Gleichstrom, sondern auch für Wechselstrom verwendet werden. (Sie zeigen die sog. effektiven Stromstärken an, § 379.) Das magnetische Feld ist dem Spulenstrom proportional. Die auf das Eisen wirkende Kraft rührt daher, daß das Eisen im Felde zu einem magnetischen Dipol wird, dessen magnetisches Moment der Feldstärke annähernd proportional ist. Die Kraft aber ist dem Produkt aus Feldstärke und magnetischem Moment, also auch dem Quadrat der Feldstärke und somit schließlich dem Quadrat der Stromstärke in der Spule proportional. Die Skala eines solchen Instruments zeigt daher keine Teilung in gleichmäßige Intervalle, denn der Ausschlag steigt etwa mit dem Quadrat der Stromstärke an.

368. Allgemeines über Strom- und Spannungsmesser. Jede der vorstehend beschriebenen Typen von Strommeßinstrumenten kann ebensogut auch als Spannungsmesser verwandt werden. Denn da ihr Widerstand R eine feste Größe hat, so ist das Verhältnis U/i nach dem Ohmschen Gesetz für ein gegebenes Instrument konstant. Einem bestimmten Ausschlag entspricht also nicht nur eine bestimmte Stromstärke i, sondern auch eine bestimmte, an den Klemmen

des Instruments liegende Spannung $U = iR$. Der Ausschlag kann daher sowohl als Maß für die Stromstärke, als auch für die angelegte Spannung dienen. In ihrer praktischen Ausführung unterscheiden sich indessen Strom- und Spannungsmesser in einem wesentlichen Punkt. Sowohl bei Strom- wie bei Spannungsmessung ist es natürlich wichtig, daß für die Zwecke der Messung möglichst wenig Energie aufgewandt wird. Ein Strommesser muß mit der Leitung, in der der Strom gemessen werden soll, in Reihe geschaltet sein, es wird also vom gleichen Strom i durchflossen, der in der Hauptleitung fließt. Der Energieverbrauch im Instrument in 1 sec ist gleich $i^2 R$ (§ 260), wenn R den inneren Widerstand des Instruments bedeutet. Um diesen Energieverbrauch niedrig zu halten, muß also ein Strommeßinstrument einen möglichst kleinen Widerstand haben. Das wird bei den auf dem Drehspulprinzip beruhenden Strommessern stets dadurch erreicht, daß zwar die Drehspule selbst keinen sehr kleinen Widerstand hat, daß aber parallel zu ihr ein Nebenschluß (shunt) von kleinem Widerstand liegt. Durch die Drehspule fließt also nur ein gewisser Bruchteil des zu messenden Stromes. Diese Konstruktion ist deshalb notwendig, weil es nicht gut möglich ist, einer Drehspule stärkere Ströme durch die beweglichen Zuleitungen zuzuführen. Ein Drehspulstrommesser st also ein empfindliches Drehspulgalvanometer mit einem passend abgeglichenen Nebenschluß (Abb. 312a).

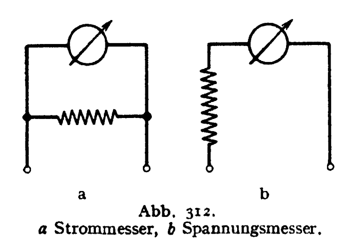


Abb. 312.
a Strommesser, *b* Spannungsmesser.

Will man aber die an den Enden eines Leiters liegende Spannung messen, so muß man den Spannungsmesser zu diesem Leiter parallel schalten. Damit möglichst wenig vom Hauptstrom durch das Instrument geht, muß sein Widerstand groß gegen den Widerstand des betreffenden Leiters sein.

Man konstruiert darum die Spannungsmesser als Drehspulgalvanometer mit einem passend abgeglichenen Vorschaltwiderstand (Abb. 312b). Viele Firmen benutzen für ihre Strom- und Spannungsmesser das gleiche Drehspulsystem und regulieren ihren Meßbereich für Strom- oder Spannungsmessung durch geeignete Nebenschlüsse bzw. Vorschaltwiderstände. Auf diese Weise kann das gleiche System für Instrumente sehr verschiedener Empfindlichkeit benutzt werden. Viele Instrumente werden auch mit mehreren auswechselbaren Nebenschlüssen bzw. Vorschaltwiderständen geliefert, so daß sie für verschiedene Meßbereiche brauchbar sind.

Strommesser mit einer festen Eichung in Ampere nennt man auch Amperemeter, Spannungsmesser mit einer festen Eichung in Volt Voltmeter.

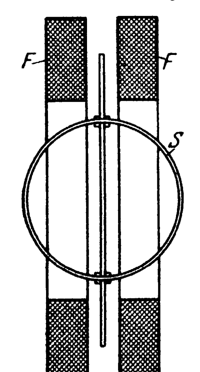


Abb. 313. Schema eines Wechselstrommeßinstruments mit Drehspule.

369. Wechselstrommeßinstrumente mit Drehspulen. Leistungsmesser. Will man das Drehspulprinzip auch für Wechselstrommessungen benutzen, so muß dafür gesorgt werden, daß sich mit dem Wechsel der Stromrichtung in der Drehspule jeweils auch die Richtung des magnetischen Feldes umkehrt. Das geschieht auf die Weise, daß man dieses Feld nicht durch permanente Magnete, sondern durch den zu messenden Strom selbst mittels einer oder zweier Spulen erzeugt, z. B. indem man die Drehspule S im Innern einer festen Spule oder zwischen zwei Spulen F aufhängt, die gleichfalls von dem zu messenden Strome durchflossen werden (Dynamometerprinzip, Abb. 313). Die Windungsfläche der Spulen F steht senkrecht zur Zeichnungsebene. Man gibt in diesem Fall den Spulen F einen möglichst kleinen Widerstand und schaltet

die Drehspule parallel zur festen Spule. Der Ausschlag eines solchen Instruments ist von der Stromrichtung unabhängig und dem Quadrat der Stromstärke proportional.

Nach dem gleichen Prinzip kann man mit Drehspulinstrumenten die Leistung $L = Ui$ eines Stromes in einem Leiter messen. Man schaltet in diesem Falle die festen Spulen F, welche möglichst kleinen Widerstand haben müssen, in Reihe mit dem betreffenden Leiter. Die Drehspule S, der man einen großen Widerstand vorschaltet, wird mit den beiden Enden des Leiters verbunden, in dem die Leistung gemessen werden soll. Dann ist der die feste Spule durchfließende Strom gleich dem den Leiter durchfließenden Strom i, das magnetische Feld der Spule ist also dem Strom i proportional. Der die Drehspule durchfließende Strom ist nach dem OHMschen Gesetz der an ihr, d. h. der an den Enden des Leiters liegenden Spannung U proportional. Das auftretende Drehmoment ist daher dem Produkt Ui, d. h. der Zahl der im Leiter verbrauchten Watt (§ 260) proportional. Ein solches Instrument mißt die Leistung Ui des Stromes in dem betreffenden Leiter.

370. Elektromagnetische Relais. Unter einem Relais versteht man eine Vorrichtung, durch die mit Hilfe eines Stromes die Stärke oder Richtung eines andern Stromes geändert werden kann oder, wie man sich auch ausdrückt, ein anderer Strom gesteuert werden kann. Im einfachsten Falle handelt es sich um das Unterbrechen oder Schließen eines Stromkreises durch einen andern Strom.

Ein elektromagnetisches Relais einfachster Art besteht aus einem Elektromagneten, vor dessen Polen sich ein an einer Blattfeder befestigtes Stück weichen Eisens (Anker) befindet, das, solange der Elektromagnet nicht erregt ist, einen kleinen Abstand vom Elektromagneten hat. Wird der Elektromagnet durch einen hindurchfließenden Strom erregt, so zieht er den Anker an, und diese Bewegung kann dazu benutzt werden, um einen Kontakt K zu betätigen, der einen andern Strom öffnet oder schließt, wie das beispielsweise aus Abb. 314 zu ersehen ist. Derartige Relais gibt es in den mannigfachsten Ausführungsformen. Auch der JOHNSEN - RAHBEK - Effekt (§ 254) ist zur Konstruktion von Relais benutzt worden.

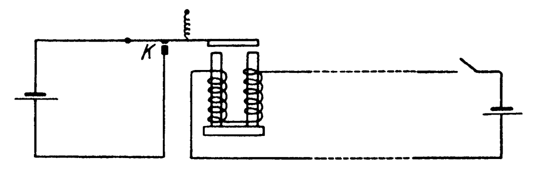


Abb. 314. Schema eines elektromagnetischen Relais. Erregung des Elektromagneten bewirkt Stromschluß.

Man kann es auch so einrichten, daß der durch den Elektromagneten fließende Strom sich selbst unterbricht. Auf diesem Prinzip beruht die elektrische Klingel. (Vgl. auch den WAGNERschen Hammer, § 372.)

371. Telegraphie und Telephonie. Die Telegraphie in ihrer ursprünglichen Form ist eine Zeichensprache, welche aus kurzen oder langen Signalen besteht, die in bestimmter Anordnung und Zahl Buchstaben und in deren Zusammenhang Worte und Sätze bedeuten (MORSE-Alphabet). Sie beruht auf der Verwendung von Relais. Im Prinzip besteht ein Telegraph aus einem an der Empfangsstation befindlichen Relais, welches einen dort vorhandenen Stromkreis unter der Wirkung von Stromstößen, die mittels der Fernleitung von der Sendestation her übertragen werden, öffnet und schließt. Diese Stromstöße werden auf der Sendestation mittels eines Schalters (Tasters) als kurze oder lange Stromschlüsse entsprechend der im MORSE-Alphabet zu übertragenden Nachricht erzeugt. Der am Empfangsort auf diese Weise im gleichen Tempo geöffnete und geschlossene Strom bewegt auf elektromagnetischem Wege Schreibvorrichtungen, welche die MORSE-

Zeichen zu Papier bringen, so daß sie abgelesen werden können. (Erster elektrischer Telegraph GAUSS und WEBER in Göttingen 1833.)

Moderne Telegraphen großer Stationen sind viel komplizierter gebaut. Hier sei nur so viel erwähnt, daß solche Telegraphen die zu vermittelnde Nachricht meist unmittelbar in Druckschrift wiedergeben (Typendrucker).

Bei den telegraphischen Fernleitungen begnügt man sich oft mit einer einzigen Drahtleitung und benutzt als zweite Leitung die gut leitende Erde, mit der die Verbindung durch Metallplatten, die an den beiden Enden der Leitung in sie versenkt werden, hergestellt wird (Erdrückleitung). Über die drahtlose Telegraphie s. § 390.

Die elektrische Übertragung von Klängen, die Telephonie, beruht auf dem Prinzip, daß man elektrischer Energie, welche vom Sendeort zum Empfangsort strömt, Schwankungen aufprägt, die ein möglichst getreues Abbild der Druckschwankungen der Luft in dem zu übertragenden Schall sind. Man nennt dieses Verfahren Modulation. Bei der Telephonie auf Leitungen ist es ein elektrischer Strom, der zwischen den zu verbindenden Orten fließt, dem die Schwankungen aufgeprägt werden, bei der drahtlosen Telephonie (Rundfunk) die Energie der sich rings im Raum um eine Antenne ausbreitenden elektrischen Wellen (§ 385). Am Sendeorte befinden sich Apparate, welche auf irgendeine Weise die Druckschwankungen des Schalles in elektrische Energieschwankungen übersetzen, am Empfangsorte Apparate, welche das Umgekehrte bewirken, also wieder Schallschwingungen erzeugen.

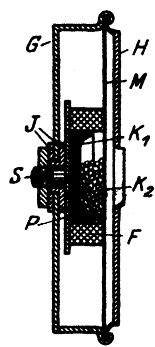


Abb. 315. Körnermikrophon.

Wir befassen uns hier zunächst nur mit der Leitungstelephonie. Bei dieser, wie bei der drahtlosen Telephonie, dient als Sendeapparat ein Mikrophon, als Empfangsapparat ein Telephon.

Ein Mikrophon ist ein Apparat, der den Widerstand in dem die beiden Orte verbindenden Stromkreise und damit die Stärke des Stromes im Tempo der zu übertragenden Schallschwingungen verändert. Eine der vielen verschiedenen Konstruktionen eines solchen zeigt Abb. 315. In einem Metallgehäuse G befindet sich, durch Scheiben J isoliert, eine Metallplatte P mit der Schraube S. Die Platte P trägt eine aus Kohle bestehende Schale K_1, die von einem Filzring F umgeben ist. Auf diesem liegt eine Kohlemembran M, die durch den Deckel H gegen das Gehäuse gepreßt und mit ihm leitend verbunden ist. Zwischen M und K_1 liegt eine lose Füllung von Kohlekörnern K_2. Die Stromzuleitung geht durch die Schraube S und durch das Gehäuse. Der Strom muß also die Kohlekörnerfüllung passieren. Wird gegen die Kohlemembran M gesprochen, so werden die Körner im Tempo der Schallschwingungen geschüttelt. Dabei ändern sich die Übergangswiderstände zwischen den einzelnen Körnern, der Widerstand des Mikrophons schwankt, und zwar in gewisser Annäherung entsprechend den auftreffenden Schallschwingungen. Im gleichen Tempo schwankt also auch der das Mikrophon durchfließende Strom. Er ist in der gewünschten Weise moduliert.

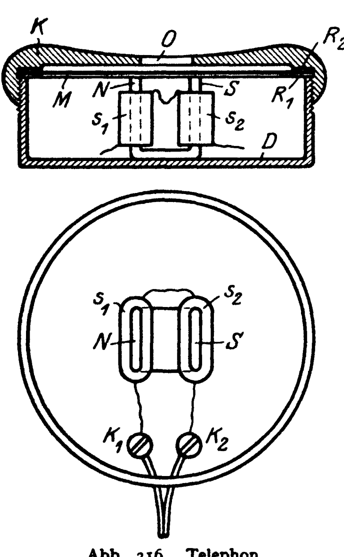


Abb. 316. Telephon.

Der modulierte Strom fließt am Empfangsort durch ein Telephon (Hörer der Telephonieapparate). Abb. 316 zeigt eine Konstruktion, wie sie heute bei den sog. Kopfhörern üblich ist. In einer Dose D befindet sich ein permanenter Magnet mit den Polen N und S, auf dessen Schenkeln Spulen s_1 und s_2 sitzen, die von dem ankommenden Strome durchflossen werden. Dicht vor den Polen liegt eine durch Ringe R_1 und R_2 gehaltene Eisenmembran. Die Dose ist oben durch die Kappe K mit der Schallöffnung O geschlossen. Die Stromzuleitung erfolgt durch die Klemmen K_1 und K_2. Ist der Gleichstrom moduliert, so schwankt die Stärke der Pole und damit die Durchbiegung der Membran im Tempo der dem Gleichstrom aufgeprägten Modulation. Die Membran gerät in entsprechende Schwingungen und überträgt diese wieder als hörbare Schallschwingungen an die Luft.

372. Funkeninduktor. Der Funkeninduktor (Induktor, Induktorium) ist ein Apparat, welcher dazu dient, mittels einer Gleichstromquelle von niederer Spannung hohe Spannungen zu erzeugen. Es gibt sehr viele verschiedene Spezialkonstruktionen von Induktoren. Allen ist folgendes allgemeine Prinzip gemeinsam:

Ein Funkeninduktor besteht aus einer Primärspule S_1 mit relativ wenigen (meist einigen 100) Windungen aus dickem Draht, die umschlossen wird von einer Sekundärspule S_2 aus sehr vielen (oft bis zu 100000) Windungen aus dünnem Draht (in Abb. 317 der Deutlichkeit halber nebeneinander gezeichnet). Im Innern der Primärspule befindet sich zur Verstärkung der Induktionswirkung ein Eisenkern F, der sie ganz ausfüllt, und der, zur Vermeidung von Wirbelströmen (§ 334), aus voneinander isolierten (lackierten) Eisendrähten hergestellt ist.

Zum Betriebe eines Induktors ist ferner eine Vorrichtung erforderlich, welche den Primärstrom selbsttätig sehr oft in der Sekunde schließt und wieder öffnet, ein selbsttätiger Unterbrecher U. Bei kleineren Apparaten ist er direkt in sie eingebaut, bei großen ist es meist ein besonderer Apparat.

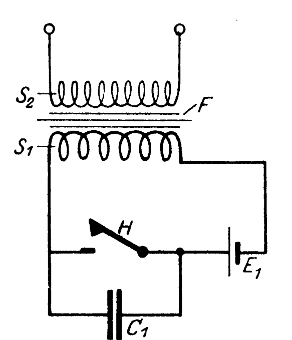
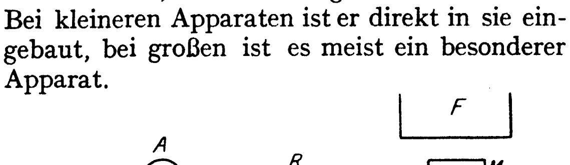


Abb. 317. Schaltungsschema des Funkeninduktors. S_1 Primärspule, S_2 Sekundärspule, F Eisenkern, H Unterbrecher, E_1 Stromquelle, C_1 Kondensator. In Wirklichkeit liegt die Primärspule innerhalb der Sekundärspule.



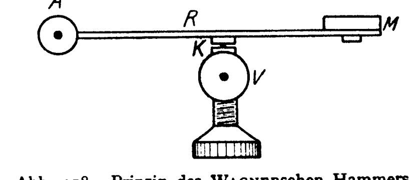


Abb. 318. Prinzip des WAGNERschen Hammers. F Eisenkern des Funkeninduktors, M Eisenstück, R Blattfeder, K Platinkontakt (Unterbrechungsstelle), A und V Zuleitungen zum Unterbrecher.

Die einfachste und gebräuchlichste Unterbrecherform, insbesondere für kleinere Apparate, ist der sog. WAGNERsche Hammer (Abb. 318), dessen Prinzip vollkommen dem der elektrischen Klingel entspricht. Als Elektromagnet dient der Eisenkern F der Primärspule. Neben dieser einfachen Konstruktion gibt es eine Reihe weiterer, verbesserter Vorrichtungen, denen gemeinsam ist, daß sie unmittelbar in den Induktor eingebaut sind und durch die magnetische Kraft des Eisenkerns betrieben werden.

Innerhalb des die Spulen tragenden Kastens befindet sich schließlich noch ein Kondensator C_1, dessen beide Belegungen mit den beiden Kontaktstellen des Unterbrechers verbunden sind.

Legt man an die Zuleitungen zur Primärspule eine Gleichspannung (Akkumulatoren, örtliches Netz, je nach der Größe des Apparates), so entsteht in der Primärspule ein Strom i_1, der infolge der Selbstinduktion den in Abb. 278, § 333, dargestellten Verlauf zeigt. Hierdurch wird in der Sekundärspule eine elektromotorische Kraft E_2 induziert, die der Änderungsgeschwindigkeit von i_1, also di_1/dt, proportional und entgegengesetzt gerichtet ist wie die Spannung in der Primärspule (Abb. 319). Nach sehr kurzer Zeit aber wird der Primärstrom unterbrochen. Geschähe dies momentan, wäre also di_1/dt unendlich groß, so würde in der Sekundärspule unendlich kurze Zeit eine unendlich hohe induzierte elektromotorische Kraft entstehen. Die Unterbrechung ist aber nicht momentan, da an der Kontaktstelle des Unterbrechers stets ein Funken auftritt, der noch für kurze Zeit nach Aufhören des metallischen Kontaktes eine Stromleitung durch die Luft zuläßt. Um die Dauer dieses Funkens möglichst abzukürzen und auf diese Weise die Unterbrechung möglichst plötzlich, d. h. di_1/dt möglichst groß zu machen, besitzt der Induktor den Kondensator C_1. Vor Beginn der Unterbrechung ist der Kondensator kurzgeschlossen, also ungeladen. In dem Augenblick, wo sich der Kontakt K abzuheben beginnt, liegt an den Belegungen des Kondensators nahezu die volle Betriebsspannung E_1 des Induktors. Er nimmt also die Elektrizitätsmenge $e = CE_1$ auf und entzieht sie dem Stromkreis. Sobald sich der Kontakt wieder schließt, wird der Kondensator durch Kurzschluß wieder entladen. Die bei Stromöffnung in der Sekundärspule auftretende elektromotorische Kraft hat daher den in der Abb. 315 (Kurve *b* unten) dargestellten Verlauf. Man erkennt, daß die beim Öffnen des Stromes auftretende elektromotorische Kraft zwar kürzere Zeit andauert als die beim Schließen auftretende, daß sie aber erheblich größer ist als diese. Ist die Sekundärspule an ihren Enden offen, so zeigt sie sich als eine Spannung zwischen den offenen Enden. Sind die offenen Enden einander nahe genug, so kann diese Spannung zu einer Büschel- oder einer Funkenentladung durch die Luft führen. Mit großen Induktoren kann man so Funken von mehr als 1 m Länge erzeugen. Die erzeugte Spannung ist um so größer, je größer das Verhältnis der Windungszahlen der beiden Spulen ist.

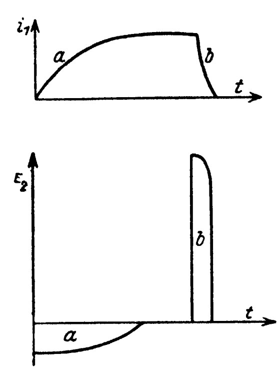


Abb. 319. Primärstrom i_1 (oben) und Sekundärspannung E_2 (unten) am Induktor. a Stromschluß, b Stromöffnung.

Die Flächen *a* und *b* der Abb. 319 sind gleich dem Integral $\int E_2\,dt$ während des Schließens und des Öffnens des Primärstromes. Dieses ist aber nach § 357, Gl. 12b, gleich der Gesamtänderung des Kraftflusses Φ, der die Sekundärspule durchsetzt. Da beim Öffnen der gleiche Kraftfluß verschwindet, der beim Schließen entsteht, so müssen die beiden Flächen inhaltsgleich sein. Dem entspricht, daß die induzierte elektromotorische Kraft um so größer ist, über eine je kürzere Zeit sich der Öffnungs- oder Schließungsvorgang erstreckt. Wegen der Selbstinduktion im Primärkreis ist jedoch die Dauer des Schließungsvorgangs stets erheblich größer als die des Öffnungsvorganges, die induzierte elektromotorische Kraft also beim Öffnen beträchtlich größer als beim Schließen.

Bei großen Induktoren bedient man sich nicht des WAGNERschen Hammers, sondern anderer Unterbrecher. Bei den rotierenden Unterbrechern werden rotierende Kontakte durch einen Motor abwechselnd geöffnet und geschlossen. Beim WEHNELT-Unterbrecher (Abb. 320a) befindet sich in einem Gefäß mit verdünnter Schwefelsäure eine Bleiplatte als Kathode und ein nur wenig aus einem Porzellanrohr herausragender Platinstift als Anode. Durch dieses Gefäß

fließt der primäre Gleichstrom. Am Platinstift ist die Stromdichte sehr groß; es tritt daher dort, außer einer Elektrolyse, ein sehr hoher Betrag an JOULEscher Wärme in der Lösung auf, der zur Bildung einer Dampfblase um den Platinstift führt, die nunmehr die Stromleitung unterbricht. Bei der sehr schnell eintretenden Abkühlung bricht die Dampfblase mit scharfem Knall wieder zusammen, und der Strom fließt von neuem. Der WEHNELT-Unterbrecher gibt sehr häufige und plötzliche Stromunterbrechungen und hat daher besonders starke Induktionswirkungen zur Folge. Beim Lochunterbrecher (Abb. 320b) wird die gleiche Wirkung dadurch erzielt, daß der Strom im Elektrolyten durch ein enges Loch hindurchtreten muß.

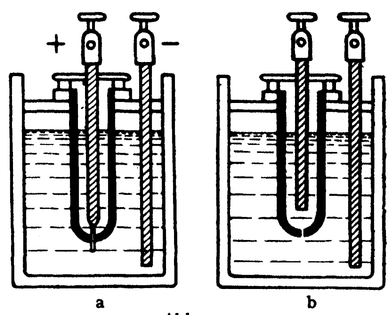


Abb. 320.
a WEHNELT-Unterbrecher, b Lochunterbrecher.

373. Generatoren oder Dynamomaschinen. Die Generatoren oder Dynamomaschinen dienen zur Umwandlung mechanischer in elektrische Energie. Die Zahl der in der Praxis vorkommenden Konstruktionen ist sehr groß. Wir müssen uns hier auf das Grundsätzliche beschränken. Je nach der Art des erzeugten Stromes unterscheidet man Gleichstrom-, Wechselstrom- und Drehstromgeneratoren.

Als ein sehr einfaches Schema zum Verständnis der Wirkung eines Gleichstromgenerators kann die in Abb. 321 dargestellte Vorrichtung dienen. Sie besteht aus zwei sog. Feldmagneten (Ständer, Stator), die einander ihre entgegengesetzten Pole (N, S) zukehren. In dem zylindrischen Raum zwischen ihnen kann der sog. Anker (Läufer, Rotor) gedreht werden, der in unserm Schema aus einem Eisenring besteht, der mit einer in sich zurücklaufenden Drahtwicklung versehen ist (GRAMMEscher Ring). Diese Wicklung ist an verschiedenen Stellen durch Drahtleitungen angezapft, die je zu einem Metallsegment führen. Diese Segmente sind auf der Achse des Ankers, voneinander isoliert, angebracht. Bei jeder Stellung des Ankers werden zwei einander gegenüberstehende Segmente von zwei festen Schleifbürsten (B_1, B_2) aus Metallgaze oder Kohle berührt, die die elektrischen Pole des Generators bilden und zur Nutzleitung (Lichtnetz usw.) führen.

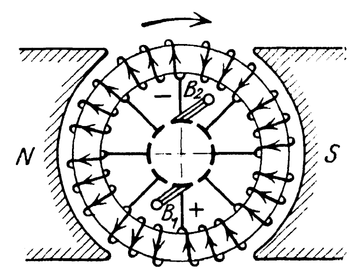


Abb. 321. Schema eines Gleichstromgenerators mit GRAMMEschem Ring.

Wird der Anker im Sinne des Uhrzeigers gedreht, so ändert sich in jeder einzelnen Ankerwindung der Kraftfluß Φ (§ 350). Da die Kraftlinien, die von N nach S laufen, fast vollständig innerhalb des Eisenringes verlaufen (vgl. Abb. 294, § 347), so ist der Kraftfluß durch die Flächen der Ankerwindungen oben und unten im Ringe am größten und in der horizontalen Symmetrieachse Null. Daher wird bei der Rotation des Ankers in seinen Windungen eine elektromotorische Kraft induziert, die in der Richtung der Pfeile gerichtet ist, also einen in diesem Sinne fließenden Strom erzeugt, wenn der bei $B_1 B_2$ angeschlossene äußere Stromkreis geschlossen ist. Dieser Strom tritt also bei B_2 ein, bei B_1 aus. B_1 ist positiver, B_2 negativer Pol des Generators. Die Richtigkeit dieser Behauptungen kann man durch Anwendung des LENZschen Gesetzes (§ 329) leicht beweisen. Fließt der Strom tatsächlich in der angegebenen Richtung, so ergibt sich aus § 302, daß die Richtung des von dem Strome im Eisenring erzeugten magnetischen Feldes, bzw. der Induktion $\mathfrak{B}$, in beiden Ankerhälften von

oben nach unten verläuft. Das ist aber im Innern eines magnetischen Dipols — und zu einem solchen wird der Ring durch den ihn umfließenden Strom — die Richtung vom Südpol zum Nordpol. Der Ring erhält demnach durch den induzierten Strom oben einen Südpol, unten einen Nordpol. Die Kraftwirkungen zwischen diesen Polen und den Polen des Feldmagneten sind, wie man leicht sieht, so gerichtet, daß sie den Ring unten nach rechts, oben nach links zu treiben, ihn also gegen den Uhrzeigersinn zu drehen suchen. D. h. die Ankerpole, die durch den induzierten Strom entstehen, hemmen die ihm von außen aufgezwungene Drehung im Uhrzeigersinn, wie es das LENZsche Gesetz verlangt. Die zur Überwindung dieser hemmenden Kräfte aufgewandte Arbeit findet sich in Gestalt der in der Nutzleitung verbrauchten Energie wieder. Soll diese Energie während einer Umdrehung konstant sein, also Gleichstrom erzeugt werden, so muß dafür gesorgt werden, daß die hemmende Kraft konstant bleibt, d. h. die beiden Ankerpole stets an der gleichen Stelle im Raum bleiben. Das wird durch die Anzapfung der Ankerwicklung an verschiedenen Stellen erreicht. Wirksam sind stets nur die beiden Anzapfungen, deren zugehörige Segmente mit den beiden festen Bürsten in Verbindung stehen. Sie treten also eine nach der andern in Funktion. Sobald der Anker ein wenig gedreht, die Pole ein wenig mit ihm verschoben sind, schiebt sich das folgende Segmentenpaar unter die Bürsten, die Pole springen ein wenig zurück, und das Spiel beginnt von neuem. Die Maschine erzeugt also einen Gleichstrom, der in seiner Stärke um so weniger schwankt, an je mehr Stellen die Ankerwicklung angezapft ist.

Die Feldmagnete sind in Wirklichkeit stets Elektromagnete, die beim Gleichstromgenerator durch den im Anker erzeugten Strom erregt werden. Im Eisen der Feldmagnete bleiben stets Spuren von Magnetisierung zurück (Remanenz, § 344). Diese erzeugen beim Anlassen zunächst einen schwachen Induktionsstrom. Dieser erregt die Feldmagnete stärker, damit steigt die Induktionswirkung usw. Die Maschine erregt sich selbst (dynamoelektrisches Prinzip, WERNER VON SIEMENS, 1867).

Wenngleich die Wechselströme erst in einem späteren Kapitel (§ 375ff.) behandelt werden, so wollen wir doch hier gleich die Generatoren für Wechselstrom anschließen. Durch eine geringfügige Änderung können wir aus unserm Schema des Gleichstromgenerators dasjenige eines Wechselstromgenerators machen (Abb. 322). Wir entfernen die Anzapfungen der Ankerwicklung bis auf zwei einander gegenüberliegende und führen diese an zwei auf der Ankerachse sitzende konzentrische

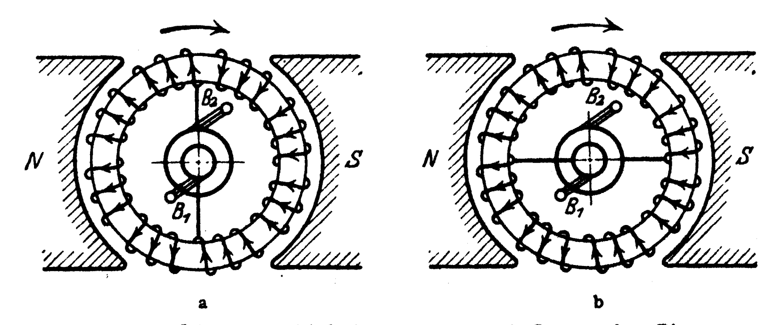


Abb. 322. Schema eines Wechselstromgenerators mit GRAMMEschem Ring.

Metallringe (Schleifringe), auf denen je eine Bürste (B_1, B_2) schleift. In der Stellung der Abb. 322a liegen die Verhältnisse genau wie beim Gleichstromgenerator in der Abb. 321. Bei weiterer Drehung aber bleiben die Ankerpole nicht an ihrer Stelle, sondern wandern mit dem Ringe, denn sie liegen ja immer an den

beiden Stellen, welche durch die Anzapfung mit den Bürsten verbunden sind. Mit fortschreitender Drehung wird der induzierte Strom immer schwächer und damit die Stärke der Ankerpole immer geringer. Man erkennt dies aus der in Abb. 322b dargestellten, gegenüber der ersten um 90° verdrehten Stellung. Man sieht, daß in jeder Hälfte der beiden durch die Anzapfungen gebildeten Ankerhälften die induzierten elektromotorischen Kräfte einander entgegengerichtet sind und sich gegenseitig aufheben. In dieser Stellung fließt also kein Strom im Anker und daher auch nicht in der Nutzleitung. Bei weiterer Drehung steigt der Strom wieder an, aber wegen der Vertauschung der Stellung der beiden Ankerhälften in umgekehrter Richtung, erreicht ein Maximum nach Drehung um weitere 90° usw. Der Generator erzeugt also Wechselstrom. Die Feldmagnete werden in diesem Falle meist durch einen kleinen, mit dem Anker auf gleicher Achse sitzenden Gleichstromgenerator erregt.

Versieht man die Maschine mit drei konzentrischen Schleifringen, die mit drei um je 120° gegeneinander verschobenen Stellen der Ankerwicklung verbunden sind, und verwendet drei Schleifbürsten, so liefert die Maschine Drehstrom (§ 381).

Die hier beschriebene Konstruktion ist veraltet und soll nur das allgemeine Prinzip erläutern. In der Praxis sind sehr viele verschiedene Konstruktionen im Gebrauch, je nach den besonderen Erfordernissen des jeweiligen Verwendungszweckes. Zum Antrieb der Generatoren sind die schnellaufenden Wasser- und Dampfturbinen besonders geeignet.

374. **Elektromotoren.** Der Zweck der Elektromotoren ist dem der Generatoren gerade entgegengesetzt. Sie verwandeln elektrische Energie in mechanische Arbeit. Dem entspricht es, daß jeder Generator grundsätzlich, unter Umkehrung seiner Verwendungsart, als Motor laufen kann. Anstatt durch Drehung des Ankers einen Strom zu erzeugen, den man aus ihm entnimmt, schickt man einen Strom durch seinen Anker, der eine Drehung bewirkt. Um diesen Zusammenhang deutlich zu machen, verwenden wir ein Schema eines Gleichstrommotors, welches dem des Generators (Abb. 321) völlig entspricht (Abb. 323).

Verbindet man die Schleifbürste B_1 mit dem positiven, B_2 mit dem negativen Pol einer Gleichstromquelle, so teilt sich der Strom bei B_1 und durchfließt die beiden Hälften der Ankerwicklung, genau wie der Induktionsstrom beim Generator, in der durch die Pfeile bezeichneten Richtung. Wie beim Generator entsteht demnach oben im Anker ein Südpol, unten ein Nordpol. Die Kraftwirkung zwischen diesen Polen und denen des Feldmagneten — die beim Generator die hemmende Wirkung hervorbrachte — hat hier zur Folge, daß der Anker sich gegen den Sinn des Uhrzeigers dreht. Da wegen der Anzapfung der Ankerwicklung an verschiedenen Stellen die Pole mit kleinen Schwankungen stets an der gleichen Stelle bleiben, so bleibt der Anker in ständiger Drehung. (Man vergleiche damit eine Tretmühle, die etwa durch einen in ihr laufenden Hund in Gang gehalten wird. Der Hund bleibt im umlaufenden Rade stets etwa an der gleichen Stelle. Der auf den Hund wirkenden Schwerkraft entspricht beim Motor das magnetische Feld der Feldmagnete, dem Hunde die beiden Ankerpole.)

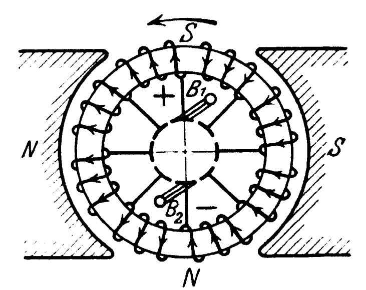


Abb. 323. Schema des Gleichstrommotors mit GRAMMEschem Ring.

Grundsätzlich kann man das Schema des Wechselstromgenerators (Abb. 322) auch als dasjenige eines Wechselstrommotors betrachten. Wir zeigen hier ein anderes einfaches Modell (Abb. 324). Der Anker trägt Magnete mit paar-

weise wechselnder Polrichtung, die bei der praktischen Ausführung Elektromagnete sind, die von einem Gleichstrom erregt werden. Diesen Magneten entspricht eine gleiche Zahl von Feldmagneten, die derart vom Wechselstrom umflossen werden, daß auch ihre Pole paarweise abwechseln, indem sie jeweils im einen oder entgegengesetzten Sinne vom Strome umflossen werden. Der Anker bleibt in Rotation, wenn er einmal in so schnelle Umdrehung gebracht ist, daß seine Pole während der Zeit zwischen zwei Polwechseln der Feldmagnete gerade von einem Pol zum nächsten gelangen. Der Anker drehe sich im Sinne des Uhrzeigers, und der linke obere Pol des Stators verwandle sich gerade aus einem Südpol in einen Nordpol. Dann wird der ihm gegenüberstehende Nordpol des Ankers auf den Südpol des rechten oberen Feldmagneten hingetrieben. Erreicht er ihn gerade in dem Augenblick, in dem wieder ein Polwechsel eintritt, so wiederholt sich das gleiche Spiel usw. Der Motor läuft aber nur, wenn er bereits im richtigen Takt ist. Solche Motoren heißen Synchronmotoren. Sie müssen erst durch eine besondere Anlaßvorrichtung auf die richtige Tourenzahl gebracht werden. Auf die Einzelheiten kann auch hier nicht näher eingegangen werden. Über Drehstrommotoren s. § 381.

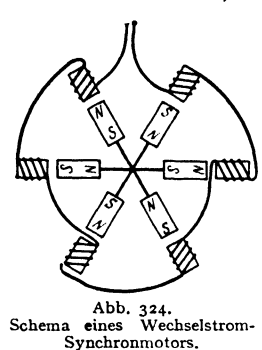


Abb. 324.
Schema eines Wechselstrom-Synchronmotors.

Sobald sich ein Motor infolge des ihn durchfließenden Stroms in Umdrehung befindet, wirkt er infolge seiner Rotation auch als Generator. Da bei gleichem Umdrehungssinn die am Anker eines Motors liegende Spannung die umgekehrte Richtung hat wie die induzierte elektromotorische Kraft in einem ihm gleichen Generator, so ist die durch die Rotation des Motors induzierte elektromotorische Kraft der Betriebsspannung entgegengerichtet; sie schwächt sie. Wenn man einen kleinen Motor unter Einschaltung eines Strommessers mit einer zu seinem Betriebe ausreichenden Stromquelle verbindet und seinen Anker festhält, so fließt durch ihn ein weit stärkerer Strom als wenn er rotiert. Die bei Rotation ohne andere Arbeitsleistung, als Überwindung der Reibung und Lieferung der geringen JOULEschen Wärme, verbrauchte Energie ist äußerst gering. Wird ein anfänglich unbelasteter Motor belastet, d. h. zur Leistung äußerer Arbeit gezwungen, so hat das im ersten Augenblick ein Sinken seiner Drehzahl zur Folge. Dies bewirkt aber im gleichen Augenblick ein Sinken der im Anker induzierten, der Betriebsspannung entgegengesetzten elektromotorischen Kraft. Infolgedessen steigt die Stromstärke im Anker sofort an und drückt die Rotationsgeschwindigkeit wieder in die Höhe. Die Drehzahl eines Elektromotors ist daher in gewissen Grenzen von der Belastung verhältnismäßig wenig abhängig. Die bei Belastung des Motors erforderliche Arbeitsleistung hat ihre Quelle in der durch den oben angedeuteten Vorgang bewirkten Erhöhung der Stromstärke und der damit verbundenen Vergrößerung der Stromleistung im Motor. Die mechanische Leistung eines Motors kann z. B. mit dem PRONYschen Zaum gemessen werden (§ 45). Ihr Verhältnis zur aufgewendeten elektrischen Leistung Ui ergibt den Wirkungsgrad des Motors.

28. Kapitel.

Wechselstrom. Elektrische Schwingungen und Wellen.

375. **Wechselstrom.** Ein Wechselstrom ist ein elektrischer Strom, dessen Stärke i eine periodische Funktion der Zeit t ist. Ein einwelliger Wechselstrom ist ein solcher, bei dem diese Funktion eine einfach harmonische ist. Seine

Stromstärke wird also durch die Gleichung

$$i = i_0 \sin(\omega t + \beta) \tag{1}$$

dargestellt (Abb. 325). i_0 ist der Maximalwert, der Scheitelwert des Wechselstromes. ω ist die Kreisfrequenz des Wechselstromes, $\tau = 2\pi/\omega$ seine Periode, d. h. die Zeit, in der die Stromstärke i alle ihre Phasen einmal durchläuft. $\nu = 1/\tau$ ist die Frequenz des Wechselstroms, d. h. die Zahl der Perioden in 1 sec. Unter der Wechselzahl versteht man die Anzahl der Durchgänge der Stromstärke durch den Wert $i = 0$ in 1 sec; sie ist also doppelt so groß wie die Frequenz. Technischer Wechselstrom hat fast durchweg die Frequenz $\nu = 50$, also die Wechselzahl 100. Die Einheit der Frequenz ist 1 sec^{-1}. Hierfür ist auch die Bezeichnung 1 Hertz (Hz) in Gebrauch.

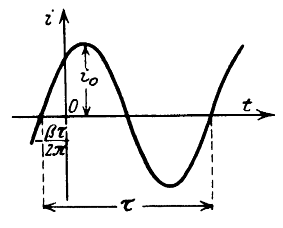


Abb. 325. Zeitlicher Verlauf eines Wechselstroms.

Die Größe β der Gl. 1 ist die Phasenkonstante des Wechselstroms. Ihr Betrag hängt von der Wahl des Anfangspunktes der Zeit t ab, und sie kann durch geeignete Wahl desselben zum Verschwinden gebracht werden.

Damit in einem Stromkreis ein dauernder Wechselstrom fließt, muß in ihm eine elektromotorische Kraft bestehen, die auch eine periodische Funktion der Zeit ist. Die Spannung U, die zwischen den Enden des Stromkreises besteht, ist dann gleichfalls eine periodische Funktion der Zeit und gehorcht bei einwelligem Wechselstrom der Gleichung

$$U = U_0 \sin(\omega t + \gamma). \tag{2}$$

U_0 ist der Scheitelwert der Spannung. Die Phasenkonstante γ der Spannung ist im allgemeinen von der des Stromes verschieden, es besteht zwischen Strom und Spannung eine Phasendifferenz $\beta - \gamma = \varphi$. Ist $\varphi > 0$, so eilt der Strom der Spannung voraus, ist $\varphi < 0$, so hinkt der Strom der Spannung nach.

Man beachte, daß die einen Wechselstrom darstellende Gl. 1 vollkommen derjenigen einer Schwingung (§ 117) entspricht. In der Tat handelt es sich hier auch um einen Schwingungsvorgang, nämlich um eine elektrische Schwingung. Ein Strom, der periodisch Stärke und Richtung ändert, ist ja nichts anderes als eine periodische Hin- und Herbewegung der Elektronen im Leitersystem, also eine Schwingung dieser Elektronen. Es ist im allgemeinen üblich, die Bezeichnung als elektrische Schwingung Wechselströmen von sehr großer Frequenz ν vorzubehalten. Ein physikalischer Grund hierfür liegt aber nicht vor. In der Praxis unterscheidet man meist zwischen Niederfrequenz (Frequenzen des technischen Wechselstroms bis zur Größenordnung von etwa $\nu = 1000$ sec^{-1}) und Hochfrequenz (insbesondere die sehr hohen Frequenzen, wie sie bei der drahtlosen Telegraphie und Telephonie in Anwendung kommen, bis etwa zur Größenordnung von $\nu = 10^7 - 10^8$ sec^{-1}).

Ein in einen Stromkreis eingeschalteter Kondensator bildet für Gleichstrom einen unendlich hohen Widerstand, verhindert also das Fließen eines Gleichstroms. Denn der Kondensator lädt sich sehr schnell auf eine Spannung auf, die der angelegten Gleichspannung gleich und ihr entgegen gerichtet ist. Besteht jedoch im Kreise eine Wechselspannung, so ändert sich auch die am Kondensator liegende Spannung und damit seine Ladung ständig, es fließen in den Zuleitungen zum Kondensator periodische Ladungs- und Entladungsströme. Ein eingeschalteter Kondensator verhindert also das Fließen eines Wechselstroms nicht. Man kann das auch so ausdrücken, daß der Wechselstrom durch die im Kondensator fließenden Verschiebungsströme (§ 326) geschlossen wird.

376. Wechselstromwiderstand. Wir betrachten ein System, welches einen reinen Widerstand R, eine Induktivität (Spule) L und einen Kondensator der Kapazität C, sämtlich in Reihe geschaltet, enthält (Abb. 326).

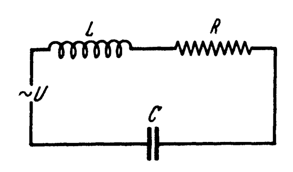


Abb. 326. Reihenschaltung von Widerstand, Selbstinduktion und Kapazität.

Der Widerstand R besteht aus dem Widerstand der Spule und den etwa sonst noch im Kreise vorhandenen Widerständen. An den Enden des Systems liege eine Wechselspannung

$$U = U_0 \sin \omega t. \tag{3}$$

Dann fließt im System ein Wechselstrom

$$i = i_0 \sin(\omega t + \varphi), \tag{4}$$

wobei φ die Phasendifferenz des Stromes gegen die Spannung ist. Da der Strom i seine Stärke und Richtung ständig ändert, so tritt im System eine elektromotorische Kraft der Selbstinduktion (§ 370) $-L\,di/dt$, auf, die der Spannung U entgegengerichtet ist. Ist die jeweilige Ladung des Kondensators e, so liegt am Kondensator eine Spannung vom Betrage e/C (§ 229). Die Spannung U wirkt wie eine im System enthaltene elektromotorische Kraft. Dann folgt aus dem 2. KIRCHHOFFschen Satz (§ 249)

$$U_0 \sin \omega t - L \frac{di}{dt} = i R + \frac{e}{C}. \tag{5a}$$

Wir differenzieren diese Gleichung nach der Zeit. Dabei bedenken wir, daß de/dt die zeitliche Änderung der Ladung des Kondensators bedeutet. Und da diese nur durch den im System fließenden Strom bewirkt wird, so ist nach § 244 $de/dt = i$. Wir erhalten also

$$U_0 \omega \cos \omega t = L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C}. \tag{5b}$$

Setzen wir in dieser Gleichung den Wert von i aus Gl. 4 ein, so können wir die Größen i_0 und φ bestimmen und erhalten durch einfache Rechnung

$$i_0 = \frac{U_0}{Z}, \tag{6}$$

wobei

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \tag{7a}$$

und

$$\varphi = -\operatorname{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}, \tag{8a}$$

so daß

$$i = \frac{U_0 \sin(\omega t + \varphi)}{Z}. \tag{9}$$

Wir definieren ferner die Größe

$$X = \omega L - \frac{1}{C \omega}. \tag{7b}$$

Dann ist nach Gl. 8a

$$\sin \varphi = -\frac{X}{Z}, \quad \cos \varphi = \frac{R}{Z}, \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{X}{R}. \tag{8b}$$

Wie man aus Gl. 6 sieht, ist Z das Verhältnis der Scheitelwerte von Spannung und Strom, spielt also bezüglich dieser Größen die gleiche Rolle, wie bei Gleichstrom der reine Widerstand R. Darum heißt Z der Wechselstromwiderstand,

auch der **Scheinwiderstand** oder die **Impedanz** des Systems. Er hängt von der Kreisfrequenz ω des Wechselstroms ab. Er setzt sich aus zwei Anteilen, dem reinen Widerstand R, auch **Wirkwiderstand** genannt, und dem sog. **Blindwiderstand** X (Gl. 7a und b) zusammen, jedoch nicht in additiver Weise. Vielmehr bilden in graphischer Darstellung R und X die Katheten, Z die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks (Gl. 7a und b).

Die Phasendifferenz φ zwischen Strom und Spannung ist negativ, wenn $\omega L > 1/\omega C$. In diesem Falle hinkt der Strom der Spannung nach. Er eilt ihr voran, wenn $\omega L < 1/\omega C$.

Enthält das System keinen Kondensator, so fällt in Gl. 5a das Glied e/C fort. (Das gleiche ist der Fall für $C = \infty$.) Wir erhalten dann statt der Gl. 7a, 7b und 8a

$$Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}\,, \qquad X = \omega L\,, \tag{9a}$$

$$\varphi = -\operatorname{arctg}\frac{\omega L}{R}\,. \tag{10a}$$

In diesem Fall hinkt der Strom stets hinter der Spannung nach.

Enthält das System keine Induktivität ($L = 0$), so wird

$$Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}\,, \qquad X = \frac{1}{\omega C}\,, \tag{9b}$$

$$\varphi = +\operatorname{arctg}\frac{1}{R\,\omega C}\,. \tag{10b}$$

In diesem Fall eilt der Strom der Spannung stets voraus.

Ist schließlich der Widerstand R verschwindend klein, so wird

$$Z = X = \omega L - \frac{1}{\omega C}\,, \tag{9c}$$

$$\varphi = \pm\frac{\pi}{2}\,.$$

Der Strom hinkt um ein Viertel der Periode hinter der Spannung nach, wenn $\omega L > 1/\omega C$, er eilt der Spannung um den gleichen Betrag vor, wenn $\omega L < 1/\omega C$.

Aus Gl. 7a folgt, daß der Einfluß der Selbstinduktion auf den Wechselstromwiderstand mit steigender Frequenz ω zunimmt, der Einfluß der Kapazität mit steigender Frequenz abnimmt. Bei sehr großer Frequenz wirkt ein Kondensator in einem selbstinduktionsfreien Kreise nahezu wie ein an seine Stelle gesetzter Kurzschluß.

Die soeben erwähnte Wirkung der Selbstinduktion findet eine wichtige praktische Anwendung. Es kommt in der Technik vor, daß in einer mit Gleichstrom oder mit niederfrequentem Wechselstrom beschickten Leitung hochfrequente Schwingungen auftreten, deren Übertritt in benachbarte Leiterteile unerwünscht ist. Man verhindert dies, indem man vor die zu schützenden Leiterteile sog. **Drosselspulen** legt, d. h. Spulen mit hoher Induktivität (Eisenkern) und kleinem Widerstand. Diese bilden für die hochfrequenten Schwingungen einen sehr großen Wechselwiderstand, während sie den Gleichstrom bzw. den niederfrequenten Wechselstrom nur sehr wenig schwächen.

Man beachte, daß man bei Wechselstrom den reinen Widerstand R nicht ohne weiteres gleich dem durch das OHMsche Gesetz für Gleichstrom definierten Widerstand des betreffenden Leiters setzen darf, da bei hoher Frequenz ein starker Hauteffekt mit den in § 335 beschriebenen Wirkungen eintritt. R ist also bei schnellen Schwingungen größer als der reine OHMsche Widerstand.

Es sei nicht unterlassen, zu bemerken, daß die Gl. 9 nicht die allgemeine Lösung der Gl. 5b ist, sondern den stationären Zustand darstellt, der sich in

dem System in sehr kurzer Zeit nach dem Anschalten der Spannung U einstellt, nachdem die sog. Einschwingvorgänge abgeklungen sind.

377. **Reihen- und Parallelschaltung von Wechselstromwiderständen.** Wir betrachten zwei in Reihe geschaltete Wechselstromwiderstände Z_1 und Z_2 (Abb. 327). An den Enden der Kombination liege die Wechselspannung

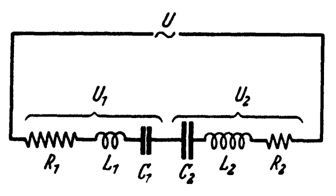


Abb. 327. Reihenschaltung von Wechselstromwiderständen.

$$U = U_0 \sin \omega t,$$

und die Teilspannungen an den Enden von Z_1 und Z_2 seien

$$U_1 = U_1^0 \sin(\omega t + \psi_1), \quad U_2 = U_0^2 \sin(\omega t + \psi_2).$$

Im allgemeinen sind U_1 und U_2 keineswegs untereinander und mit der Spannung U in gleicher Phase. ψ_1 und ψ_2 sind die Phasendifferenzen von U_1 und U_2 gegen U. Durch die Kombination fließe der Strom i. Er hat überall im System die gleiche momentane Stärke, denn es findet ja nirgends eine dauernde Ansammlung von Ladung eines Vorzeichens statt. (Auch in den Kondensatoren nicht, deren Gesamtladung ja stets Null ist.) Der Strom i habe die Phasendifferenz φ gegen die Spannung U und die Phasendifferenzen φ_1 und φ_2 gegen U_1 und U_2. Dann gilt in der ganzen Kombination, deren Wechselstromwiderstand Z sei, sowie in ihren beiden Teilen

$$i = \frac{U_0}{Z} \sin(\omega t + \varphi) = \frac{U_1^0}{Z_1} \sin(\omega t + \psi_1 + \varphi_1) = \frac{U_2^0}{Z_2} \sin(\omega t + \psi_2 + \varphi_2). \quad (11)$$

Diese Gleichungen können nur dann für alle Zeiten t erfüllt sein, wenn

$$\varphi = \varphi_1 + \psi_1 = \varphi_2 + \psi_2. \quad (12)$$

Aus Gl. 11 und 12 folgt

$$\frac{U_0}{Z} = \frac{U_1^0}{Z_1} = \frac{U_2^0}{Z_2}. \quad (13)$$

Die Scheitelwerte U_1^0 und U_2^0 der Teilspannungen verhalten sich also zum Scheitelwert U_0 der Gesamtspannung wie die Wechselstromwiderstände der Teile zum Wechselstromwiderstand der Kombination.

Natürlich ist die Momentanspannung U an den Enden der Kombination gleich der Summe der Teilspannungen U_1 und U_2, also

$$\begin{aligned} U_0 \sin \omega t &= U_1^0 \sin(\omega t + \psi_1) + U_2^0 \sin(\omega t + \psi_2) \\ &= (U_1^0 \cos \psi_1 + U_2^0 \cos \psi_2) \sin \omega t + (U_1^0 \sin \psi_1 + U_2^0 \sin \psi_2) \cos \omega t. \end{aligned} \quad (14)$$

Diese Gleichung kann nur dann für alle Zeiten t erfüllt sein, wenn

$$U_0 = U_1^0 \cos \psi_1 + U_2^0 \cos \psi_2 \quad \text{und} \quad 0 = U_1^0 \sin \psi_1 + U_2^0 \sin \psi_2,$$

oder auf Grund von Gl. 13

$$Z = Z_1 \cos \psi_1 + Z_2 \cos \psi_2 \quad \text{und} \quad 0 = Z_1 \sin \psi_1 + Z_2 \sin \psi_2. \quad (15)$$

Da Z_1 und Z_2 stets positiv sind, so folgt aus der Gl. 15 erstens, daß $Z < Z_1 + Z_2$, außer wenn $\psi_1 = \psi_2 = 0$. Nur in diesem Falle ist $Z = Z_1 + Z_2$. Und es folgt ferner, daß ψ_1 und ψ_2 stets das entgegengesetzte Vorzeichen haben. Eilt die eine Teilspannung der Spannung U voraus, so hinkt die andere ihr nach.

Zwecks späterer Anwendung leiten wir die Bedingung dafür ab, daß $\psi_1 = \psi_2 = 0$ ist, daß also die Teilspannungen U_1 und U_2 mit der Gesamtspannung und unter sich in gleicher Phase sind. In diesem Falle muß nach Gl. 12 auch $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ sein oder nach Gl. 8b

$$\frac{X_1}{R_1} = \frac{X_2}{R_2}. \quad (16)$$

Der betrachtete Sonderfall tritt also nur dann ein, wenn das Verhältnis von Wirkwiderstand R zu Blindwiderstand X in beiden Teilen der Kombination das gleiche ist.

Zur Berechnung des Gesamtwiderstandes Z der Kombination können wir von der Gl. 5b ausgehen. In dieser haben wir dann statt R, L und $1/C$ zu setzen $R_1 + R_2$, $L_1 + L_2$ und $1/C_1 + 1/C_2$. (Die beiden Kapazitäten sind in Reihe geschaltet, vgl. § 266.) Wir erhalten dann an Stelle von Gl. 7a unter Heranziehung von Gl. 7b und 8b

$$Z = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + 2 Z_1 Z_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}\,. \tag{17}$$

Diese Gleichung entspricht dem cos-Satz für Dreiecksseiten. Der Wechselstromwiderstand Z der Kombination ist also gleich der einen Seite eines Dreiecks dessen beiden anderen Seiten gleich den Wechselstromwiderständen der beiden Anteile sind, welche unter sich den Winkel $\pi - (\varphi_1 - \varphi_2)$ bilden (Abb. 328). Man kann das auch so ausdrücken, daß für die Summe von Wechselstromwiderständen die Gesetze der Vektoraddition gelten.

In ähnlicher Weise, wie wir es hier für eine Reihenschaltung durchgeführt haben, kann die Rechnung auch für die Parallelschaltung zweier Wechselstromwiderstände durchgeführt werden (Abb. 329). Wir wollen hier nur das Ergebnis der Berechnung des Wechselstromwiderstandes Z der Kombination bringen. Unter Benutzung der gleichen Symbole wie oben ergibt sich

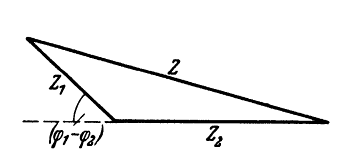


Abb. 328. Wechselstrom-Widerstandsdiagramm einer Reihenschaltung.

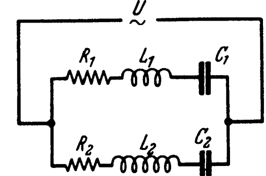


Abb. 329. Parallelschaltung von Wechselstromwiderständen.

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{Z_1^2} + \frac{1}{Z_2^2} + \frac{2}{Z_1 Z_2}\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}\,. \tag{18}$$

Der reziproke Wert $1/Z$ des Widerstandes der Kombination ist also in der Regel kleiner als die Summe $1/Z_1 + 1/Z_2$ der reziproken Teilwiderstände. Nur wenn $\varphi_1 = \varphi_2$ wird $1/Z = 1/Z_1 + 1/Z_2$.

378. **Elektrische Resonanz.** Der Wechselstromwiderstand Z hat bei gegebenem reinen Widerstand R nach Gl. 7a seinen niedrigsten Wert, wenn der Blindwiderstand verschwindet, also für

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0\,. \tag{19}$$

In diesem Falle ist also die Frequenz des Wechselstroms

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0\,. \tag{20}$$

Der Scheitelwert der Stromstärke hat dann nach Gl. 6 bei gegebener Scheitelspannung U_0 den größten möglichen Wert, nämlich $i_0 = U_0/R$. Dieser Fall entspricht demjenigen eines schwingungsfähigen Körpers, der im Tempo seiner Eigenschwingung angestoßen wird, also der mechanischen Resonanz (§ 121). Man bezeichnet ihn daher als elektrische Resonanz, und man nennt die Kreisfrequenz $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ die elektrische Eigenfrequenz des Systems. Besitzt das System einen Kondensator von stetig veränderlicher Kapazität (Drehkondensator, § 230) oder eine Induktivität von stetig veränderlicher

Größe, so kann man es auf die Frequenz des erregenden Wechselstroms abstimmen, wie das ja besonders bei den Rundfunkapparaten bekannt ist.

379. **Wechselstromleistung. Effektivwerte von Strom und Spannung.** Die Momentanleistung eines Wechselstroms ist, wie diejenige eines Gleichstroms (§ 260), durch das Produkt Ui aus der Stromstärke und der zwischen den Enden des Stromkreises herrschenden Spannung gegeben. Bei Wechselstrom ändert die Leistung fortwährend ihre Größe und, sofern es sich nicht um einen reinen Widerstand handelt, sogar ihr Vorzeichen. Tatsächlich beobachtet wird der Mittelwert der Momentanleistungen über eine längere Zeit. Da sich jeweils nach einer Periode τ alle Vorgänge genau wiederholen, so findet man den Mittelwert A der Leistung durch Mittelung über die Dauer einer Periode, wobei wir $U = U_0 \sin \omega t$ und $i = i_0 \sin(\omega t + \varphi)$ setzen.

$$A = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau U_0 i_0 \sin \omega t \sin(\omega t + \varphi)\, dt = \frac{1}{2} U_0 i_0 \cos \varphi . \tag{21}$$

φ ist die Phasendifferenz zwischen Strom und Spannung. Die Leistung ist also um so größer, je größer $\cos\varphi$ ist. Ihr Maximum erreicht sie, wie man aus Gl. 8b abliest, für $R = Z$, also erstens im Fall eines reinen Widerstandes, zweitens im Fall der Resonanz. Sie nähert sich dem Betrage Null, wenn R gegenüber Z verschwindend klein wird. Dieser Fall eines sog. wattlosen Stromes kann bei Verwendung einer Spule aus dickem Draht und nicht zu kleiner Selbstinduktion sehr weitgehend angenähert werden.

Zwischen den Scheitelwerten U_0 und i_0 von Strom und Spannung besteht nach den Gl. 6 und 8b die Beziehung $U_0 = i_0 R/\cos\varphi$. Demnach können wir statt Gl. 21 auch schreiben

$$A = \tfrac{1}{2} i_0^2 R . \tag{22}$$

Diese Gleichung besagt, daß, über eine längere Zeit gemittelt, ein Leistungsverbrauch nur im Wirkwiderstand R stattfindet, und zwar genau entsprechend dem Jouleschen Gesetz (§ 260). Denn $i_0^2/2$ ist ja der zeitliche Mittelwert von i^2 bei einem Wechselstrom vom Scheitelwert i_0. Natürlich wird die jeweilige Stärke des Stromes durch Kapazität und Induktivität, also durch den Blindwiderstand X, mitbestimmt. In diesem geht aber im zeitlichen Mittel keine Energie verloren. Denn die in einem Augenblick zum Aufbau des elektrischen Feldes im Kondensator bzw. des magnetischen Feldes in der Induktivität verbrauchte Energie wird nach einer halben Periode wieder abgegeben. Die momentane Leistung eines Wechselstroms setzt sich also aus zwei Teilen zusammen, der Wirkleistung im Wirkwiderstand R und der im zeitlichen Mittelwert verschwindenden Blindleistung im Blindwiderstand X.

Durch Vergleich von Gl. 22 mit § 260 erkennt man, daß ein Wechselstrom mit dem Scheitelwert i_0 in einem Widerstand R die gleiche Leistung liefert wie ein Gleichstrom bei der Stromstärke $i = i_0/\sqrt{2}$. Man nennt diesen Wert den Effektivwert des Stromes

$$i_{\text{eff.}} = \frac{i_0}{\sqrt{2}} = 0{,}707\, i_0 . \tag{23a}$$

Ebenso ist der Effektivwert der Spannung definiert als

$$U_{\text{eff.}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} = 0{,}707\, U_0 . \tag{23b}$$

380. **Messung von Induktivitäten und Kapazitäten in der Brückenschaltung.** Wechselstromwiderstände können wie Gleichstromwiderstände in

der WHEATSTONEschen Brückenschaltung verglichen werden (§ 252). An die Stelle der Gleichstromquelle tritt eine Wechselstromquelle, an die Stelle des Galvanometers im Brückenzweig meist ein Telephon, sonst ein anderes empfindliches, wechselstromanzeigendes Meßinstrument. Wird ein Telephon verwendet, so benutzt man einen Wechselstrom, dessen Frequenz derjenigen eines im akustischen Hörbereich liegenden Tones entspricht, und man erkennt die Stromlosigkeit des Brückenzweiges am Verstummen des Telephons.

Abb. 330 zeigt eine Schaltung zur Vergleichung zweier Induktivitäten. Diese liegen in zwei aneinanderstoßenden Zweigen der Schaltung. Die reinen Widerstände in diesen Zweigen sind R_1 und R_2. Sie bestehen erstens aus den Widerständen der Induktivitäten selbst. Außerdem muß sich aber in einem dieser beiden Zweige — in welchem, zeigt sich erst im Laufe der Messung — ein stetig veränderlicher Zusatzwiderstand befinden. Die beiden andern Zweige enthalten reine, d. h. selbstinduktionsfreie Widerstände R_3 und R_4, von denen mindestens der eine veränderlich sein muß. Häufig benutzt man an dieser Stelle, wie bei der Messung reiner Widerstände, einen Schleifdraht. Die Spannung der Wechselstromquelle sei U, die Teilspannungen an den Enden der vier Zweige seien U_1, U_2, U_3, U_4. Dann ist Bedingung für Stromlosigkeit im Brückenzweig, daß die Endpunkte des Brückenzweiges auf gleicher Spannung sind, und zwar zu jeder Zeit. Das ist nur dann möglich, wenn die Teilspannungen U_1 und U_2 mit den Teilspannungen U_3 und U_4 in gleicher Phase sind. Da die Zweige 3 und 4 reine Widerstände enthalten, so sind die an ihnen liegenden Teilspannungen stets in gleicher Phase mit der Betriebsspannung U, und infolgedessen müssen es die Teilspannungen U_1 und U_2 auch sein. Sie müssen daher auch unter sich in gleicher Phase sein, und es gilt demnach bei Stromlosigkeit des Brückenzweiges für die in Reihe geschalteten Zweige 1 und 2 die Gl. 16 (§ 377). In unserm Falle ist $X_1 = L_1\omega$, $X_2 = L_2\omega$, und es folgt aus Gl. 16

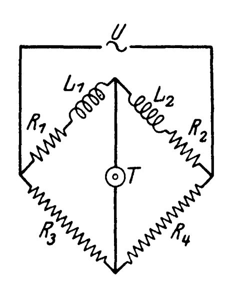


Abb. 330. Messung von Induktivitäten in der Brückenschaltung.

$$\frac{L_1}{R_1} = \frac{L_2}{R_2}. \tag{24}$$

Demnach ist Vorbedingung für Stromlosigkeit des Brückenzweiges, daß sich die Widerstände in den Zweigen 1 und 2 wie die zugehörigen Induktivitäten verhalten. Der obenerwähnte Zusatzwiderstand dient dazu, diesen Zustand herzustellen. Ohne diese Maßnahme ist zwar ein mehr oder weniger verwaschenes Tonminimum im Telephon, aber kein vollständiges Verstummen zu erreichen. Da alle Teilspannungen in gleicher Phase sind, so gilt in unserm Falle die Gl. 13 (§ 377) nicht nur für die Scheitelwerte der einzelnen Teilspannungen, sondern auch für ihre Momentanwerte, so daß im oberen Zweige $U_1/U_2 = Z_1/Z_2$, im unteren Zweige $U_3/U_4 = R_3/R_4$. Da nun aber wegen Stromlosigkeit des Brückenzweiges $U_1 = U_3$, $U_2 = U_4$, so folgt

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\sqrt{R_1^2 + \omega^2 L_1^2}}{\sqrt{R_2^2 + \omega^2 L_2^2}} = \frac{R_3}{R_4}. \tag{25}$$

Aus den Gl. 24 und 25 folgt dann durch einfache Rechnung

$$L_1 : L_2 = R_1 : R_2 = R_3 : R_4. \tag{26}$$

Hieraus kann z. B. L_1 berechnet werden, wenn L_2 und das Verhältnis R_3/R_4 bekannt ist.

In entsprechender Weise kann man zwei Kapazitäten C_1 und C_2 vergleichen. Haben die Dielektrika der Kondensatoren keine merkliche Leitfähigkeit, so genügt die einfache, in Abb. 331 dargestellte Schaltung. Ähnlich wie oben ergibt sich als Bedingung für Stromlosigkeit des Brückenzweiges

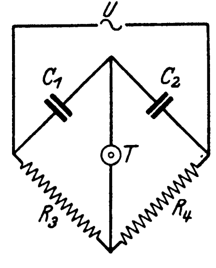


Abb. 331. Messung von Kapazitäten in der Brückenschaltung.

$$C_1 : C_2 = R_4 : R_3. \tag{27}$$

Bei merklicher Leitfähigkeit der Kondensatoren muß durch einen Zusatzwiderstand dafür gesorgt werden, daß auch hier die Gl. 16 (§ 377) erfüllt ist.

381. **Drehstrom.** Der heute technisch vorwiegend verwendete Drehstrom ist ein Spezialfall sog. verketteter Mehrphasenströme. Er wird auf drei Leitern übertragen, welche gegen Erde die Spannungen

$$U_1 = U_0 \sin \omega t, \quad U_2 = U_0 \sin(\omega t + 120^0), \quad U_3 = U_0 \sin(\omega t + 240^0) \tag{28}$$

haben. Verbindet man nur zwei Enden des Dreileitersystems durch einen Stromkreis, so erhält man in diesem einen einfachen Wechselstrom. Die so erzeugbaren Spannungen $U_1 - U_2$, $U_2 - U_3$, $U_3 - U_1$ haben, ebenso wie die Spannungen U_1, U_2, U_3 selbst gegen Erde, unter sich eine Phasendifferenz von je 120^0, sie sind aber um den Faktor $\sqrt{3}$ größer als diese. Denn es ist z. B. $U_2 - U_1 = U_0[\sin(\omega t + 120^0) - \sin \omega t] = 2\,U_0 \cos(\omega t + 60^0) \cdot \sin 60^0 = U_0 \sqrt{3} \cos(\omega t + 60^0) = 1{,}73\, U_0 \cos(\omega t + 60^0)$.

Hat man daher, wie das in den großen Netzen meist üblich ist, einen Drehstrom, dessen Wechselstromkomponenten (Phasen) eine Effektivspannung von 220 Volt gegen Erde haben, so kann man, wenn man nicht alle drei Phasen verwenden will, was ja z. B. zum Betriebe elektrischer Beleuchtung nicht in Frage kommt, entweder nur eine der Phasen des Drehstroms und einen auf dem Potential der Erde gehaltenen „Nulleiter" benutzen und hat dann eine Effektivspannung von 220 Volt zur Verfügung, wie sie heute z. B. für die gewöhnlichen Hausanschlüsse allgemein üblich ist. Oder man schließt an zwei Phasen der Drehstromleitung an und hat zwischen ihnen eine Effektivspannung von etwa 380 Volt zur Verfügung, was für viele technische Zwecke bequem ist.

Will man alle drei Phasen des Drehstroms ausnutzen, so verwendet man ihn entweder in der sog. Sternschaltung oder der Dreieckschaltung (Abb. 332). Die drei Wechselstromwiderstände Z sind einander gleich.

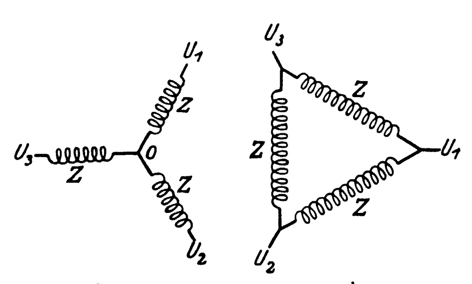


Abb. 332. a Sternschaltung, b Dreieckschaltung.

Stellt man drei gleiche Spulen unter einem Winkel von 120^0 gegeneinander geneigt auf und legt an die eine die Spannung $U_1 - U_2$, an die zweite die Spannung $U_2 - U_3$, an die dritte die Spannung $U_3 - U_1$, so überlagern sich in der Mitte des Raumes zwischen den drei Spulen die magnetischen Felder der drei Stromkreise derart, daß ein magnetisches Feld resultiert, welches konstante Größe hat, und dessen Richtung sich während einer Periode des Drehstroms mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um 360^0 dreht (Drehfeld).

Auf diesem Drehfeld beruhen die Drehstrommotore. Ihre Spulen haben Eisenkerne, und zwischen ihnen befindet sich der Anker, der im einfachsten Falle aus einem drehbaren Kupferkäfig mit Eisenkern oder einer oder

mehreren in sich geschlossenen auf einen Eisenkern gewickelten Windungen bestehen kann. Unter der Wirkung des Drehfeldes entstehen im Anker Wirbelströme. Diese erfahren durch das Drehfeld eine Kraftwirkung, welche den Anker im Drehungssinn des Feldes dreht. Umschaltung der Stromrichtung in einer der drei Feldspulen bewirkt Umkehrung des Drehungssinns.

382. **Transformatoren.** Ein Transformator verwandelt einen Wechselstrom von bestimmter Spannung in einen Wechselstrom von beliebiger anderer Spannung. Abb. 333 zeigt das Schema eines Transformators. Er besteht aus einem meist ringförmig geschlossenen Kern aus weichem Eisen (Eisenblechen), auf den die Primärspule A und die Sekundärspule B aufgewickelt sind. Fließt durch die Primärspule ein Wechselstrom, so erzeugt er im Eisenkern einen mit der Frequenz des Wechselstroms veränderlichen magnetischen Kraftfluß, dessen Kraftlinien fast sämtlich im Innern der Kerns ringförmig in sich zurücklaufen. Dieser zeitlich veränderliche Kraftfluß wirkt induzierend auf die Sekundärspule und erzeugt in ihr eine induzierte elektromotorische Kraft, die die gleiche Frequenz hat wie der primäre Wechselstrom. Es sei N_1 die Windungszahl der Primärspule, N_2 die der Sekundärspule, F der Querschnitt des Eisenkerns, l die Länge der Primärspule, i der Momentanwert des Primärstroms, U_1 der Scheitelwert der Primärspannung, μ die Permeabilität des Eisenkerns. Es sei ferner Z der Wechselstromwiderstand der Primärspule; ihr Widerstand R sei sehr klein. Dann ist nach Gl. 9a (§ 376) $Z = L\omega$, wenn L die Induktivität der Primärspule bedeutet. Bei geeigneter Wahl des Anfangspunktes der Zeit t (§ 375) können wir schreiben $i = U_1 \sin \omega t / Z$. Dann ist bei Leerlauf, d. h. wenn in der Sekundärspule kein Strom fließt, der Kraftfluß durch den Querschnitt F des Kerns

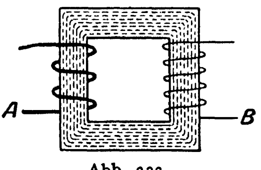


Abb. 333. Schema eines Transformators.

$$\Phi = \frac{4\pi\mu N_1 F}{l} i = \frac{4\pi\mu N_1 F}{l} \frac{U_1}{Z} \sin \omega t = \frac{4\pi\mu N_1 F}{l} \frac{U_1}{L\omega} \sin \omega t ,$$

und daher die zeitliche Änderung des Kraftflusses

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{4\pi\mu N_1 F}{lL} U_1 \cos \omega t .$$

Nun ist nach § 357 $L = \frac{4\pi\mu N_1^2 F}{l}$, und wir erhalten

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{N_1} U_1 \cos \omega t .$$

Da die Sekundärspule N_2 Windungen hat, so ist der durch ihre Windungsfläche hindurchtretende Kraftfluß gleich $N_2 \Phi$ und die in ihr induzierte elektromotorische Kraft

$$E = N_2 \frac{d\Phi}{dt} = \frac{N_2}{N_1} U_1 \cos \omega t = E_2 \cos \omega t .$$

Es verhält sich daher der Scheitelwert E_2 der sekundären elektromotorischen Kraft zum Scheitelwert der Primärspannung wie die sekundäre zur primären Windungszahl

$$E_2 : U_1 = N_2 : N_1 .$$

(Übersetzungsverhältnis des Transformators.) Wird der Transformator belastet, fließt also in seiner Sekundärwicklung ein Strom, so sinkt das Übersetzungsverhältnis, weil der induzierte Sekundärstrom den Kraftfluß herabsetzt. Es be-

steht hier eine Analogie zum Sinken der Klemmenspannung eines Elementes bei steigender Belastung.

Ein Transformator verändert also die Spannung eines Wechselstroms. Man kann einen Wechselstrom sowohl auf höhere wie auf niedrigere Spannung transformieren.

Bei Leerlauf, d. h. wenn die Sekundärspule nicht geschlossen ist, sind wegen der hohen Selbstinduktion und des kleinen Widerstands des Transformators Strom und Spannung in der Primärspule nahezu um 90° gegeneinander verschoben, und es fließt in ihr ein sehr nahezu wattloser, keine Energie verbrauchender Strom (§ 379). Wird die Sekundärspule durch einen Stromkreis geschlossen, so wird die Phasendifferenz zwischen Strom und Spannung in der Primärspule infolge der induzierenden Rückwirkung der jetzt stromdurchflossenen Sekundärspule auf sie kleiner. Die Leistung des primären Wechselstroms ist dann derjenigen des sekundären Stroms fast genau gleich, nur sehr wenig größer. Bei der Transformation tritt also nur ein sehr geringer Energieverlust ein.

In dieser Möglichkeit einer beliebigen, fast verlustlosen Änderung der Spannung, die bei Gleichstrom nicht besteht, liegt der große technische Vorteil des Wechselstroms, der dazu geführt hat, daß er in der Starkstromtechnik den Gleichstrom immer mehr verdrängt hat. Dieser Vorteil macht sich besonders bemerkbar, seitdem man dazu übergegangen ist, die Erzeugung elektrischer Energie immer mehr an die Stellen zu verlegen, wo die elektrische Energie am billigsten, d. h. ohne wesentlichen Materialtransport, erzeugt werden kann, also in die Nähe von Kohlenfeldern oder Wasserkräften. Die verfügbare Leistung sei $A = E i$, der Widerstand der Zuleitung vom Erzeugungsort zur Verbrauchsstelle (Überlandleitung) R. Dann ist die in diesem Widerstand, also nutzlos, verbrauchte Leistung $A' = i^2 R = A^2 R/E^2$. Der relative Energieverlust in der Zuleitung beträgt also $A'/A = A R/E^2$. Er ist bei gegebener Leistung A und gegebenem Widerstand R der Zuleitung um so kleiner, je größer die Spannung E ist. Um so kleiner ist dann natürlich auch die Stromstärke in der Zuleitung. Die Fernleitung elektrischer Energie gestaltet sich also um so wirtschaftlicher, je höher die Spannung und je niedriger die Stromstärke in den Fernleitungen ist. Man transformiert daher die Energie am Erzeugungsort auf hohe Spannung (100000 Volt und mehr) und transformiert sie am Verbrauchsorte auf die jeweils gewünschte Spannung herunter.

383. **Schwingungen von elektrischen Schwingungskreisen.** Ein Kondensator von der Kapazität C sei geschlossen durch den Widerstand R und die Induktivität L (Abb. 334). Am Kondensator bestehe zur Zeit $t = 0$ aus irgendeinem Grunde die Spannung U_0, so daß seine eine Belegung eine positive, seine andre Belegung eine gleich große negative Ladung trägt. Diese Ladungen werden sich nunmehr durch R und L auszugleichen suchen. Es entsteht ein Strom, dessen Stärke zeitlich veränderlich ist, und gleichzeitig sinkt die Spannung am Kondensator. Zur Zeit t sei die Spannung am Kondensator U, die Stromstärke i, die Ladung des Kondensators $e = UC$. Wegen der zeitlichen Veränderlichkeit des Stromes i besteht im System eine elektromotorische Kraft der Selbstinduktion $-L\,di/dt$. Die Teilspannungen im System sind die Spannung iR am Widerstande R und die Spannung $U = e/C$ am Kondensator. Daher folgt aus dem zweiten Kirchhoffschen Satz

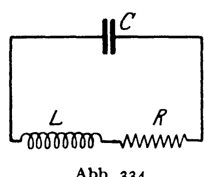


Abb. 334. Schwingungskreis.

$$-L\frac{di}{dt} = iR + U = iR + \frac{e}{C}. \tag{29}$$

Wir dividieren diese Gleichung durch L und differenzieren sie nach der Zeit, wobei wir $de/dt = i$ setzen. Wir erhalten dann

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0 . \tag{30}$$

Jetzt setzen wir

$$\frac{R}{L} = 2\beta , \qquad \frac{1}{LC} = \omega_0^2 \tag{31}$$

und können dann statt Gl. 30 schreiben

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\beta\frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0 . \tag{32}$$

Wir wollen jetzt voraussetzen, daß zur Zeit $t = 0$ die Stromstärke $i = 0$ und die Spannung am Kondensator $U = U_0$ ist. Dann lautet die Lösung dieser Gleichung

$$i = -\frac{U_0}{L\omega} e^{-\beta t} \sin \omega t . \tag{33}$$

Dabei ist gesetzt

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} . \tag{34}$$

Mit Hilfe der Beziehung $i = de/dt = C\,dU/dt$ erhalten wir ferner

$$U = U_0 e^{-\beta t} \frac{\omega_0}{\omega} \sin(\omega t + \varphi) . \tag{35}$$

Dabei ist φ durch die Gleichungen

$$\sin\varphi = \frac{\omega}{\omega_0} , \qquad \cos\varphi = \frac{\beta}{\omega_0} \tag{36}$$

definiert. Die Phasendifferenz zwischen Spannung und Strom beträgt also, wegen des negativen Vorzeichens von i, $\pi - \varphi$. Voraussetzung für diese Form der Lösung ist, daß $\beta < \omega_0$, d. h. daß $R < 2\sqrt{L/C}$ ist, eine Voraussetzung, die in den praktisch in Frage kommenden Fällen stets erfüllt ist.

Die Gl. 33 und 35 stellen eine Schwingung des Stromes und der Spannung im System dar. Die Spannung U eilt dem Strom i um die Phasendifferenz $\pi - \varphi$ voraus. Da in allen praktisch wichtigen Fällen $\beta \ll \omega_0$ ist, so folgt aus Gl. 36, daß φ, und deshalb auch $\pi - \varphi$, sehr nahezu gleich $\pi/2$ ist. Im Schwingungskreis fließt ein Wechselstrom, bei dem die Maxima der Spannung sehr nahezu mit den Minima der Stromstärke zusammenfallen und umgekehrt. Ein solcher Vorgang heißt eine elektrische Schwingung. Die Amplituden von Strom und Spannung enthalten den Faktor $e^{-\beta t}$. Es liegt also eine gedämpfte Schwingung vor (§ 118). Die Dämpfung ist um so geringer, je kleiner β, also je kleiner der Widerstand R ist. Das ist ohne weiteres verständlich, denn die Dämpfung beruht auf einem Verlust an Schwingungsenergie, also auf der Leistung des Wechselstroms, und die für den Verlust allein in Frage kommende Wirkleistung (§ 379) ist dem Widerstand R proportional. Die Kreisfrequenz ω der Schwingung ist bei kleinem β nach Gl. 34 nahezu gleich ω_0. Das aber ist die Größe, die wir bereits in § 378 als die Eigenfrequenz eines solchen Systems definiert hatten.

Die Maxima der Stromstärke entsprechen einem Maximum der magnetischen Feldenergie in der Induktivität, die Maxima der Spannung einem Maximum der elektrischen Feldenergie im Kondensator. Da diese Maxima gegeneinander nahezu um $\pi/2$ in Phase verschoben sind, so pendelt die Feldenergie periodisch zwischen dem magnetischen und elektrischen Felde hin und her und verzehrt sich allmählich durch die erzeugte JOULEsche Wärme. Noch anschaulicher kann

man sagen, daß die Elektronen zwischen den beiden Belegungen des Kondensators hin- und herpendeln. Solange sie sich auf einer der beiden Belegungen befinden, haben sie potentielle Energie (elektrische Feldenergie im Kondensator), auf ihrem Wege zwischen den Belegungen, also als elektrischer Strom, haben sie kinetische Energie (magnetische Feldenergie in der Induktivität). Es liegt eine vollkommene Analogie zu einem in einem reibenden Medium schwingenden Pendel vor, bei dem ein ständiger Wechsel zwischen potentieller und kinetischer Energie stattfindet, und bei dem sich die Schwingungsenergie allmählich durch Reibung verzehrt. In Abb. 331 ist der Verlauf einer gedämpften elektrischen Schwingung, aufgenommen mit der BRAUNschen Röhre (§ 307), dargestellt.

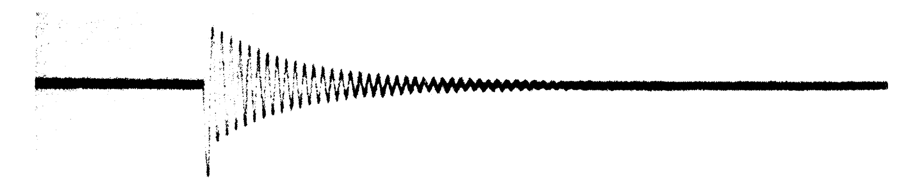


Abb. 335. Gedämpfte elektrische Schwingung.

Aus Gl. 31 folgt für die Schwingungsdauer τ und die Schwingungszahl ν einer ganz ungedämpften Schwingung

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}, \qquad \nu = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \tag{37}$$

Zur Demonstration elektrischer Schwingungen können wir uns z. B. eines Schwingungskreises bedienen, der aus der Sekundärspule S eines Funkeninduktors, einer Leidener Flasche C als Kondensator und einer Funkenstrecke F zwischen Metallkugeln besteht, die in der aus Abb. 336 ersichtlichen Weise miteinander verbunden sind. Setzt man den Induktor durch Anlegen einer Spannung an die mit einem Unterbrecher verbundene Primärspule P in Betrieb, so entsteht bei jedem Stromschluß und jeder Stromöffnung des primären Stromes in der Sekundärspule eine induzierte elektromotorische Kraft, welche den Kondensator auflädt. Dieser entlädt sich dann in den Pausen zwischen den einzelnen Induktionsprozessen durch die Sekundärspule bzw. die Funkenstrecke. Diese tritt jedesmal in Tätigkeit, wenn der Kondensator sich auf die zum Durchbrechen der Luftstrecke zwischen den Kugeln nötige Spannung aufgeladen hat. Betrachtet man die Funken in einem rotierenden Spiegel, welcher die zeitlich nacheinander am gleichen Ort stattfindenden Erscheinungen räumlich getrennt nebeneinander zu beobachten ermöglicht, so sieht man, daß jeder scheinbare Einzelfunke aus einer Anzahl von schnell aufeinanderfolgenden Teilfunken besteht, welche von den einzelnen Hin- und Herschwingungen des Kreises herrühren. Die Schwingung ist in diesem Falle stark gedämpft, weil bei jeder Schwingung viel Energie in dem Widerstand der Funkenstrecke in Wärme verwandelt wird.

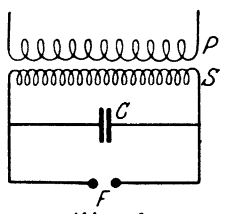


Abb. 336. Zur Demonstration elektrischer Schwingungen.

384. **TESLA-Schwingungen.** Zur Erzeugung hochfrequenter Schwingungen von hoher Spannung dient der TESLA-Transformator (Abb. 337). Er besteht aus einem primären Schwingungskreis mit der Kapazität C, der Induktivität L_1 und der Funkenstrecke F_1. Mit der Induktivität L_1, die nur wenige Windungen besitzt, ist die Induktivität L_2 des Sekundärkreises gekoppelt,

deren Windungszahl erheblich größer ist. Der Primärkreis wird an die Sekundärspule eines Induktors angeschlossen und, wie in § 383 (Abb. 336) beschrieben, zur Schwingung angeregt. Diese Schwingungen entladen sich über die Funkenstrecke F_1 und reißen plötzlich ab, wenn die Spannung im Primärkreis nicht mehr zum Durchschlag der Funkenstrecke ausreicht. Infolgedessen ist die Änderung des Kraftflusses Φ in der Spule L_2 eine sehr schnelle, d. h. $d\Phi/dt$ erreicht hohe Werte, und deshalb wird im Sekundärkreis des TESLA-Transformators eine hohe elektromotorische Kraft induziert, die zu einer hohen Spannung an der Funkenstrecke F_2 des Sekundärkreises Veranlassung gibt. Im Sekundärkreis fließen bei ausreichender Energiezufuhr zum Primärkreis sehr starke Ströme von schnell wechselnder Richtung, die infolgedessen in ihrer Umgebung und selbst auf größere Entfernung starke Induktionswirkungen ausüben. Elektrodenlose Entladungsröhren leuchten infolge der starken und schnell wechselnden elektrischen Felder noch in mehreren Metern Entfernung vom Sekundärkreis auf.

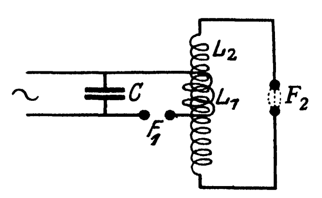


Abb. 337. TESLA-Transformator.

Es ist bemerkenswert, daß die starken und hochgespannten Ströme im Sekundärkreis den menschlichen Körper, der Gleichstrom von mehr als etwa 5 Milliampere nicht verträgt, passieren können, ohne ihm zu schaden. Das liegt nach NERNST daran, daß es sich hier um sehr hochfrequente Ströme handelt. Die Schädigungen des menschlichen Körpers durch zu starken Gleichstrom rühren davon her, daß die Leitung im Körper eine elektrolytische ist, bei der also Ionen wandern. Findet dies in zu starkem Maße statt, so daß Ionen in merklicher Zahl durch die Zellwände hindurchtreten, so erfolgt eine Schädigung der Zellen, deren Flüssigkeitsinhalt dabei Veränderungen in seiner Zusammensetzung erfährt. Bei sehr hochfrequentem Strom aber ändert sich die Stromrichtung fortgesetzt so schnell, daß die Ionen nur ganz kurze Hin- und Herbewegungen ausführen, ohne ihren Ort erheblich zu wechseln.

385. **Elektrische Wellen.** Wir betrachten als einfachsten Fall eines elektrischen Schwingungskreises einen geraden Draht. Daß in einem solchen Draht Schwingungen möglich sind, werden wir sogleich sehen. Wir gehen davon aus, daß der Draht aus irgendeinem Grunde momentan polarisiert ist, d. h. daß sich in ihm in einem bestimmten Augenblick am einen Ende ein Überschuß positiver, am andern Ende ein gleich großer Überschuß negativer Ladung befindet, so daß der Draht einen elektrischen Dipol bildet. Sobald die polarisierende Ursache, z. B. ein äußeres elektrisches Feld, zu wirken aufhört, suchen sich die Überschußladungen auszugleichen, indem die am negativen Ende im Überschuß vorhandenen Elektronen nach dem andern Ende des Drahtes hin strömen. Es entsteht also im Draht ein elektrischer Strom, der zunächst so lange andauert, bis Neutralisation der positiven Überschußladung am positiven Ende eingetreten ist. Der Strom ist aber Träger eines magnetischen Feldes, dessen Kraftlinien den Draht ringförmig umschlingen. Dieses Feld wirkt induzierend auf den Draht zurück und bewirkt nach dem LENZschen Gesetz, solange der Elektronenstrom noch anwächst, eine Schwächung des Elektronenstromes. In dem Augenblick aber, wo die Neutralisation der Ladungen vollzogen ist, also die primäre Ursache für den Strom, das elektrische Feld im Draht, verschwunden ist, beginnt das magnetische Feld zu verschwinden, und dabei bewirkt es, ebenfalls nach dem LENZschen Gesetz, ein weiteres Andauern des Stromes in der ursprünglichen Richtung. Es fließen also weitere Elektronen an das ursprünglich positive Ende des Drahtes, und dieser erhält nunmehr einen negativen Ladungsüberschuß. Sobald das magnetische Feld vollkommen zusammengebrochen ist, wiederholt

sich das gleiche Spiel mit umgekehrtem Vorzeichen. Im Draht besteht eine elektrische Schwingung, er ist ein schwingender elektrischer Dipol, ein sog. Oszillator.

Wir wollen uns jetzt ein Bild von den elektrischen und magnetischen Feldern in der Umgebung des Oszillators machen. Zu Beginn des Vorganges und jedesmal bei der Umkehr der Stromrichtung besteht in der unmittelbaren Umgebung des Oszillators lediglich ein elektrisches Feld, dessen Kraftlinien vom positiven Pol des Dipols zum negativen hin verlaufen. Das wiederholt sich mit jeweiliger Umkehrung der Feldrichtung in Zeitabständen von einer halben Vollschwingung. In zeitlichem Abstand von einer Viertelschwingung von diesen Zuständen, wenn die Neutralisation der Ladungen gerade vollzogen ist, besteht in der unmittelbaren Umgebung des Oszillators kein elektrisches Feld. In diesen Zeitpunkten ist aber die Stromstärke im Oszillator am größten, sein magnetisches Feld also am stärksten. In den zwischen diesen Zuständen liegenden Zeiten besteht in der nächsten Umgebung des Oszillators gleichzeitig ein elektrisches und ein magnetisches Feld, von denen das eine anwächst, wenn das andere abnimmt. Es liegt also die gleiche Pendelung der elektrischen und magnetischen Feldenergie vor, die wir beim Schwingungskreis (§ 383) kennengelernt haben.

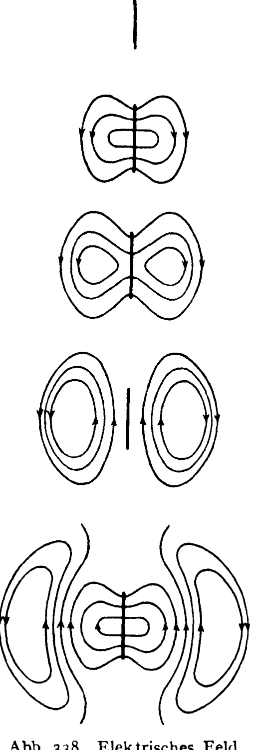


Abb. 338. Elektrisches Feld eines schwingenden Dipols. Nach POHL, Elektrizitätslehre.)

Nunmehr wollen wir aber die weitere Umgebung des Oszillators betrachten. Der ständige Wechsel des elektrischen und magnetischen Feldes in der unmittelbaren Umgebung des Oszillators ist das, was wir in § 327 eine elektromagnetische Störung genannt haben, und wir haben dort gesehen, daß sich solche Störungen mit Lichtgeschwindigkeit im Raume fortpflanzen, indem die Kraftlinien zeitlich veränderlicher magnetischer Felder von elektrischen Kraftlinien, die Kraftlinien zeitlich veränderlicher elektrischer Felder von magnetischen Kraftlinien ringförmig umschlungen sind. Demnach ist der Raum um den Oszillator von einem zeitlich periodisch veränderlichen elektromagnetischen Felde erfüllt, dessen Energie vom Oszillator fortwandert. Der Oszillator strahlt elektromagnetische Feldenergie in den Raum aus. In Abb. 338 ist ein axialer Querschnitt durch das elektrische Feld des Oszillators S gegeben, und zwar beginnend mit dem elektrisch neutralen Zustand des Oszillators (a). Nach einer Viertelschwingung ist maximale Aufladung der Enden eingetreten, die Zahl der vom Dipol ausgehenden elektrischen Kraftlinien ist am größten (b). Nunmehr nimmt die Zahl der Kraftlinien wieder ab, gleichzeitig beginnen sie weiter in den Raum hinaus zu wandern, und es bilden sich ringförmig geschlossene elektrische Kraftlinien um die zeitlich veränderlichen magnetischen Kraftlinien (c). Die Kraftlinien schnüren sich sozusagen vom Dipol ab und wandern wie selbständige Gebilde von ihm fort. Nach Ablauf einer Halbschwingung sind alle elektrischen Kraftlinien vom Dipol wieder losgelöst und bilden fortwandernde ringförmige Gebilde (d). Und so wiederholt sich ständig das gleiche Spiel. Abb. 339 zeigt noch einmal das Kraftlinienbild in größerer Entfernung vom Oszillator. Das Gegenstück zu diesem elektrischen Kraftlinienbild ist der äquatoriale Querschnitt durch die magnetischen Kraftlinien in Abb. 340. Denkt man sich dieses

Bild unter 90° in die Abb. 339 eingefügt, so sieht man, wie die zeitlich veränderlichen elektrischen und magnetischen Kraftlinien sich gegenseitig umschlingen.

Die Schwingungen unseres Oszillators sind aus zwei Gründen stark gedämpft. Erstens wird in ihm Energie durch JOULEsche Wärme verzehrt. Zweitens muß aber der Oszillator die in den Raum hinauswandernde Feldenergie liefern, und zwar auf Kosten seiner Schwingungsenergie. Diesen Anteil der Dämpfung nennt man Strahlungsdämpfung.

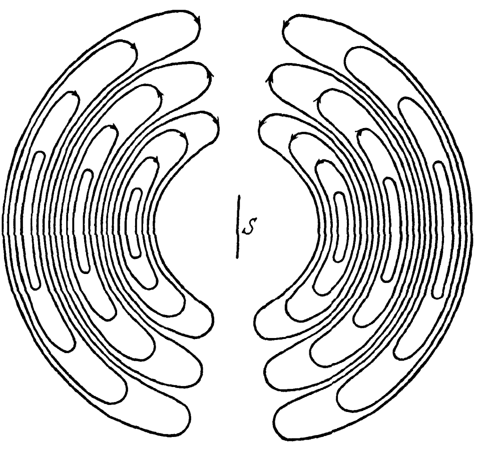


Abb. 339. Elektrisches Feld eines schwingenden Dipols. (Nach POHL, Elektrizitätslehre.)

Die periodischen Schwingungen der elektromagnetischen Feldenergie bezeichnet man als elektromagnetische Wellen oder HERTZsche Wellen (HEINRICH HERTZ 1888), auch kurz als elektrische Wellen. Unser Oszillator ist die einfachste Form eines Senders elektromagnetischer Wellen.

Es darf nicht übersehen werden, daß der Oszillator ebenso wie unser früher besprochener Schwingungskreis eine allerdings sehr kleine Kapazität und Selbstinduktion besitzt, die seine Eigenfrequenz nach Gl. 20 (§ 378) bestimmen. Denn zu jedem Betrage des Ladungsüberschusses e an seinen Enden gehört eine bestimmte Spannung U zwischen ihnen, so daß $e/U = C$. Und seine Selbstinduktion L ist dadurch gegeben, daß zu jedem Betrage von di/dt im Draht eine bestimmte Rückwirkung des magnetischen Feldes gehört, die zum Auftreten einer elektromotorischen Kraft $-L\,di/dt$ Veranlassung gibt.

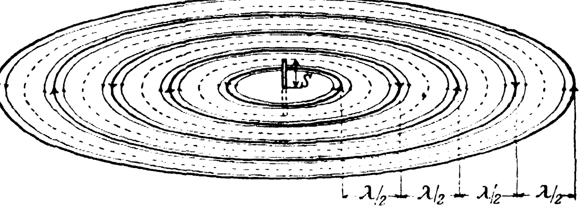


Abb. 340. Magnetisches Feld eines schwingenden Dipols. (Nach POHL, Elektrizitätslehre.)

386. Offene und geschlossene Schwingungskreise. Ein Oszillator der in § 385 beschriebenen Art ist ein Typ eines offenen Schwingungskreises, der in § 383 besprochene Schwingungskreis ist ein geschlossener Schwingungskreis. Ein geschlossener Schwingungskreis ist ein solcher, bei dem die magnetische Feldenergie der Selbstinduktion beim Zusammenbrechen des Feldes zum größten Teil auf induktivem Wege wieder in den Schwingungskreis zurückströmt und zum Wiederaufbau des elektrischen Feldes der Kapazität dient, während nur ein geringer Teil der Energie als elektromagnetische Welle in den Außenraum ausgestrahlt wird. Ein geschlossener Kreis hat daher nur eine geringe Strahlungsdämpfung. Ein offener Schwingungskreis dagegen sendet einen großen Teil seiner Feldenergie in Form elektromagnetischer Wellen in den Raum. Die induktive Rückwirkung des magnetischen Feldes auf den Kreis ist gering und die Strahlungsdämpfung stark.

Zum Senden elektromagnetischer Wellen braucht man daher offene Schwingungskreise. Die Antennen der Sender für drahtlose Telegraphie und Telephonie bilden die Oszillatoren solcher offener Schwingungskreise. Um eine Aussendung starker Wellen zu erzielen, koppelt man einen geschlossenen Schwingungskreis,

in dem man auf irgendeine Weise durch dauernde Energiezufuhr eine starke Schwingung aufrechterhält, mit einem offenen, in dem durch den ersteren Schwingungen erzwungen werden. Der zweite Schwingungskreis strahlt dann die ihm von dem ersten gelieferte Energie als Wellen in den Raum aus.

387. **Empfang elektrischer Wellen.** In jedem Punkt des Raumes, der von einer elektrischen Welle getroffen wird, sind wegen der wechselnden Stärke des elektrischen Feldes Verschiebungsströme vorhanden. Wird in diese ein Leiter gebracht, so entstehen in ihm nach § 326 Leitungsströme, die im gleichen Tempo Stärke und Richtung wechseln. Er vollführt erzwungene elektrische Schwingungen, die in ihrem zeitlichen Ablauf denjenigen im Sender entsprechen. Er wirkt als Empfänger der elektrischen Wellen (Empfangsantenne). Statt des geraden Leiters kann man auch eine aus einigen Windungen bestehende Spule (Rahmenantenne) verwenden, die so aufgestellt wird, daß die Windungsebene in Richtung der ankommenden Wellen liegt. In diesem Falle sind die magnetischen Felder der Welle wirksam. Indem die Spule von magnetischen Kraftlinien durchsetzt wird, die fortwährend ihre Zahl und Richtung ändern, wird in ihr eine elektromotorische Kraft induziert, deren Verlauf ein Abbild der ausgesandten Schwingung ist.

Koppelt man eine solche Empfangsantenne mit einem geschlossenen Schwingungskreis, der auf die einfallende Welle abgestimmt ist, so gerät er seinerseits in Mitschwingung (Resonanz). Auf diesem Prinzip beruht der Wellenempfang bei der drahtlosen Telegraphie und Telephonie (Rundfunk).

388. **Die Versuche von HEINRICH HERTZ.** HEINRICH HERTZ (1888) benutzte bei der Entdeckung der elektrischen Wellen kleine Sender, welche aus einem in der Mitte durch eine kurze Funkenstrecke unterbrochenen Draht bestanden (Oszillator). Die beiden Drahthälften waren mit den beiden Sekundärklemmen eines Funkeninduktors verbunden. Ein solcher Sender schwingt, wenn der Induktor in Betrieb ist und zwischen seinen beiden Hälften Funken überspringen, genau so, wie unser in § 385 betrachteter einfacher Dipol, nur mit sehr starker Dämpfung. (Er wird, wie eine Glocke durch den Klöppel, durch die einzelnen Spannungsstöße des Induktors zu seinen Eigenschwingungen angeregt. Die zeitliche Folge der einzelnen Spannungsstöße hat dabei mit der Frequenz der Schwingung ebensowenig zu tun, wie die der zeitlichen Abstände der einzelnen Glockenschläge mit der Schwingungszahl [Frequenz] des Glockentones.) Zum Nachweis der von diesem Oszillator ausgehenden Wellen im Raum benutzte HERTZ ein ganz ähnliches Gebilde, wieder einen durch eine Funkenstrecke unterbrochenen geraden Draht oder Drahtbügel (Resonator). Stellt man den Draht in die Richtung der elektrischen Kraftlinien des Senders, so treten in ihm unter der Wirkung des elektrischen Feldes Spannungen auf, welche sich darin zeigen, daß zwischen den beiden Drahthälften Fünkchen überspringen.

Den Anstoß zu den Versuchen von HERTZ gab die elektromagnetische Theorie des Lichtes von MAXWELL, nach der das Licht ein elektromagnetischer Wellenvorgang ist (§ 461). Ist dies richtig, so müssen auch die mit Hilfe elektrischer Schwingungskreise erzeugten elektrischen Wellen diejenigen allgemeinen Eigenschaften haben, die wir beim Licht kennen, also insbesondere die Erscheinungen der Reflexion, Brechung, Beugung, Polarisation usw. zeigen. In der Tat konnte HERTZ nachweisen, daß diese Erscheinungen in der erwarteten Weise bei den elektrischen Wellen auftreten. Damit war der elektromagnetischen Lichttheorie eine feste Stütze gegeben. Heute gibt es ebensogut eine „Optik" der elektrischen Wellen wie des sichtbaren und andern Lichtes. Über die Einordnung der elektrischen Wellen in das gesamte elektromagnetische Spektrum s. § 465.

389. Stehende elektrische Drahtwellen. Abb. 341 stellt einen Schwingungskreis dar, dessen Selbstinduktion durch die Sekundärspule eines Induktors gebildet wird, und der zwei Kondensatoren und eine die beiden Enden der Spule verbindende Funkenstrecke enthält. Die Vorrichtung ist im allgemeinen der in Abb. 336 dargestellten sehr ähnlich. Jedoch ist der Kreis durch zwei lange, parallele Drähte verlängert. Beim Betriebe des Induktors lädt jeder einzelne Spannungsstoß die Kondensatoren bis zur Durchschlagsspannung der Funkenstrecke auf, und der Kreis schwingt dann in seiner Eigenfrequenz aus, um beim nächsten Spannungsstoß wieder erregt zu werden. Dabei beobachtet man längs der Doppeldrähte bei geeigneter Drahtlänge folgende Erscheinung. Wir legen quer über die beiden Drähte ein elektrodenloses, mit einem verdünnten Edelgas, z. B. Neon, gefülltes Entladungsrohr. Verschieben wir dieses längs des Drahtsystems, so leuchtet es an gewissen Stellen hell auf, wird bei weiterem Verschieben wieder dunkler, erlischt schließlich, wird dann wieder heller usw. Es zeigt sich, daß sich die Lagen maximaler Helligkeit in gleichmäßigen Abständen wiederholen, und daß die Lagen, in denen das Rohr verlischt, in der Mitte zwischen den Lagen maximaler Helligkeit liegen. Diese Erscheinung beweist, daß das elektrische Feld zwischen den Drähten, also auch die Spannung zwischen den Drähten, sich von Ort zu Ort längs der Drähte periodisch ändert. Dort, wo das Entladungsrohr verlischt, besteht kein Feld, also auch keine Spannung zwischen den Drähten. Tatsächlich kann man auch an diesen Stellen die beiden Drähte durch einen Querdraht verbinden, ohne daß dadurch die Erscheinung gestört wird. Denn wenn man Punkte gleicher Spannung leitend verbindet, so geschieht ja gar nichts.

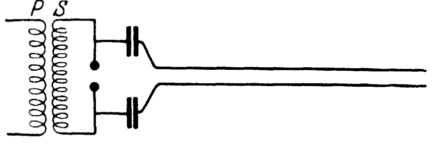


Abb. 341. LECHERsches Drahtsystem.

Die vorstehende Erscheinung bildet eine elektrische Analogie zu den stehenden Wellen der Mechanik (§ 127), z. B. zu den stehenden Schallwellen in der KUNDTschen Röhre (§ 155). Tatsächlich handelt es sich hier um eine stehende elektrische Welle. Sie kommt dadurch zustande, daß die von dem Schwingungskreis längs jedes der Drähte fortlaufende elektrische Schwingung an den Drahtenden reflektiert wird und bei geeigneter Länge des Drahtes derart mit sich selbst interferiert, daß eine stehende Schwingung entsteht, in der, entsprechend den Knoten und Bäuchen des Drucks bei stehenden Schallwellen, Knoten und Bäuche der Spannung in Abständen von je $^1/_4$ der Wellenlänge aufeinander folgen. Nun sind die Schwingungen in den beiden Drähten an gegenüberliegenden Punkten stets um 180° in Phase gegeneinander verschoben. Das hat zur Folge, daß das elektrische Feld zwischen den Drähten in den Spannungsbäuchen Maxima hat und in den Spannungsknoten verschwindet.

Aus dem Abstand der Knoten und Bäuche kann man die Wellenlänge λ der längs der Drähte fortschreitenden elektrischen Schwingung ermitteln (vgl. die ganz analogen Messungen an Schallwellen, § 143). Kennt man die Kapazität C und die Induktivität L des Schwingungskreises, so kann man nach Gl. 37 (§ 383) die Schwingungszahl ν der Schwingung und mit Hilfe der Beziehung $c = \nu\lambda$ (§ 124) die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schwingung längs der Drähte berechnen. Sie ergibt sich bei gut leitenden Drähten sehr nahezu gleich der Lichtgeschwindigkeit. Diese Tatsache, die wir bereits in § 247 erwähnt haben, erklärt sich daraus, daß die Fortpflanzung des elektrischen und magnetischen Feldes längs der Drähte hauptsächlich durch die Induktionswirkungen der zwischen den Drähten bestehenden Verschiebungsströme erfolgen, und diese Induktionswirkungen pflanzen sich mit Lichtgeschwindigkeit fort.

Die Knoten der Spannung sind Bäuche der Stromstärke in den Drähten und umgekehrt. Das freie Ende der Drähte ist notwendig stets ein Stromknoten, also ein Spannungsbauch. Dort, wo die Ladungs- und Entladungsströme des Kondensators in den Draht übertreten, muß ein Strombauch sein. Wir erhalten daher stehende Schwingungen im Drahtsystem, wenn die Drahtlänge diese Forderung nicht verletzt, d. h. wenn sie ein ungerades Vielfaches der Viertelwellenlänge ist.

390. Drahtlose Telegraphie. In der ersten Zeit der drahtlosen Telegraphie benutzte man zum Erzeugen der Wellen Schwingungskreise etwa von der Art, wie sie im § 383 beschrieben sind, in Verbindung mit einer Antenne. Von einem solchen Schwingungskreis geht bei jedem der sehr schnell aufeinanderfolgenden Funken eine Welle aus, welche wegen der großen Dämpfung im Funken ziemlich schnell abklingt. Sie ist bereits innerhalb eines sehr kleinen Bruchteils der Zeit zwischen zwei Funken vollkommen erloschen. Durch einen Taster wird der Primärkreis des Induktors im Tempo der zu übertragenden Morsezeichen geöffnet und geschlossen, so daß die Wellen in Folgen ausgesandt werden, die diesen Zeichen entsprechen. Durch gewisse Einrichtungen am Empfangsorte konnte dann die im Empfangskreise erregte Schwingung dazu benutzt werden, um diese Zeichen hörbar zu machen oder anderweitig aufzunehmen.

Diese Art der Telegraphie mit gedämpften Schwingungen hat unter anderem den großen Übelstand, daß eine gedämpfte Welle nicht nur einen genau auf sie abgestimmten Schwingungskreis erregt, sondern mehr oder weniger stark auch solche, welche auf benachbarte Wellen abgestimmt sind (§ 121). Dieser Nachteil machte sich mit zunehmender Dichte des funkentelegraphischen Netzes immer mehr bemerkbar und führte neben allen sonstigen Übelständen zu schweren, gegenseitigen Störungen. Die modernen Anlagen für drahtlose Telegraphie bedienen sich ausschließlich ungedämpfter Wellen.

391. Maschinensender. POULSEN-Schwingungen. Eine Methode zur Erzeugung ungedämpfter Wellen besteht darin, daß man sie nicht als Eigenschwingungen eines Schwingungskreises erzeugt, sondern mittels eines Generators als Wechselstrom von hoher Frequenz. Es sind ferner Einrichtungen ersonnen, um die Frequenz der auf diese Weise erzeugten Schwingungen noch zu verdoppeln oder zu vervierfachen. Nach dieser Methode arbeitet z. B. die deutsche Großstation in Nauen.

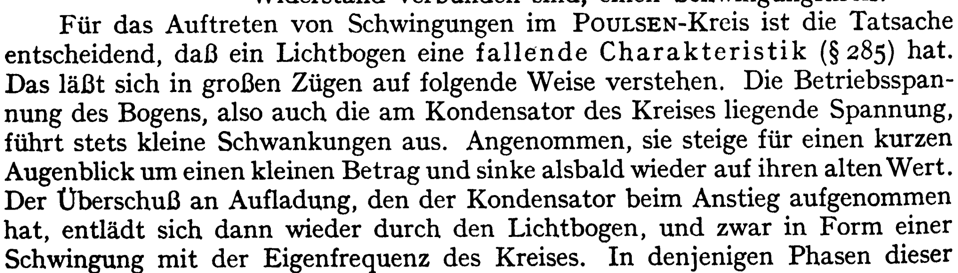


Abb. 342. POULSEN-Schaltung.

Eine andere Art, ungedämpfte Schwingungen zu erzeugen, stammt von POULSEN. Das Prinzip — nicht die technische Ausführungsform — zeigt Abb. 342. Die beiden Kohlen eines elektrischen Lichtbogens A, der mit Gleichstrom (Stromquelle B) betrieben wird, sind durch eine Induktivität L und einen Kondensator C verbunden. Diese bilden mit dem Lichtbogen A, durch den sie wie durch einen Widerstand verbunden sind, einen Schwingungskreis.

Für das Auftreten von Schwingungen im POULSEN-Kreis ist die Tatsache entscheidend, daß ein Lichtbogen eine fallende Charakteristik (§ 285) hat. Das läßt sich in großen Zügen auf folgende Weise verstehen. Die Betriebsspannung des Bogens, also auch die am Kondensator des Kreises liegende Spannung, führt stets kleine Schwankungen aus. Angenommen, sie steige für einen kurzen Augenblick um einen kleinen Betrag und sinke alsbald wieder auf ihren alten Wert. Der Überschuß an Aufladung, den der Kondensator beim Anstieg aufgenommen hat, entlädt sich dann wieder durch den Lichtbogen, und zwar in Form einer Schwingung mit der Eigenfrequenz des Kreises. In denjenigen Phasen dieser

Schwingung, in der der Schwingungsstrom mit dem Betriebsstrom des Bogens gleichsinnig verläuft, ihn also verstärkt, bewirkt diese Stromverstärkung wegen der fallenden Charakteristik eine Widerstandsverminderung des Bogens, also ein noch weiteres Anwachsen der Stromstärke. In den Phasen, wo die beiden Ströme einander entgegengesetzt verlaufen, die Schwingung den Strom im Bogen also schwächt, hat diese Schwächung ein weiteres Sinken der Stromstärke zur Folge. Die Schwingungen werden also durch diese Eigenschaft der Bogenentladung verstärkt. Mit jeder Vergrößerung ihrer Amplitude aber wächst ihre Wirkung auf den Bogen weiter. Der Verstärkung ist erst dann eine Grenze gesetzt, wenn der Energieverlust des Kreises durch JOULEsche Wärme und Ausstrahlung der Energiezufuhr aus der Gleichstromquelle gleichgeworden ist. Diese Energiezufuhr, d. h. die Konstanthaltung der Spannung am Kondensator durch die angelegte Gleichspannung, bewirkt, daß die Schwingungen des Kreises andauern, d. h. ungedämpft sind. Die in die Zuleitungen eingeschalteten Drosselspulen *D*, die für die Schwingungen wegen ihrer hohen Selbstinduktion (Eisenkern) einen sehr großen Widerstand bilden (§ 376), während sie wegen ihres sehr kleinen OHMschen Widerstandes den Gleichstrom kaum schwächen, verhindern ein Entweichen der Schwingungen in das Gleichstromnetz.

Damit die Schwingungen gleichmäßig erfolgen, ist es günstig, den Bogen in einer Wasserstoffatmosphäre brennen zu lassen.

Man kann die Induktivität und Kapazität eines solchen Schwingungskreises so bemessen, daß die Schwingungszahl in den Bereich der akustisch hörbaren Frequenzen fällt. Elektrische Schwingungen dieser Art können am Empfangsorte besonders bequem mit dem Telephon abgehört werden (Hörfrequenzen).

Da der durch den Lichtbogen fließende Strom alle Schwankungen der Schwingung mitmacht, so schwankt die Temperatur im Lichtbogen im Tempo der Schwingung. Infolgedessen erfährt die ihn umgebende Luft Schwankungen ihrer Temperatur, die sich als Druckschwankungen bemerkbar machen. Diese Druckschwankungen pflanzen sich als Schallschwingungen fort, der Lichtbogen tönt.

Die heute überwiegend gebräuchliche Art der Erzeugung ungedämpfter Schwingungen mittels des Röhrensenders wird im § 395 besprochen.

392. Prinzip der drahtlosen Telephonie. Im § 371 ist auseinandergesetzt worden, daß es für die Zwecke der Telephonie darauf ankommt, die Intensität elektrischer Energie, die vom Sende- zum Empfangsort übertragen wird, entsprechend den zu übertragenden Klängen zu modulieren. Wie bei der gewöhnlichen Leitungstelephonie der Gleichstrom, so wird bei der drahtlosen Telephonie die Amplitude einer elektrischen Welle durch einen ihr aufgeprägten Klang moduliert. Die Art, wie dies geschieht, wird im § 395 erörtert werden. Eine derart modulierte elektrische Schwingung hat z. B. den in Abb. 343 schematisch dargestellten Intensitätsverlauf. (Tatsächlich entfallen auf eine Schwebung, denn einer solchen ist dieser Vorgang ähnlich, sehr viel mehr Einzelschwingungen, beim Rundfunk z. B. etwa zwischen 100 und 20000.) Man beachte, daß der Abstand zweier Maxima einer vollen Wellenlänge des aufmodulierten Schalles entspricht.

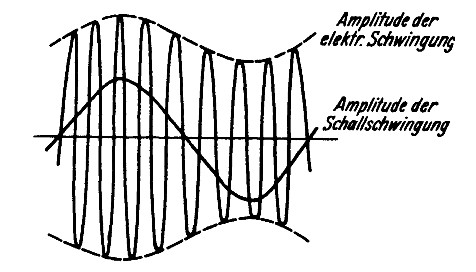


Abb. 343. Modulierte elektrische Schwingung.

Eine solche Modulierung ist natürlich nur bei ungedämpften Wellen möglich, da gedämpfte Wellen ja schon an sich in ihrer Stärke schwanken.

Für den Empfang kommt es darauf an, die Intensitätsschwankungen der ankommenden elektrischen Energie in gleichartige Schwingungen einer Telephonmembran zu übersetzen. Das ist aber nicht auf die Weise möglich, daß man die in einem abgestimmten Schwingungskreise auftretenden Schwingungen einfach durch ein Telephon leitet. Dieses würde ja nur die einzelnen Schwingungen der elektrischen Welle mitmachen, wenn es nicht überhaupt zu träge wäre, um so schnellen Schwingungen zu folgen. Es bliebe also tatsächlich in Ruhe und brächte keinen Ton von der der Modulation entsprechenden Schwingungszahl hervor. Um dies zu erreichen, muß man die im empfangenden Schwingungskreis entstehende Schwingung erst „gleichrichten", d. h. man muß zwischen dem Telephon und dem Schwingungskreis eine Vorrichtung anbringen, welche nur die in der einen Richtung erfolgenden Stromschwankungen hindurchläßt, die anderen aber nicht. Abb. 344 zeigt eine so gleichgerichtete modulierte Schwingung. Auf eine solche Schwingung reagiert ein Telephon auf folgende Weise: Wegen der Trägheit der Telephonmembran folgt diese nicht jeder Einzelschwingung, sondern dem jeweiligen Mittelwert einer großen Zahl der nunmehr einseitig erfolgenden Einzelschwingungen. Dieser Mittelwert aber schwankt entsprechend der den Schwingungen aufgeprägten Modulierung. Die Membran erfährt Durchbiegungen von wechselnder Stärke im Tempo der Schallschwingung, und zwar ist jetzt die auf sie wirkende Kraft wegen der erfolgten Gleichrichtung stets nach der gleichen Seite gerichtet. Die Bewegung der Membran wird also etwa durch die Sinuskurve in Abb. 344 dargestellt.

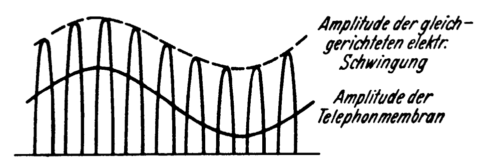


Abb. 344. Gleichgerichtete modulierte Schwingung.

Um eine Schwingung gleichzurichten, bedarf es einer Vorrichtung, die in der einen Richtung den Strom möglichst gut durchläßt, in der andern dagegen so gut wie gar nicht, die also wirkt wie ein sich einseitig öffnendes Ventil auf einen pulsierenden Wasserstrom. Man nennt solche Vorrichtungen daher auch elektrische Ventile. Für die Zwecke der drahtlosen Telephonie sind zwei Apparate dieser Art in Gebrauch, der Kristalldetektor und die Elektronenröhre.

393. Empfang mit Detektor. Ein Kristalldetektor besteht aus einem Kristall — besonders geeignet sind u. a. Molybdänglanz, Bleiglanz, Zinkblende, Pyrit —, der an einer Stelle von der Spitze eines dünnen Drahtes berührt wird. Diese Kontaktstelle hat die Eigenschaft, einen Strom in der einen Richtung verhältnismäßig gut, in der andern sehr schlecht durchzulassen (einseitiger Widerstand). Man kann dies Verhalten mit einem Galvanometer und einem Akkumulator unter Vorschaltung eines ausreichenden Widerstandes leicht nachweisen. Der Ausschlag ist bei der einen Stromrichtung viel größer als bei der andern und läßt sich durch Wahl eines günstigen Punktes auf dem Kristall in der einen Richtung fast ganz unterdrücken. Hiernach ergibt sich die in Abb. 345 dargestellte Schaltung für einen mit Detektor arbeitenden Empfangsapparat. Der aus Induktivität L und Kapazität C bestehende, durch Veränderung der Kapazität auf die aufzunehmende Schwingung abstimmbare Schwingungskreis wird durch die von der einfallenden Welle in der mit ihm verbundenen Antenne A erregten Schwingungen zum Mitschwingen gebracht. Die Spannungsschwankungen am Kondensator erzeugen einen im Tempo der modulierten Schwingung pulsierenden Strom

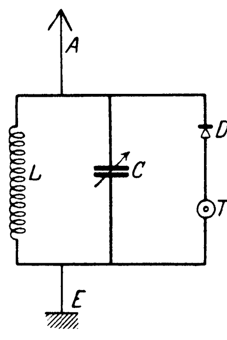


Abb. 345. Empfang mit Detektor.

im Telephon T, von dem aber der Detektor D nur die eine Phase durchläßt. (Eine Kapazität mit einem Pfeil bedeutet in den folgenden Abbildungen einen Drehkondensator, also eine stetig veränderliche Kapazität.) E ist eine Drahtverbindung zur Erde (in einfacheren Fällen über die Wasser- oder Gasleitung), die sog. Erdung.

Da die Erregung des Telephons lediglich durch die geringe Energie erfolgt, welche mittels der Antenne aus der einfallenden Welle entnommen wird, so ist die Möglichkeit des Detektorempfanges auf verhältnismäßig kleine Entfernungen, je nach der Stärke des Senders, beschränkt.

394. **Empfang mit der Elektronenröhre.** Im Gegensatz zum Detekterempfang dient beim Wellenempfang mit der Elektronenröhre die von der Antenne aufgenommene Schwingungsenergie lediglich zur Steuerung der viel größeren Energiebeträge, die von Batterien geliefert oder die bei Netzanschlußgeräten aus dem Lichtnetz entnommen werden können. Eine Elektronenröhre (Abb. 346) besteht aus einem evakuierten Glasgefäß. In diesem befinden sich, mit Zuleitungen nach außen, erstens ein dünner, mittels der Batterie B_2 elektrisch heizbarer, Elektronen aussendender Draht K (§ 284) als Kathode, zweitens das sog. Gitter G, — bei der praktischen Ausführung (Abb. 347) ein spiralig gewundener Draht, in dessen Windungsachse die Kathode liegt, drittens die Anode A, bei der praktischen Ausführung meist eine Kathode und Gitter koaxial umgebender Metallzylinder.

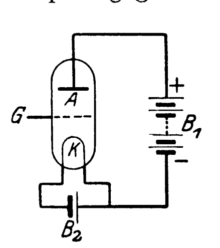
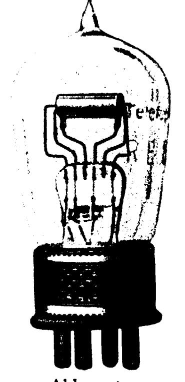


Abb. 346. Schema der Elektronenröhre.


Abb. 347. Elektronenröhre.

Zwischen Kathode und Anode wird die Spannung einer Batterie B_1 gelegt. Die Batterie B_2 dient zum Heizen der Kathode. Wäre das Gitter nicht vorhanden, so würden die Elektronen, die aus dem glühenden Draht austreten, durch die angelegte Spannung ungehindert zur Anode getrieben. Legt man aber an das Gitter, durch dessen Öffnungen die Elektronen an sich zum größten Teil hindurchtreten können, eine Spannung, so hängt es ganz von Größe und Vorzeichen der Spannung zwischen Gitter und Kathode ab, ob die Elektronen durch das Gitter hindurch an die Anode gelangen oder nicht.

Hat das Gitter gegenüber der Kathode eine ausreichend hohe negative Spannung U_g, so gelangen überhaupt keine Elektronen an die Anode, denn sie werden sämtlich durch das zwischen Kathode und Gitter herrschende, verzögernde Feld wieder zur Kathode zurückgetrieben. Der zur Anode gelangende Strom ist $i_a = 0$. Jedoch beginnt schon bei einer bestimmten negativen Gitterspannung ein Anodenstrom zu fließen, und zwar hängt die Höhe der Gitterspannung, bei der dies geschieht, von der Höhe der Anodenspannung U_a ab. Abb. 348 zeigt die sog. Gittercharakteristik einer Elektronenröhre, und zwar bei verschiedenen Anodenspannungen U_a Man sieht, daß der Anodenstrom von einer gewissen Gitterspannung ab ansteigt und schließlich einen konstanten Sättigungswert annimmt. Ferner sieht man, daß sich die Charakteristik bei steigender Anodenspannung U_a nach höheren Werten der Gitterspannung verschiebt.

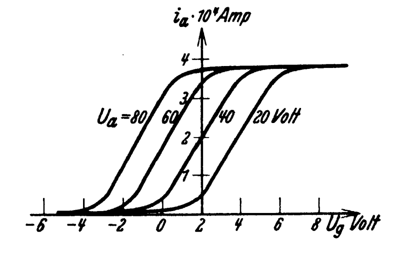


Abb. 348. Gittercharakteristik einer Elektronenröhre bei verschiedenen Anodenspannungen U_a.

Daß ein Anodenstrom bereits fließen kann, wenn die Spannung des Gitters gegenüber der Kathode negativ ist, erscheint zunächst auffällig. Die Erscheinung rührt daher, daß wegen der Struktur des Gitters eine mehr oder weniger große Zahl von Kraftlinien unmittelbar von der Anode zur Kathode verlaufen, und längs dieser Kraftlinien kann ein Elektronenstrom von der Kathode zur Anode fließen. Die Zahl dieser Kraftlinien ist um so größer, je höher die Anodenspannung ist. Deshalb setzt der Anodenstrom schon bei um so niedrigeren Gitterspannungen ein, je höher die Anodenspannung ist. Man bezeichnet diese Erscheinung als Durchgriff. Neben dem Durchgriff ist die Steilheit der Gittercharakteristik diejenige Eigenschaft, die das Verhalten einer Elektronenröhre in der Hauptsache charakterisiert.

Die Elektronenröhre kann nun sowohl zur Gleichrichtung wie zur Verstärkung einer modulierten Schwingung dienen. Wir betrachten zunächst die

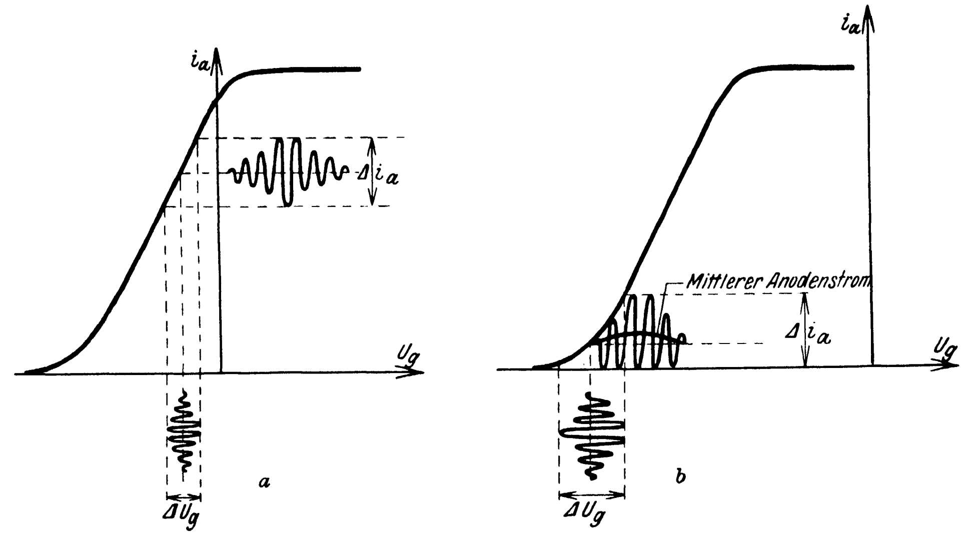


Abb. 349. Wirkung der Elektronenröhre, a als Verstärker, b als Gleichrichter.

Wirkung als Verstärker. In diesem Fall wählt man die Anodenspannung U_a und die Gitterspannung U_g so, daß die letztere einem Punkt etwa in der Mitte des geradlinig ansteigenden Teils der Gittercharakteristik entspricht und dieser im negativen Gitterspannungsbereich liegt. Dieser Gitterspannung werden die Spannungsschwankungen ΔU_g der zu verstärkenden modulierten Schwingung überlagert (Abb. 349a). Die Gitterspannung schwankt also im Tempo und mit der Amplitude der überlagerten Schwingung. Da mit jeder Änderung der Gitterspannung eine Änderung des Anodenstroms verbunden ist, so schwankt der Anodenstrom i_a ebenfalls im Tempo der Schwingung und mit Amplituden, die denjenigen von ΔU_g proportional sind. Die Schwankungen Δi_a des Anodenstromes sind sehr viel stärker als die Schwankungen der schwachen, der empfangenen Schwingung entnommenen Ströme, die die periodischen Spannungsschwankungen des Gitters veranlassen. Die Schwingung ist also bedeutend verstärkt. Man kann die Schwankungen des Anodenstromes ohne weiteres wieder dazu benutzen, um dem Gitter einer zweiten Verstärkerröhre Spannungsschwankungen aufzuprägen, und die Schwingung auf diese Weise weiter verstärken.

Zur Gleichrichtung einer Schwingung mittels der Elektronenröhre sind mehrere Verfahren in Gebrauch. Wir beschränken uns hier auf das leicht ver-

ständliche Verfahren der sog. **Richtverstärkung**. In diesem Fall wird die Gitterspannung so gewählt, daß sie dem unteren Knick der Gittercharakteristik entspricht (Abb. 349b). Die gleichzurichtende Schwingung wird wieder der Gitterspannung überlagert, und diese führt Schwankungen ΔU_g im Tempo und mit der Amplitude der gleichzurichtenden Schwingung aus. Der Anodenstrom i_a schwankt demnach auch hier wieder im Tempo der Schwingung. Aber da wir jetzt nicht im geradlinigen Teil der Charakteristik arbeiten, so sind die Schwankungen Δi_a des Anodenstroms den Schwankungen ΔU_g nicht proportional, wie aus Abb. 349b zu ersehen ist, sondern es entspricht den positiven Amplituden der Gitterspannung eine größere Amplitude des Anodenstroms, als den negativen Amplituden. Die Schwingungen des Anodenstroms erfolgen mehr oder weniger einseitig, und der mittlere Anodenstrom zeigt während einer Schwingung der Modulation eine einseitige Schwingung, deren Dauer genau derjenigen der aufmodulierten Schwingung entspricht. Die Schwingung ist also in gewünschter Weise gleichgerichtet, und außerdem ist sie, wie beim reinen Verstärker, auch verstärkt. Daher der Name Richtverstärker. Die erzielte Einseitigkeit der Amplitude bleibt natürlich erhalten, wenn man die Schwingung mittels einer Verstärkerröhre weiter verstärkt. Die Schwingung bleibt gleichgerichtet.

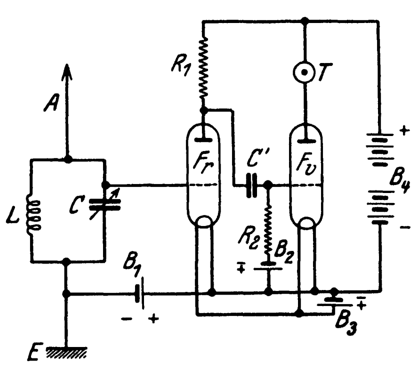


Abb. 350. Einfache Empfangsschaltung mit einem Richtverstärker und einem Verstärker.

Abb. 350 zeigt das Schema einer einfachen Empfangsschaltung mit einem Richtverstärker F_r und einem Verstärker F_v (Ortsempfänger). Die von der Antenne A aufgenommene Schwingung erregt den aus Kapazität C und Induktivität L bestehenden abstimmbaren Schwingungskreis, der an seinem einen Ende zur Erde abgeleitet ist. Die Spannungsschwankungen am Kondensator werden direkt auf das Gitter des Richtverstärkers F_r übertragen, das zur Verwirklichung der Verhältnisse der Abb. 349b mittels der Batterie B_1 auf dem Wege über L die erforderliche negative Spannung gegen die Kathode von F_r besitzt. Die Anode von F_r ist über einen großen Widerstand R_1 (einige Megohm) mit dem positiven Pol der Batterie B_4 von rund 100 Volt Spannung verbunden, deren negativer Pol an der Kathode von F_r liegt. Von der Anode führt eine Verbindung zum Kondensator C'. Es sei E die elektromotorische Kraft der Batterie B_4, U_a die Anodenspannung, i_a der Anodenstrom. Dann ist $E = U_a + i_a R_1$, oder $U_a = E - i_a R_1$. Die Anodenspannung und damit die Spannung am Kondensator C' schwankt also im gleichen Tempo und mit gleichen Amplitudenverhältnissen wie der gleichgerichtete, verstärkte Anodenstrom i_a, und diese Spannungsschwankungen werden über den Kondensator auf das Gitter der Verstärkerröhre F_v übertragen, wo die Schwingungen weiter verstärkt werden. Das Gitter von F_v wird durch eine Batterie B_2 über den Widerstand R_2 auf einer so hohen negativen Spannung gehalten, daß die Verhältnisse der Abb. 349a verwirklicht sind. Die Anode liegt über das Telephon T (Lautsprecher) am positiven Pol der Batterie B_4. Die Batterie B_3 dient zum Heizen der Kathoden. Das Telephon wird von dem verstärkten und gleichgerichteten Anodenstrom durchflossen. Seine Membran ist viel zu träge, um den Einzelschwingungen der modulierten und gleichgerichteten Schwingung folgen zu können. Sie folgt nur den Schwankungen des mittleren Anodenstroms (Abb. 349b), und diese entsprechen bei verzerrungsfreier Verstärkung genau den Schallschwingungen, mittels derer

die empfangene Schwingung moduliert wurde. Der modulierende Schall wird also vom Telephon wiedergegeben.

Auf die außerordentlich zahlreichen Vorrichtungen und Schaltungsweisen, die zur Verbesserung und weiteren Verstärkung des Empfangs ersonnen sind, kann hier nicht weiter eingegangen werden.

395. **Schwingungserzeugung mittels der Elektronenröhre.** Die heute überwiegend benutzte Methode der Schwingungserzeugung beruht auf der Verwendung von Glühkathodenröhren, die im Prinzip den zum Empfang gebrauchten gleichen, aber von viel größeren Ausmaßen sind. Eine einfache Sendeschaltung zeigt Abb. 351. Das Gitter einer Glühkathodenröhre ist durch eine Induktivität L_1 und die Sekundärspule eines Transformators *Tr*, der ein Kondensator C_1 parallel liegt, mit der Kathode verbunden. Mit der Anode ist ein aus der Selbstinduktion L_2 und der Kapazität C_2 bestehender, abstimmbarer Schwingungskreis verbunden, der mit dem positiven Pol einer Batterie B_2 in Verbindung steht. Mit der Induktivität L_2 ist die Induktivität L_3 des Schwingungskreises der Antenne durch Induktion gekoppelt (in der Abbildung nur schematisch angedeutet), der außerdem noch den zur Abstimmung dienenden Kondensator C_3 enthält und an seinem einen Ende mit der Erde verbunden ist. Die Spule L_2 ist aber auch mit der Spule L_1 gekoppelt, steht ihr also dicht gegenüber (in der Abbildung durch den Pfeil angedeutet und nur der Übersichtlichkeit wegen räumlich getrennt gezeichnet). Die Primärspule des Transformators im Gitterkreis ist durch ein Mikrophon M und eine Batterie B_1 geschlossen.

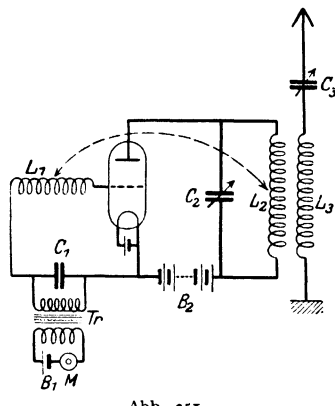


Abb. 351. Schema einer einfachen Sendeschaltung.

Die geschilderte Vorrichtung gerät stets von selbst — durch Selbsterregung — in Schwingungen. Von der Kathode fließt ein Elektronenstrom zur Anode. Ein solcher Strom ist stets kleinen Schwankungen unterworfen, durch die die Spannung an den Belegungen des im Schwingungskreise gelegenen Kondensators C_2 über oder unter ihren normalen Wert sinkt. Nach Aufhören der ersten zufälligen Schwankung sucht sich der alte Zustand am Kondensator wiederherzustellen. Das geschieht aber, wie wir wissen, bei ausreichend kleiner Dämpfung stets in Form einer Schwingung des Schwingungskreises. Diese zuerst sehr kleinen Schwingungen übertragen sich durch Induktion von L_2 über L_1 auf das Gitter, dessen Spannungsschwankungen den Elektronenstrom im Tempo der Schwingung steuern. Dadurch aber gerät nunmehr der Schwingungskreis (L_2C_2), der ja von diesem Strom durchflossen wird, in stärkere Schwingung. Je heftiger er schwingt, desto stärker wird auch die auf das Gitter übertragene Wirkung. Die Verstärkung der Schwingung findet ihre Grenze erst, wenn die dem Schwingungskreis durch Ausstrahlung usw. entzogene Energie ebenso groß ist, wie die ihm durch den Elektronenstrom zugeführte Energie, bzw. wenn die Amplitude der Spannungsschwankungen des Gitters der Anodenspannung nahekommt. Es entstehen also im Anodenkreise ungedämpfte Schwingungen, die durch Induktion von L_2 auf L_3 und so auf den Antennenkreis übertragen und dort ausgestrahlt werden.

Zur Modulierung der Schwingung dient das Mikrophon M. Durch die beim Auftreffen von Schall auf das Mikrophon erzeugten Stromschwankungen in der Primärspule des Transformators werden in der Sekundärspule, und damit am Gitter, Spannungsschwankungen induziert, die den Elektronenstrom in der

Röhre und infolgedessen die Amplitude der Schwingung im Schwingungskreise im Tempo der Schallschwingungen schwanken lassen. Die ausgesandte Welle ist also in der gewünschten Weise moduliert.

Die dargestellte Schaltung gibt nur das Grundsätzliche des Verfahrens wieder. Die Schaltungen der großen Stationen für drahtlose Telephonie (Rundfunksender) sind wesentlich komplizierter.

Die auf diese Weise erzeugten ungedämpften Wellen können natürlich der Telegraphie ebensogut dienen wie der Telephonie. Die Übertragung von Morsezeichen stellt ja nur eine besonders einfache Form der Modulierung dar. Da die ankommenden Schwingungen fast beliebig verstärkt werden können, so ist nichts im Wege, mit den von ihnen gesteuerten Strömen Apparate zu betätigen, welche die Morsezeichen unmittelbar niederschreiben.

VII. Optik und allgemeine Strahlungslehre.

29. Kapitel.

Geometrische Optik.

396. Inhalt der Strahlungslehre. Lichtquellen. Den Inhalt der Strahlungslehre im engeren Sinne, auch Optik genannt, bildet die Lehre vom Licht, also von den physikalischen Erscheinungen, die die Sinneseindrücke des Auges hervorrufen. Es gibt jedoch physikalisch gleichartige Erscheinungen, welche von unserm Auge nicht wahrgenommen werden. Die spezielle Optik spielt also in der Strahlungslehre etwa die gleiche Rolle wie die Akustik im Rahmen der Lehre von den mechanischen Schwingungen. Sie bildet ein lediglich physiologisch abgegrenztes Teilgebiet der allgemeinen Strahlungslehre. Da die allgemeinen Gesetze und Begriffe der gesamten Strahlungslehre gemeinsam sind, so werden sie im folgenden zunächst auf dem unserer Anschauung unmittelbar zugänglichen Gebiet der Lehre vom Licht oder speziellen Optik eingeführt und erläutert. Wir verstehen daher unter Licht im folgenden zunächst solche Strahlung, welche auf unser Auge unmittelbar wirkt, also Licht im Sinne des Sprachgebrauchs.

Die ursprüngliche Quelle jeglichen Lichts ist ein lichtaussendender materieller Körper. Die Ursache einer solchen Lichtaussendung kann eine sehr verschiedene sein. In der überwiegenden Mehrzahl der Fälle liegt sie in der Temperatur der Körper. Feste und flüssige Körper beginnen bei etwa 525° C sichtbar zu leuchten (DRAPERsches Gesetz). Dieses erste Leuchten ist allerdings so schwach, daß es nur in völlig dunklem Raume gesehen werden kann, und auch nur mit den farbenblinden Organen des Auges (Stäbchen, § 430); die Lichterscheinung ist daher weißgrau, und man nennt die Erscheinung Grauglut. Bei steigender Temperatur geht ein Körper erst in Rotglut, dann in Gelbglut und schließlich in Weißglut über. Es gibt aber noch andere Ursachen, die ein Leuchten eines Körpers veranlassen können, z. B. elektrische Entladungen in Gasen, Fluoreszenz, Phosphoreszenz, chemische Prozesse usw. Manche Organismen haben die Fähigkeit, Licht auszusenden (die Glühwürmchen, die Organismen, die das Meerleuchten hervorrufen usw.). Diese letzteren Lichterscheinungen rühren nicht von einer hohen Temperatur der Lichtquellen, sondern von anderen Ursachen her. Das Licht aber, welches alle diese Lichtquellen aussenden, ist seiner physikalischen Natur nach wesensgleich und gehorcht den gleichen allgemeinen Gesetzen. Deshalb ist es für die Erforschung dieser allgemeinen Gesetze an sich gleichgültig, was für einer Lichtquelle man sich bedient, wenn sie nur die gewünschte Art von Licht liefert. Die bequemsten Lichtquellen sind meist die heißen Körper (Glühlampe, Bogenlampe, Gasglühlicht, Kerze).

Körper, die selbst keine Lichtquellen sind (nichtselbstleuchtende Körper), können trotzdem zum Ausgangspunkt von Lichtstrahlung werden, wenn Licht

anderer, selbstleuchtender Körper auf sie fällt, indem sie dieses Licht wenigstens zum Teil wieder zurückwerfen. Es ist dann so, als leuchteten sie selbst. Von solchen, sozusagen im erborgten Licht strahlenden Lichtquellen sind wir rings umgeben. Jeder von unserm Auge erblickte Gegenstand, der nicht selbst eine ursprüngliche Lichtquelle ist, verhält sich so, die von der Sonne beleuchtete Natur, Wände und Gegenstände im Zimmer usw., am Himmel der Mond und die Planeten.

Für die physikalischen Wirkungen des Lichts ist es ohne Belang, ob es von einem selbstleuchtenden oder einem nichtselbstleuchtenden Körper ausgeht, vorausgesetzt, daß in beiden Fällen die Art des ausgesandten Lichtes die gleiche ist.

397. **Lichtstrahlen.** Da Licht von den Lichtquellen zu anderen Körpern und zu unserm Auge gelangt, so muß sich das Licht durch den Raum fortpflanzen. Erfahrungsgemäß ist es dabei nicht nötig, daß dieser Raum von Materie erfüllt ist. Im Gegenteil zeigt die Tatsache, daß das Licht von den Fixsternen durch die ungeheuren Entfernungen des leeren Weltraums zu uns gelangt, daß seine Fortpflanzung nicht an die Anwesenheit von Materie gebunden ist. Tatsächlich pflanzt sich das Licht durch den absolut leeren Raum weitaus am besten, d. h. am schnellsten und ohne Energieverlust, fort.

Auf dem Wege von einem Körper zum andern ist das Licht für uns unsichtbar. Sein Vorhandensein wird uns nur durch die Erhellung der Körper bemerkbar, auf die es fällt. Man kann die Bahn des Lichtes sehen, wenn der Raum, den das Licht durchläuft, etwa mit Staub oder Nebel erfüllt ist. Genauer gesagt: man sieht nicht die Bahnen der einzelnen Lichtstrahlen, sondern nur die Endpunkte dieser Bahnen. Wenn ein Lichtstrahl auf ein Hindernis (Staubteilchen usw.) fällt, hört der Strahl auf. Die Folge dieser Endpunkte ist das Bild der Bahn eines einzelnen, ungestört verlaufenden Strahls. Fällt Licht durch eine enge Öffnung in einen dunklen Raum, so sieht man den Weg, auf dem das Licht den Raum durchläuft, an den von ihm auf seiner Bahn hellbeleuchteten Staubteilchen in der Luft. Wegen einer gewissen Ähnlichkeit dieser Erscheinung mit einem aus einem engen Loch herausgespritzten Wasserstrahl bezeichnet man sie als einen Lichtstrahl. Unter einem Lichtstrahl versteht man demnach ein äußerst schmales Bündel von Licht. Bei theoretischen Überlegungen denkt man sich ein solches Bündel oft als unendlich dünn und stellt es durch einen Strich dar.

398. **Geradlinige Fortpflanzung.** Die Bahnen ungestörter Lichtstrahlen sind gerade Linien. Abweichungen von diesem Verhalten treten erst bei Wechselwirkungen mit materiellen Körpern in die Erscheinung (vgl. aber § 541).

Die deutlichste Wirkung dieser Tatsache sind die Schatten undurchsichtiger Körper. Es sei *A* (Abb. 352a) eine als punktförmig gedachte Lichtquelle, *B* ein in den Weg ihres Lichtes gebrachter Körper, *C* eine das Licht auffangende Fläche (Schirm), etwa eine weiße Wand. Infolge der geradlinigen Ausbreitung des Lichts läßt sich durch Konstruktion ohne weiteres finden, daß Licht nur an die mit *L* bezeichneten Stellen des Schirmes fällt, dagegen nicht an die mit *S* bezeichnete Stelle. Diese bildet den Schatten des Körpers.

Alle natürlichen Lichtquellen haben eine gewisse Ausdehnung, sind also nie streng punktförmig, wenn man auch z. B. mit einer elektrischen Bogenlampe mit dünnen Kohlen dieser Grenze praktisch recht nahekommt. Man kann sich aber die strahlende Fläche einer Lichtquelle immer als aus strahlenden Punkten (genauer sehr kleinen strahlenden Flächenelementen) zusammengesetzt denken und die Lichtwirkung auf einer Fläche als die Summe der Wirkungen dieser einzelnen Punkte berechnen. Es zeigt sich dann folgendes. Ein schattenwerfender Körper (Abb. 352b) schirmt das Licht nur von einem Teil *KS* der hinter ihm stehen-

den Fläche vollkommen ab, und zwar von demjenigen, welchen man mit keinem Punkte der Lichtquelle durch eine Gerade verbinden kann, ohne durch das Innere des Körpers zu gehen. Diesen Teil nennt man den Kernschatten. In ihm herrscht vollständige Dunkelheit. Die Helligkeit in weiteren, außen liegenden Teilen *L* der Fläche wird durch die Anwesenheit des Körpers überhaupt nicht berührt. Es sind dies diejenigen Teile der beleuchteten Fläche, welche man mit jedem Punkte der Lichtquelle durch eine Gerade verbinden kann, ohne durch das Innere des Körpers zu gehen. Zwischen diesen beiden Gebieten liegt eine Zone *HS*, der sog. Halbschatten, deren Punkte man nur mit einzelnen Teilen der Lichtquelle so verbinden kann, mit anderen nicht. Auf diesen Teil der Fläche fällt zwar Licht, aber nur von einem Bruchteil der Lichtquelle, und zwar um so weniger, je mehr man sich der Grenze des Kernschattens nähert. Man kann dies auch so ausdrücken, daß die Beleuchtung einer Stelle der Fläche um so schwächer ist, einen je kleineren Teil der Lichtquelle man von dieser Stelle aus noch sehen

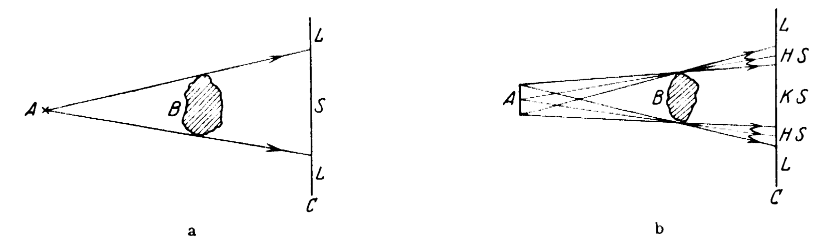


Abb. 352. a Schattenbildung bei punktförmiger Lichtquelle, b Kernschatten und Halbschatten.

kann. Der Übergang von Kernschatten zu Halbschatten und von Halbschatten zu voller Beleuchtung ist also kein plötzlicher, sondern es findet im Halbschatten ein stetiger Übergang von voller Dunkelheit zu voller Helligkeit statt. Der Schatten hat eine unscharfe Begrenzung. Die Breite des Halbschattens hängt ab von der Größe der leuchtenden Fläche und von den Verhältnissen der Abstände zwischen Lichtquelle, schattenwerfendem Körper und Schirm. Ist der Querschnitt des schattenwerfenden Körpers kleiner als die Fläche der Lichtquelle, so entsteht in größerer Entfernung von dem Körper überhaupt kein Kernschatten mehr, sondern nur ein Halbschatten.

Eine Sonnenfinsternis entsteht, wenn der Mond genau zwischen Sonne und Erde tritt, wenn also der Schatten des Mondes auf die Erde fällt. Der Kernschatten des Mondes ist im Verhältnis zur Erdoberfläche sehr klein. Daher ist eine totale Sonnenfinsternis immer nur auf kleine Bereiche der Erde beschränkt.

Bei einer Mondfinsternis steht die Erde zwischen Sonne und Mond und wirft auf diesen ihren Schatten, der zufällig der Größe der Mondfläche fast genau gleich ist. Eine Mondfinsternis tritt natürlich stets für die ganze Erde gleichzeitig ein. Auch die Monde der anderen Planeten erleiden entsprechende Verfinsterungen.

Bei gewissen Doppelsternen, d. h. Systemen von zwei sehr nahe benachbarten Fixsternen, welche umeinander rotieren, beobachtet man periodische Helligkeitsschwankungen, die davon herrühren, daß bald der eine, bald der andere der beiden Fixsterne in regelmäßigen Zeitabständen genau zwischen die Erde und den andern Stern tritt und dessen Licht abschirmt (visuelle Doppelsterne).

Eine Lochkamera (Abb. 353) ist ein lichtdichter Kasten, der in seiner Vorderwand ein feines Loch und in seiner Rückwand etwa eine Mattscheibe, wie eine photographische Kamera, trägt. Vor dem Loch befinde sich ein lichtaussendender Körper *G*. Es braucht dies kein selbstleuchtender Körper zu sein. Jeder Punkt der Mattscheibe empfängt durch das feine Loch nur

Licht von einem einzigen Punkt bzw. einem sehr kleinen Bereich der Lichtquelle. Die Beleuchtung auf der Scheibe liefert also ein getreues Abbild der Verteilung von Helligkeit und Farbe des von den einzelnen Punkten der Lichtquelle herkommenden Lichtes. Es entsteht auf ihr ein Bild B der Lichtquelle G (des Gegenstandes), und zwar ist dieses wie Abb. 353 zeigt, umgekehrt, und es ist ferner rechts und links vertauscht, wenn man es von der Rückseite her betrachtet. Ist g die Entfernung des leuchtenden Gegenstandes vom Loch, b die Entfernung der Rückwand vom Loch, G die wahre lineare Größe des Gegenstandes, B die Größe des Bildes des Gegenstandes, so verhält sich

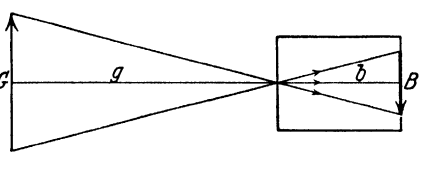


Abb. 353. Lochkamera.

$$B : G = b : g. \qquad (1)$$

Das Verhältnis B/G bezeichnet man als Vergrößerung; diese kann größer, aber auch kleiner als 1, also eine Verkleinerung sein.

Ist das Loch ausreichend fein, so hängt die Schärfe des Bildes nur wenig vom Abstande g ab. Man kann eine solche Lochkamera zum Photographieren von Gegenständen benutzen, indem man an die Stelle der Mattscheibe eine photographische Platte bringt. Man benötigt dabei eine wesentlich längere Expositionszeit als mit einer gewöhnlichen photographischen Kamera.

Solange das Loch klein ist gegenüber derjenigen Struktur des Gegenstandes, auf deren scharfe Abbildung man Wert legt, spielt die Form des Loches für die Güte der Abbildung keine Rolle.

Kurzsichtige Menschen vermögen ferne Gegenstände ohne Brille scharf zu sehen, wenn sie durch ein feines Loch in einem Stück Papier blicken. Die Augenlinse spielt dann für das auf dem Augenhintergrunde entstehende Bild keine wesentliche Rolle mehr, vielmehr tritt jetzt die soeben bei der Lochkamera beschriebene Wirkung ein.

399. **Geschwindigkeit des Lichts.** Für die gewöhnliche Beobachtung erscheint es so, als pflanze sich eine Lichtwirkung momentan von der Lichtquelle bis zum Beobachtungsorte fort. Dies ist jedoch nicht der Fall, nur ist die Lichtgeschwindigkeit so außerordentlich groß, daß zur Zurücklegung der im täglichen Leben auf der Erde in Frage kommenden Entfernungen nur außerordentlich kurze Zeiten nötig sind. Die Geschwindigkeit des Lichts im leeren Raum (Vakuum, Weltraum) beträgt fast genau $3 \cdot 10^{10}$ cm/sec $= 300000$ km/sec (vgl. auch § 327). Das Licht legt demnach eine Strecke gleich dem $7^1/_2$fachen des Erdumfangs in 1 sec zurück.

Von der Sonne zur Erde braucht das Licht 500 sec, vom Monde zur Erde etwas mehr als 1 sec, von dem Stern α-Zentauri, dem der Sonne nächsten Fixstern, 4,3 Jahre. Es gibt Sternnebel, deren Entfernung so groß ist, daß das Licht mehrere hundert Millionen Jahre gebraucht, um bis zur Erde zu gelangen.

In allen materiellen Körpern (Glas, Wasser usw.) ist die Lichtgeschwindigkeit kleiner als im leeren Raum (vgl. § 409).

Die wichtigsten optischen Methoden zur Messung der Lichtgeschwindigkeit sind folgende:

1. Die Methode von Olaf Römer (1676).

Römer benutzte zur Berechnung der Lichtgeschwindigkeit die in ganz regelmäßigen Zeitabständen bei jedem seiner Umläufe einmal eintretende Verfinsterung eines der Monde des Jupiter. Zum Verständnis dieser Methode denke man sich eine im Raume feste Lichtquelle A (Abb. 354) und einen Beobachter, der sich mit der Geschwindigkeit v von der Lichtquelle fortbewegt. Die Lichtquelle besitze eine Einrichtung, welche sie in ganz gleich-

mäßigen Zeitabständen gegen den Beobachter abschirmt (verfinstert). Die Zeit zwischen zwei solchen Verfinsterungen sei T. Befände sich der Beobachter in Ruhe ($v = 0$), so würde er die Verfinsterungen in den gleichen Zeitabständen T beobachten, nur jeweils um diejenige Zeit x/c später, die das Licht gebraucht, um die Entfernung x zwischen Lichtquelle und Beobachter zu durchlaufen. Bewegt er sich aber mit der Geschwindigkeit v von der Lichtquelle fort, so erscheint ihm die Zeit zwischen zwei Verfinsterungen größer. Es finde eine Verfinsterung zur Zeit $t = 0$ statt. Diese erreiche den Beobachter in x_1, also zur Zeit $t_1 = x_1/c$. Die nächste Verfinsterung findet zur Zeit $t = T$ statt. Sie erreicht den alsdann in einer größeren Entfernung x_2 befindlichen Beobachter zur Zeit $t_2 = T + x_2/c$. Die von ihm beobachtete Zeitdifferenz zwischen der ersten und zweiten Verfinsterung ist also $t_2 - t_1 = T' = T + (x_2 - x_1)/c$. Die von ihm selbst in der Zeit T' zurückgelegte Strecke ist aber $x_2 - x_1 = v(t_2 - t_1) = vT'$. Es ist daher

Abb. 354. Zur Methode von Olaf Römer.

$$T' = T + v/c \cdot T' \quad \text{oder} \quad c = v\,\frac{T'}{T' - T}.$$

Bewegt sich der Beobachter auf die Lichtquelle zu, so ergibt sich in gleicher Weise $T'' = T - v/c\,T''$. Bewegt er sich unter irgendeinem Winkel gegen die Richtung des von der Lichtquelle kommenden Lichtes, so ergeben sich wieder andere Werte.

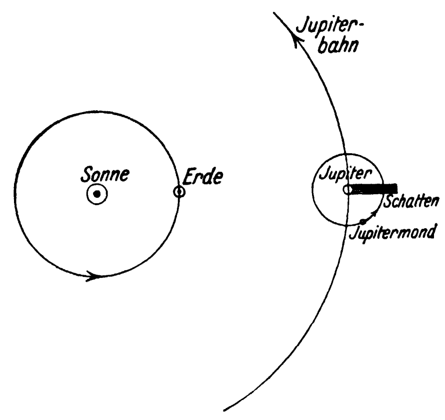


Abb. 355. Zur Methode von Olaf Römer.

Bei der Bewegung der Erde um die Sonne hat sie im Laufe der Zeit alle möglichen Bewegungsrichtungen gegen den Jupiter (Abb. 355), und so wechselt die auf der Erde beobachtete Zeit zwischen je zwei Verfinsterungen des Jupitermondes je nach der relativen Bewegung von Erde und Jupiter. Aus diesen Beobachtungen und der Erdgeschwindigkeit v kann man die Lichtgeschwindigkeit c berechnen. (Mit dem Doppler-Effekt [§ 129] hat die beschriebene Erscheinung nur eine formale Ähnlichkeit.)

2. Die Methode von Bradley (1727).

Zum Verständnis der Methode von Bradley denke man sich, man habe die Aufgabe, senkrecht herabfallende Regentropfen durch ein Rohr hindurchfallen zu lassen, welches nur oben und unten eine kleine Öffnung habe (Abb. 356). Befindet sich das Rohr in Ruhe, so ist es selbstverständlich, daß man das Rohr senkrecht halten muß, damit der gewünschte Erfolg erreicht wird. Bewegt sich aber das Rohr in horizontaler Richtung mit der Geschwindigkeit v, so darf das Rohr nicht mehr senkrecht gehalten werden. Ist die Länge des Rohrs l, die Fallgeschwindigkeit der Tropfen c, so brauchen diese zum Durchlaufen des senkrecht gestellten Rohrs die Zeit $t = l/c$. Während dieser Zeit aber hat sich das Rohr um eine Strecke $x = vt$ verschoben. Die Tropfen fallen also nicht mehr durch das untere Loch. Um dies wieder zu erreichen, muß man das Rohr gegen die Fallrichtung der Tropfen um einen Winkel α neigen, für den sich aus Abb. 356 leicht die Beziehung $\operatorname{tg}\alpha = v/c$ ergibt. Aus dem beobachteten Winkel α und der Geschwindigkeit v könnte man dann die Fallgeschwindigkeit der Tropfen berechnen.

Bei der Methode von BRADLEY tritt nun an die Stelle der Tropfen das Licht, welches von irgendeinem Fixstern herrührt, an die Stelle des Rohrs mit den Löchern ein Fernrohr. (Man könnte dazu grundsätzlich auch genau die gleiche Einrichtung benutzen wie für den gedachten Versuch mit den Tropfen.) v ist jetzt die Bahngeschwindigkeit der Erde. An den angestellten Überlegungen ändert sich nichts. Sie besagen jetzt, daß man, um das Licht eines Fixsterns durch die Achse eines Fernrohrs hindurchtreten zu lassen, ihn also in der Mitte des Gesichtsfeldes zu sehen, das Fernrohr um einen gewissen Winkel in Richtung der Erdbewegung vorwärtsneigen muß. D. h. das Licht scheint aus einer etwas andern Richtung zu kommen, als es dies tatsächlich tut, der Ort des Fixsterns scheint ein wenig verschoben. Sterne, die nahe am Himmelspol stehen, beschreiben daher im Laufe eines Jahres scheinbar einen kleinen Kreis, dessen halber Winkeldurchmesser $\alpha = 20{,}6''$ beträgt, in der Ebene der Ekliptik liegende Fixsterne führen eine kleine scheinbare, geradlinige Hin- und Herbewegung am Himmel aus, dazwischen liegende Sterne beschreiben scheinbar kleine Ellipsen, deren große Achsen unter dem gleichen Winkel α erscheinen. Man bezeichnet diese Erscheinung als Aberration. Aus α und der Erdgeschwindigkeit $v = 30$ km/sec berechnet sich die Lichtgeschwindigkeit zu 300000 km/sec.

Viel genauer als diese astronomischen Methoden sind die sog. terrestrischen, d. h. auf der Erde ausführbaren Messungen. Von diesen führen wir als wichtigste die Methode von FOUCAULT an.

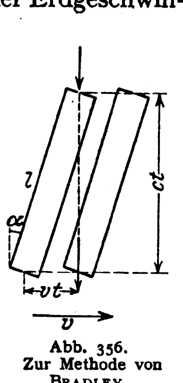


Abb. 356. Zur Methode von BRADLEY.

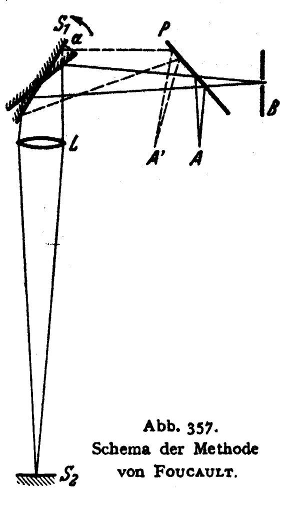


Abb. 357. Schema der Methode von FOUCAULT.

3. Die Methode von FOUCAULT. Das Prinzip dieser Methode ist das folgende (Abb. 357): Durch eine Blende B tritt ein Lichtbündel und fällt nach dem Durchgang durch eine planparallele Glasplatte P auf einen ebenen Spiegel S_1, der in sehr schnelle Rotation um eine zur Zeichnungsebene senkrechte Achse versetzt werden kann. Dort wird das Licht reflektiert und durch eine Linse L so auf einen Hohlspiegel S_2 konzentriert, daß die Blende B auf dem Hohlspiegel abgebildet wird. Dann läuft das Licht nach der Reflexion am Hohlspiegel auf genau dem gleichen Wege wieder zurück bis zum Spiegel S_1 und wird von diesem wieder reflektiert. Beim Auftreffen auf die planparallele Glasplatte P wird ein Teil des Lichtes reflektiert, und es entsteht, wenn der Spiegel S_1 nicht rotiert, ein Bild der Blende B im Punkte A. Wenn aber S_1 rotiert, so findet das zurückkehrende Licht den Spiegel nicht mehr genau in seiner alten Lage vor, der Rückweg des Lichtes erfolgt von hier ab nicht mehr in der alten Bahn, sondern unter einem kleinen Winkel gegen diese. Daher ist jetzt auch das Bild der Blende gegenüber demjenigen bei ruhendem Spiegel ein wenig verschoben, und zwar nach A' um die Strecke $\delta = AA'$. (Zur besseren Verdeutlichung sind die Maßverhältnisse in Abb. 357 stark übertrieben dargestellt.) Zur genauen Messung dieser Verschiebung befindet sich in der Blende B ein Raster aus sehr feinen, äquidistanten, auf Glas geritzten Strichen, deren Ortsänderung im Bilde sehr genau gemessen werden kann.

Es sei α der Winkel, um den sich S_1 während des Durchlaufens des Weges $S_1 S_2 S_1 = 2l$ durch das Licht gedreht hat. Dann ist das von S_1 aus in Richtung auf P reflektierte Strahlenbündel um den Winkel 2α aus der beim Hinweg zurück-

gelegten Bahn abgelenkt (§ 405). Ist r die Länge des geknickten Lichtweges S_1PA', so beträgt die Verschiebung $AA' = \delta = 2\alpha r$. Die Winkelgeschwindigkeit von S_1 sei $\omega = 2\pi\nu$. Die Zeit t, die das Licht für den Weg $S_1S_2S_1 = 2l$ gebraucht, ist $t = 2l/c$. In dieser Zeit hat sich S_1 also um den Winkel $\alpha = \omega t = 2\pi\nu t = 4\pi\nu l/c$ gedreht. Es ist demnach $\delta = 8\pi\nu r l/c$ oder $c = 8\pi\nu r l/\delta$.

FOUCAULT war bereits imstande, Messungen der Lichtgeschwindigkeit bei Entfernungen l von nur 20 m auszuführen. Für genaue Messungen ist aber natürlich eine große Entfernung l erwünscht, da dann die Verschiebung δ sehr viel größer und genauer meßbar wird. In neuster Zeit hat MICHELSON Messungen der Lichtgeschwindigkeit auf eine Entfernung von über 35 km ausgeführt. Diese Entfernung war auf etwa 5 cm genau vermessen worden. Acht verschiedene Messungen ergaben Werte der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum, die sämtlich zwischen 299 795 und 299 797 km/sec lagen. Als Mittelwert ergab sich

$$c = 299796 \pm 4 \text{ km/sec}.$$

Die Genauigkeit dieser Messung beträgt also rund 0,001 %. Über die elektrische Messung der Lichtgeschwindigkeit s. § 315.

Die Messungen MICHELSONs sind natürlich in Luft ausgeführt, und die vorstehenden Angaben für das Vakuum sind durch Korrektion dieser Messungen gewonnen (§ 409).

Da die FOUCAULTsche Methode auch schon bei kleinen Entfernungen relativ gute Werte liefert, so kann sie dazu benutzt werden, um die Lichtgeschwindigkeit in materiellen Stoffen, z. B. in Flüssigkeiten, zu messen. In diesem Fall verläuft der Weg $S_1S_2S_1$ zum Teil in der betreffenden Substanz. Von besonderer Wichtigkeit sind die nach dieser Methode angestellten Messungen in bewegten Stoffen, z. B. strömenden Flüssigkeiten (§ 536).

400. Lichtstrom, Lichtstärke, Beleuchtungsstärke, Flächenhelle. Jede Lichtquelle sendet ständig Lichtenergie (Strahlungsenergie) in den Raum aus. Da Licht Energie ist, so kann man (analog zum Begriff Wärmemenge) auch von der Lichtmenge sprechen, die eine Lichtquelle aussendet, und man versteht darunter denjenigen Betrag an Energie, der von der Lichtquelle in einer bestimmten Zeit in Form von sichtbarem Licht ausgesandt wird. Die gesamte in alle Richtungen in 1 sec von einer Lichtquelle ausgesandte Lichtmenge nennt man den Lichtstrom Φ der Lichtquelle. Die Dichte dieses Lichtstroms ist im allgemeinen nicht in allen Richtungen die gleiche, d. h. eine Lichtquelle strahlt im allgemeinen nicht nach allen Richtungen gleich viel Licht aus.

Unter der Lichtstärke einer Lichtquelle in einer bestimmten Richtung versteht man die Größe

$$J = \frac{d\Phi}{d\omega}, \tag{2}$$

wobei $d\omega$ ein elementarer räumlicher Winkel ist. Es ist also der Lichtstrom innerhalb des räumlichen Winkels $d\omega$ gleich $d\Phi = J\,d\omega$. Strahlt die Lichtquelle nach allen Seiten gleich stark, so ist der gesamte Lichtstrom $\Phi = 4\pi J$. Die Einheit der Lichtstärke ist in Deutschland die Hefner-Kerze (HK). Es ist dies die Lichtstärke, die eine mit Amylazetat gespeiste Lampe von genau vorgeschriebener Konstruktion und Brennweise in horizontaler Richtung besitzt.

Die Einheit des Lichtstroms heißt 1 Lumen. Sie ist gleich dem Lichtstrom, den eine punktförmige Lichtquelle von 1 HK innerhalb eines räumlichen Winkels $\omega = 1$ ausstrahlt, und entspricht einem Energiestrom von 0,00145 Watt.

Unter der Beleuchtungsstärke einer Fläche versteht man den auf 1 cm² oder auf 1 m² der Fläche fallenden Lichtstrom. Ihre Einheit ist demnach 1 Lumen/cm² = 1 Phot bzw. 1 Lumen/m² = 1 Lux.

Die **Leuchtdichte** oder **Flächenhelle** einer Fläche (selbstleuchtend oder nicht selbstleuchtend) ist die Lichtstärke von 1 cm² dieser Fläche in der zur Fläche senkrechten Richtung. Ihre Einheit ist demnach 1 HK/cm² = 1 Stilb.

In vielen Fällen gilt in weitgehender Annäherung das LAMBERTsche Kosinusgesetz, welches besagt, daß die von einer Fläche unter dem Winkel φ gegen das Lot auf der Fläche ausgestrahlte Lichtmenge $\cos\varphi$ proportional ist. Bei strenger Gültigkeit dieses Gesetzes erscheint eine selbstleuchtende Fläche, unabhängig von ihrer Orientierung zur Blickrichtung, stets von gleicher Flächenhelligkeit. Ein diesem Gesetz streng gehorchender selbstleuchtender Körper erscheint daher als eine mit überall gleicher Helligkeit leuchtende Scheibe. Mit einiger Annäherung, aber nicht streng, gilt dies z. B. für die Sonne.

401. Das Entfernungsgesetz. Es sei L (Abb. 358) eine Lichtquelle, die im Mittelpunkt einer Kugelfläche vom Radius r_1 stehe. Die Lichtstärke J der Lichtquelle sei in allen Richtungen die gleiche. Dann verteilt sich der von der Lichtquelle ausgehende Lichtstrom $\Phi = 4\pi J$ gleichmäßig über die Kugelfläche $4\pi r_1^2$, und es entsteht auf ihr die Beleuchtungsstärke $E_1 = 4\pi J/4\pi r_1^2 = J/r_1^2$. Vergrößern wir jetzt den Radius der Kugelfläche auf r_2, so ändert sich die Beleuchtungsstärke auf $E_2 = J/r_2^2$. Es ist demnach

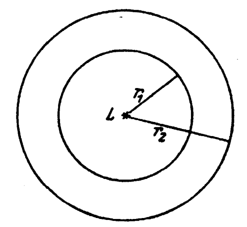


Abb. 358. Zur Abhängigkeit der Beleuchtungsstärke von der Entfernung der Lichtquelle.

$$E_1 : E_2 = \frac{1}{r_1^2} : \frac{1}{r_2^2} = r_2^2 : r_1^2. \qquad (3)$$

Das gleiche Gesetz (**photometrisches Entfernungsgesetz**) gilt, wenn J nicht in allen Richtungen konstant ist, für jede Richtung der Lichtaussendung, d. h. für jeden räumlichen Ausbreitungswinkel des Lichts.

Die Beleuchtungsstärke auf einer Fläche nimmt nach Gl. 3 mit dem Quadrat der Entfernung von der Lichtquelle ab. Wir finden also das gleiche Gesetz, wie es in § 148 für die Abnahme der Intensität von Schwingungen in einer Kugelwelle abgeleitet wurde, und tatsächlich liegt auch der gleiche Fall vor, nur daß es sich hier nicht um eine mechanische Schwingung handelt. Es handelt sich ja in beiden Fällen um nichts anderes, als um eine Folge aus dem Energieprinzip. Licht ist Energie. Tritt keine Umwandlung dieser Energie in eine andere Energieform ein, so muß durch die Kugelfläche vom Radius r_1 (Abb. 358) ebensoviel Licht treten wie durch die Kugelfläche vom Radius r_2, da die Menge der Energie sich in dem Zwischenraume zwischen beiden nicht ändern soll. Die Gl. 3 gilt daher nicht mehr, wenn das Licht auf seinem Wege eine Schwächung durch Absorption erfährt.

Bildet die Richtung des auf eine Fläche fallenden Lichts den Winkel φ (Einfallswinkel genannt) mit dem Lot (Einfallslot) auf der Fläche, so läßt sich leicht nachweisen, daß alsdann die Beleuchtungsstärke im Verhältnis $\cos\varphi$ kleiner ist als bei senkrechtem Einfall des Lichts (LAMBERTsches Gesetz). Denn der auffallende Lichtstrom ist $\cos\varphi$ proportional.

Bringen zwei Lichtquellen von den Lichtstärken J_1 und J_2 in den Abständen r_1 und r_2 jede für sich allein auf der gleichen Fläche die gleiche Beleuchtungsstärke hervor, ist also $J_1/4\pi r_1^2 = J_2/4\pi r_2^2$, so verhalten sich die Lichtstärken wie

$$J_1 : J_2 = r_1^2 : r_2^2. \qquad (4)$$

Da der von einer leuchtenden Fläche her in die Pupille des Auges gelangende Lichtstrom dem Quadrat des Abstandes umgekehrt proportional ist, das gleiche aber auch für die scheinbare Größe der leuchtenden Fläche gilt, so erscheint uns ein leuchtender Körper, unabhängig von seiner Entfernung, stets in gleicher

Flächenhelligkeit. Aber natürlich nur dann, wenn auf dem Wege des Lichtes keine Absorption stattfindet.

Für die Wahrnehmung von Helligkeitsunterschieden gilt das psychophysische Grundgesetz (W. WEBER 1825, FECHNER 1856), welches besagt, daß der absolute Helligkeitsunterschied, der eben noch als ein solcher bemerkt wird, der Helligkeit proportional ist. Daraus folgt, daß ein Helligkeitsunterschied, der an zwei sehr schwachen Lichterscheinungen gerade noch bemerkt wird, bei gleicher absoluter Größe an zwei stärkeren Lichterscheinungen nicht mehr bemerkt wird.

402. Photometrie. Unter Photometrie versteht man die Messung von Lichtstärken. Man mißt Lichtstärken, indem man die zu messende Lichtquelle mit einer andern vergleicht, deren Lichtstärke durch Vergleich mit einer Hefnerkerze bekannt ist, gegebenenfalls mit einer Hefnerkerze selbst. Die meisten photometrischen Methoden beruhen auf der Anwendung der vorstehenden Gl. 4. Es wird dabei von der Tatsache Gebrauch gemacht, daß das Auge Helligkeitsunterschiede, besonders bei geringer Helligkeit, ziemlich genau erkennt.

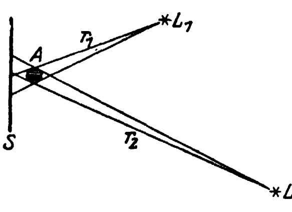


Abb. 359. Schattenphotometer.

Schattenphotometer. Die zu messende und die Vergleichsquelle stehen vor einem weißen Schirm *S*. Dicht vor dem Schirm steht ein Stab *A* (Abb. 359). Beide Lichtquellen werfen einen Schatten dieses Stabes auf den Schirm. Sie werden so aufgestellt, daß die beiden Schatten dicht nebeneinanderliegen. Die Schatten sind nicht vollkommen dunkel, sondern bilden auf der sonst von beiden Lichtquellen beleuchteten Wand Stellen, welche jeweils nur von einer der beiden Lichtquellen beleuchtet werden. Die Beleuchtungsstärke in jedem der beiden Schatten rührt also nur von je einer der beiden Lichtquellen her. Die Lichtquellen werden nun so lange verschoben, bis die beiden Schatten gleich hell erscheinen, also in ihnen die gleiche Beleuchtungsstärke herrscht. Dann verhalten sich nach Gl. 4 die Lichtstärken der beiden Lichtquellen wie die Quadrate ihrer Abstände von der Fläche.

Fettfleckphotometer von BUNSEN. In der Mitte eines in einen Rahmen gespannten Blattes Schreibpapier befindet sich ein Fettfleck *F* (z. B. ein wenig Stearin durch Erwärmen einziehen lassen). Es falle zunächst nur von einer Seite her Licht auf das Photometer. Dieses wird vom Papier zurückgeworfen, vom Fettfleck aber zum großen Teil hindurchgelassen und tritt dort auf der Rückseite aus (Abb. 360). Infolgedessen erscheint, von der beleuchteten Seite aus gesehen, der Fettfleck dunkel auf hellem Grunde, von der andern Seite her gesehen, hell auf dunklem Grunde. Bringt man jetzt auf der andern Seite ebenfalls eine Lichtquelle an, so kann man durch Wahl geeigneter Abstandsverhältnisse die Beleuchtungsstärke auf den beiden Flächen so einrichten, daß z. B. von der rechten Seite her betrachtet das von links her durch den Fettfleck hindurchtretende Licht auf der rechten Seite gerade den Ausfall an Licht ersetzt, der dadurch entsteht, daß Licht der rechten Lichtquelle durch den Fettfleck nach links hindurchtritt. In diesem Falle erscheint der Fettfleck ebenso hell wie seine Umgebung; er verschwindet. Das gleiche ist dann auch der Fall, wenn man von der andern Seite beobachtet. In diesem Falle gilt wieder Gl. 4. Um genaue Ergebnisse zu erzielen, muß man die beiden zu vergleichenden Lichtquellen nacheinander mit einer Hilfs-

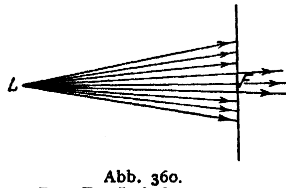


Abb. 360. Zum Fettfleckphotometer.

lichtquelle vergleichen und den Fettfleck jedesmal aus der gleichen Richtung beobachten. Denn das Verschwinden des Flecks tritt nicht für alle Beobachtungsrichtungen gleichzeitig ein.

Für genauere Messungen bedient man sich meist des LUMMER-BRODHUNschen Photometers. Sein wesentlicher Teil ist der sog. Photometerwürfel (Abb. 361). Er besteht aus zwei rechtwinkligen Glasprismen, von denen das eine, bis auf ein mittleres ebenes Stück, an seiner Hypotenusenfläche rund geschliffen ist. Die beiden Prismen berühren sich in der aus der Abbildung ersichtlichen Weise. Das Licht der beiden zu vergleichenden Lichtquellen fällt in eine der Kathetenflächen je eines der beiden Prismen senkrecht ein. Wie in § 411 näher ausgeführt werden wird, findet in diesem Falle dort, wo das Licht an die Grenze des Glases gegen Luft tritt, vollständige Zurückwerfung (Totalreflexion) des Lichts statt, während es durch die Berührungsebene der beiden Prismen hindurchtritt. Aus der Prismenfläche BC tritt daher in der Mitte des Gesichtsfeldes nur Licht aus, welches von der Lichtquelle L_2 herrührt, während aus den Randbezirken nur Licht der Lichtquelle L_1 austritt. Die Prismenfläche AB spielt also etwa die gleiche Rolle wie die Papierfläche des Fettfleckphotometers. Das von ihr herkommende Licht rührt teils von der einen, teils von der andern Lichtquelle her. Die Berührungsebene entspricht dabei dem Fettfleck. Man nennt sie daher auch wohl einen „künstlichen“ oder „idealen Fettfleck“. Die Berührungsebene wird unsichtbar, wenn die Beleuchtungsstärke der Fläche AB durch beide Lichtquellen gleich ist. Bei der praktischen Ausführung beleuchtet man mit den beiden Lichtquellen nicht den Würfel direkt, sondern zwei weiße Flächen, welche sich in gleichem Abstande vom Würfel befinden, und stellt auf gleiche Helligkeit dieser Flächen ein. Es gilt dann Gl. 4, wobei die Abstände von den Lichtquellen bis zu den beiden Flächen zu rechnen sind. Die Benutzung einer Hilfslichtquelle ist hier nicht nötig.

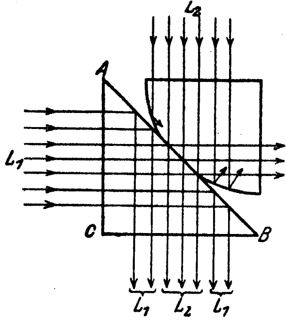


Abb. 361. Photometerwürfel nach LUMMER-BRODHUN.

Außer den genannten einfachen Photometern gibt es eine große Zahl von modernen Konstruktionen, die auf anderen Prinzipien beruhen. In allen Fällen jedoch geschieht die Messung so, daß die von der zu messenden Lichtquelle hervorgerufene Helligkeit auf einer Fläche derjenigen gleichgemacht wird, die eine bekannte Vergleichslichtquelle dort hervorruft. So wird z. B. das Licht der stärkeren der beiden Lichtquellen durch einen verschiebbaren grauen Glaskeil in meßbarer Weise geschwächt, oder durch zwei NICOLsche Prismen (§ 457), die gegeneinander verdreht werden.

Bei allen diesen Photometern liefert das menschliche Auge die Entscheidung über die zu beurteilenden Helligkeitsverhältnisse, und daher sind diese Methoden mit unvermeidlichen Fehlern behaftet, die von der begrenzten Empfindlichkeit des Auges und von den subjektiven Unterschieden im Sehvermögen verschiedener Beobachter herrühren. Von solchen Fehlern sind diejenigen photometrischen Methoden frei, welche die Lichtintensität auf elektrischem Wege messen, insbesondere mit Hilfe der lichtelektrischen Zelle oder der Selenzelle (§ 489). Für die Messung sehr geringer Helligkeiten kommen überhaupt nur diese Methoden in Betracht, z. B. für die Messung der Helligkeit von Sternen. Auch die Schwärzung einer photographischen Platte kann unter Beobachtung gewisser Vorsichtsmaßregeln — die Schwärzung ist der Menge der absorbierten Strahlung nicht proportional — zu photometrischen Messungen benutzt werden.

Genaue Photometrierungen auf rein optischem Wege sind nur dann möglich, wenn die zu vergleichenden Lichtquellen nahezu gleiche Farbe haben.

Eine moderne, weißglühende Glühlampe kann mit der gelblich leuchtenden Hefnerkerze nicht unmittelbar verglichen werden.

403. **Geometrische Optik.** In dem Kapitel 29 machen wir von der Tatsache, daß das Licht ein Schwingungsvorgang ist, noch keinen Gebrauch. Die in diesem Kapitel enthaltene sog. geometrische Optik (im Gegensatz zu der später besprochenen Wellenoptik) kommt mit der Vorstellung aus, daß sich das von einem Punkt einer Lichtquelle herkommende Licht aus Lichtstrahlen zusammensetzt, die von diesem Punkt divergieren. Die Gesamtheit der innerhalb eines gewissen Öffnungswinkels von einem Punkt ausgehenden Lichtstrahlen nennt man ein Strahlenbüschel.

Ein wichtiger Satz der geometrischen Optik ist der Satz von der Umkehrbarkeit des Strahlenganges. Er besagt: Ist der Weg, den ein Lichtstrahl unter bestimmten Bedingungen zurücklegt, bekannt, so verläuft ein anderer gleichartiger Lichtstrahl, der auf einem Teil dieses Weges in genau umgekehrter Richtung verläuft, auch weiterhin genau auf dem gleichen Wege in umgekehrter Richtung wie der erste Strahl. Jeder Strahlengang ist also umkehrbar. Dies gilt aber ohne weiteres nur dann, wenn es sich um Reflexionen oder Brechungen handelt, nicht für den Fall der Beugung (§ 445ff).

In vielen Fällen der geometrischen Optik leistet auch das FERMATsche Prinzip (§ 134) nützliche Dienste. Bei Anwendung auf optische Probleme nennt man das Prinzip auch den Satz vom kürzesten (oder längsten) Lichtweg oder den Satz von der schnellsten (oder langsamsten) Ankunft des Lichts.

404. **Allgemeines über optische Bilder.** Wir sagen, daß wir einen Gegenstand, im einfachsten Fall einen leuchtenden Punkt L, direkt sehen, wenn die von ihm herkommenden Strahlen ohne Änderung ihrer Richtung in unser Auge gelangen. In diesem Falle befindet sich der Punkt an der Spitze eines Kegels von divergenten Strahlen, dessen Basis die Pupille unseres Auges bildet, und er ist der unmittelbare Ausgangspunkt dieser Strahlen (Abb. 362a). Der Sinneseindruck eines im Raume befindlichen Gegenstandes beruht also auf dem Einfall divergenter Lichtstrahlen, die geradlinig von den einzelnen Punkten des Gegenstandes herkommen, in unser Auge.

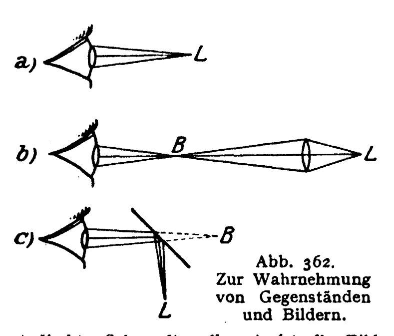


Abb. 362. Zur Wahrnehmung von Gegenständen und Bildern. a) direktes Sehen, b) reelles, c) virtuelles Bild.

Wir werden aber Fälle kennenlernen, wo auch ein in genau der gleichen Weise divergierendes Strahlenbüschel von jedem Punkte eines Gegenstandes her in das Auge fällt, aber diese Strahlen nicht geradlinig von dem Gegenstande her kommen. Für den Sinneseindruck des Auges ist aber lediglich der Verlauf der Strahlen unmittelbar vor dem Auge maßgebend, und wir sehen den Gegenstand alsdann dort, von wo die Strahlen divergieren oder zu divergieren scheinen. Eine solche Erscheinung heißt ein Bild des Gegenstandes. Hier sind zwei Fälle möglich. Entweder ist der Verlauf der von den einzelnen Punkten eines Gegenstandes herkommenden Strahlen durch irgendwelche optische Vorrichtungen derart verändert, daß sie zur Konvergenz in einen Punkt gebracht werden, durch den sie dann geradlinig weiter verlaufen, von wo sie also wie von den Punkten eines wirklichen Gegenstandes divergieren. Man nennt dann den betreffenden Punkt B im Raum ein reelles Bild des zugehörigen Punktes des Gegenstandes (Abb. 362b, Brechung durch eine Linse, § 414ff.). Ein reelles Bild kann man auf einem Schirm auffangen. Bringt man an den Ort B des Konvergenzpunktes der Strahlen z. B. eine weiße Fläche, so entspricht ihre Beleuchtung punktweise dem von den ein-

zelnen Punkten des Gegenstandes ausgehenden Lichte. Der Gegenstand wird auf der Fläche abgebildet. Es kann aber auch sein, daß der Divergenzpunkt *B* der Strahlen nur ein scheinbarer ist, d. h. daß nicht die in das Auge fallenden Lichtstrahlen sich in ihm wirklich schneiden, sondern nur ihre rückwärtigen Verlängerungen. In diesem Falle haben wir ein virtuelles Bild (Abb. 362c, Reflexion an einem ebenen Spiegel, § 406). Ein solches Bild kann man nicht auf einem Schirm auffangen, weil der geometrische Schnittpunkt *B* der in das Auge fallenden Lichtstrahlen tatsächlich gar kein Punkt ist, in dem die Strahlen konzentriert sind.

Reelle oder virtuelle Bilder von Gegenständen entstehen, wenn die einzelnen Punkte des Gegenstandes in räumlich richtiger Reihenfolge im Bilde nebeneinanderliegen. Sie können größer oder kleiner als der Gegenstand sein. Ferner können sie die gleiche Lage im Raum haben oder um irgendeinen Winkel gegen die Lage des Gegenstandes verdreht erscheinen. Von besonderem Interesse ist nur der Fall, daß das Bild entweder ebenso oder genau umgekehrt steht wie der Gegenstand. Man hat also noch zu unterscheiden, ob ein Bild vergrößert oder verkleinert, und ob es aufrecht oder umgekehrt ist. Es kann auch vorkommen, daß ein Bild dem Gegenstande nicht geometrisch ähnlich, daß es verzerrt ist.

Bei reellen Bildern, die man auf einem Schirm auffängt, ist der Begriff der Vergrößerung bzw. Verkleinerung ohne weiteres klar gegeben als das Verhältnis der linearen Dimensionen von Bild und Gegenstand. Bei den mit dem Auge betrachteten virtuellen Bildern der optischen Instrumente ist die Vergrößerung nach anderen Gesichtspunkten zu beurteilen (§ 422).

405. Diffuse und reguläre Reflexion. Reflexionsgesetz. Licht, welches auf eine Fläche fällt, wird von dieser mehr oder weniger stark zurückgeworfen. Dies ist die Ursache dafür, daß wir nichtselbstleuchtende Körper sehen können. Flächen, die überhaupt kein Licht zurückwerfen, gibt es nicht. Diese Erscheinung heißt Reflexion des Lichts (vgl. § 132). Das Licht erfährt also bei diesem Vorgang eine Richtungsänderung. In der überwiegenden Mehrzahl der Fälle ist diese Richtungsänderung nicht für alle Teile eines Lichtstrahls die gleiche; er wird bei der Reflexion nach allen möglichen Richtungen auseinandergesplittert. Die vom Lichtstrahl getroffene Fläche wird zum Ausgangspunkt einer nach allen Richtungen gehenden Strahlung (Abb. 363). Das Licht wird also bei diesem Vorgang, den man als diffuse Reflexion bezeichnet, nach allen Richtungen zerstreut, ein Strahl löst sich in sehr viele Teilstrahlen auf.

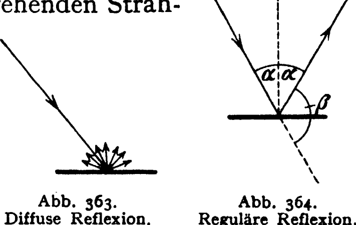


Abb. 363. Diffuse Reflexion. Abb. 364. Reguläre Reflexion.

An sehr glatten Flächen aber, insbesondere an blanken Metallflächen, an Glas- und Kristallflächen, Flüssigkeitsflächen usw., wird ein auf sie fallender Strahl nicht zerstreut, sondern er ändert ausschließlich seine Richtung. Man nennt dies reguläre oder regelmäßige Reflexion oder Spiegelung. Für die reguläre Reflexion gilt das bereits im § 132 besprochene Reflexionsgesetz: Einfallender und reflektierter Strahl bilden mit dem im Auftreffpunkte errichteten Lot (Einfallslot) auf der reflektierenden Fläche gleiche Winkel α, und der reflektierte Strahl liegt mit dem einfallenden Strahl und dem Einfallslot in der gleichen Ebene (Abb. 364).

Eine regulär reflektierende Fläche nennt man auch einen Spiegel. Die besten Spiegel für sichtbares Licht sind ganz reine Silberflächen, z. B. die Silberbelegungen der gewöhnlichen Spiegel. Auch die Grenzflächen durchsichtiger Körper, z. B. Glas, Wasser, reflektieren stets einen Teil des auf sie treffenden Lichts, und zwar sowohl beim Eintritt als auch beim Austritt aus dem Körper (z. B.

Spiegelung der Sonne in Fenstern und auf Wasserflächen, doppelte Bilder bei dicken Glasspiegeln, bei denen das schwächere Bild von der vorderen Glasfläche herrührt).

Fällt ein Lichtstrahl unter dem Einfallswinkel α (Winkel zwischen einfallendem Strahl und Einfallslot) auf eine regulär reflektierende Fläche, so wird er um den Winkel $\beta = 180^0 - 2\alpha$ aus seiner Richtung abgelenkt (Abb. 364). Wird der Spiegel um den Winkel γ gedreht, so ändert sich die Richtung des reflektierten Strahls um den Winkel $\delta = 2\gamma$ (Abb. 365). Denn es ist $\gamma = (\alpha_2 - \alpha_1)$, $\delta = 2\alpha_2 - 2\alpha_1$.

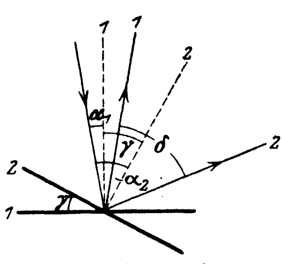


Abb. 365. Richtungsänderung des reflektierten Strahls bei Drehung des Spiegels.

Man bedient sich der Richtungsänderung eines reflektierten Strahls bei physikalischen, insbesondere elektrischen Meßinstrumenten häufig, um sehr kleine Drehungen genauer meßbar zu machen. Mit dem drehbaren Teil eines solchen Instruments ist ein Spiegelchen fest verbunden. Auf diesen fällt aus einer festen Richtung ein Lichtstrahl und wird auf eine in der Entfernung a aufgestellte Skala geworfen. Dreht sich der Spiegel um den Winkel γ, so ändert sich die Strahlenrichtung um den Winkel 2γ. Der Lichtfleck auf der Skala verschiebt sich dann um eine Strecke, welche bei nahezu senkrechtem Einfall und kleinem Winkel γ gleich $2\gamma a$, also dem Winkel γ proportional, ist. Bei der praktischen Ausführung bildet man eine leuchtende Linie, etwa ein Stück eines Glühlampenfadens, auf dem Wege über den Spiegel auf der Skala ab. Oder man bedient sich einer hell beleuchteten Skala, die man auf dem Wege über den Spiegel mittels eines Fernrohrs betrachtet. Je nach der Stellung des Drehspiegels fallen andere Punkte der Skala mit dem als Ablesemarke im Fernrohr befindlichen Fadenkreuz zusammen. Durch großen Abstand der Skala kann man große Verschiebungen bei kleinen Drehungen erzielen. Bei einem Skalenabstand von 2 m bewirkt eine Drehung des Spiegels um 1′ bereits eine Verschiebung des „Lichtzeigers" auf der Skala um mehr als 1 mm. Die Vorrichtung wirkt wie die Anbringung eines sehr langen Zeigers, jedoch sind die Ausschläge doppelt so groß wie die eines gleich langen wirklichen Zeigers, und der Lichtzeiger hat den Vorzug, masselos zu sein.

406. Bilder an ebenen Spiegeln. In Abb. 366a sei L ein leuchtender Punkt im Abstande a von einem ebenen Spiegel EF. Das von ihm auf den Spiegel fallende Licht wird, je nach dem Einfallswinkel, in verschiedenen Richtungen reflektiert, und zwar so, daß alle einzelnen Strahlen nach der Reflexion wieder von einem Punkte L' herzukommen scheinen, der hinter dem Spiegel liegt, und zwar auf dem von L auf den Spiegel gefällten Lot und im Abstande a vom Spiegel.

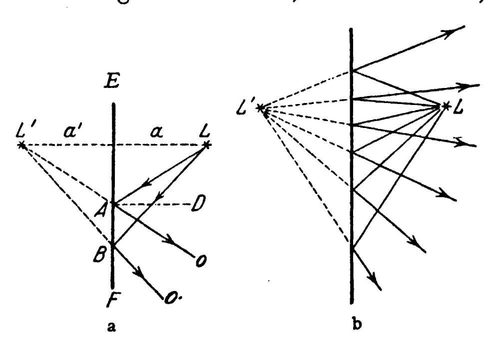


Abb. 366. Abbildung am ebenen Spiegel.

Es ist nämlich 1. $\sphericalangle LAE = \sphericalangle L'AE$, also auch $\sphericalangle LAB = \sphericalangle L'AB$, 2. $\sphericalangle LBA = \sphericalangle L'BA$, 3. $AB = AB$. Daher ist $\Delta ABL = \Delta ABL'$, $a = a'$ und $LL' \perp EF$.

Den gleichen Beweis kann man ebenso für jeden andern Strahl führen. Die Strahlen haben also nach der Reflexion sämtlich die Richtung von L' her, denn dort schneiden sich ihre rückwärtigen Verlängerungen (Abb. 366b). L' ist also ein virtuelles Bild (§ 404) des Punktes L.

Indem man das über die Abbildung eines einzelnen Punktes Gesagte auf die einzelnen Punkte eines Gegenstandes G überträgt, kommt man für die Abbildung B eines solchen an einem ebenen Spiegel ohne weiteres zu der in Abb. 367 dargestellten Konstruktion. Ebene Spiegel liefern demnach virtuelle, dem Gegenstand an Größe gleiche „spiegelsymmetrische" Bilder.

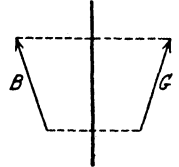


Abb. 367. Bild eines Gegenstandes am ebenen Spiegel.

Bei der Abbildung eines Gegenstandes, z. B. einer Person, in einem ebenen Spiegel erscheint, wie ohne weiteres verständlich ist, dessen rechte und linke Seite vertauscht, denn was rechts ist, bleibt zwar auch im Bilde rechts, was links ist, links, aber die dem Spiegel zugekehrte Fläche des Gegenstandes erscheint im Bilde gegenüber der Wirklichkeit um 180° gedreht. (Die meisten Menschen sehen im Spiegel, wegen der oft sehr starken Asymmetrie der Gesichtszüge, merklich anders aus als bei direktem Anblick.)

Stellt man zwei ebene Spiegel unter irgendeinem Winkel aneinander, so kommt bei geeigneter Stellung des Beobachters das von einem Punkte herkommende Licht erst dann in das Auge desselben, wenn es nacheinander ein oder mehrere Male an beiden Spiegeln reflektiert worden ist. Es entstehen dann mehrere, im allgemeinen Falle unendlich viele Bilder. Man kann die durch zweimalige Reflexion entstehenden Bilder (B_2, B_2') auffassen und konstruieren als die Bilder der durch die erste Reflexion entstandenen Bilder (B_1, B_1') usw. (Abb. 368a). Sämtliche Bilder sowie der abgebildete Punkt selbst liegen auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt im Scheitel des Winkelspiegels liegt.

Besonders einfach gestalten sich die Verhältnisse, wenn der Winkel der beiden Spiegel ein ganzzahliger Bruchteil von 360° ist. In diesem Falle fallen immer gewisse Bilder zusammen. Hierauf beruhen die im sog. Kaleidoskop durch mehrfache Spiegelung ganz unregelmäßig geformter Gegenstände entstehenden regelmäßigen Figuren. Von Interesse ist noch der Winkelspiegel mit einer Spiegelneigung von 90°. Abb. 368b zeigt das in einem solchen Spiegel durch zweimalige

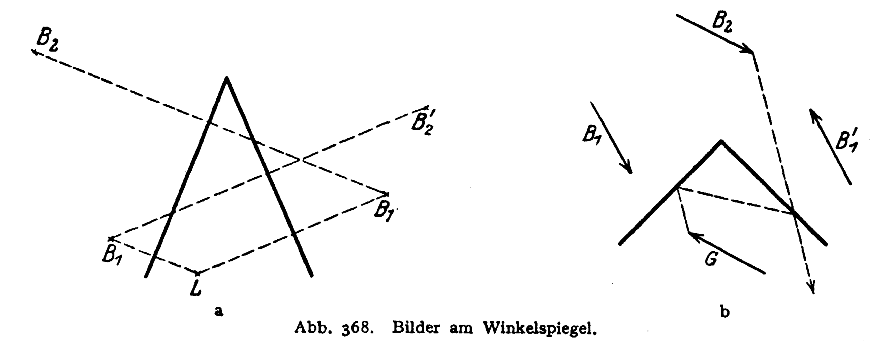


Abb. 368. Bilder am Winkelspiegel.

Reflexion entstehende Bild B_2 eines Gegenstandes G. Das Bild liegt gerade umgekehrt wie bei einem einfachen, ebenen Spiegel. Eine in einen solchen Winkelspiegel hineinschauende Person sieht also ihr getreues, d. h. seitenrichtiges Bild. Es entstehen in diesem Falle zwei Bilder B_1 und B_1' durch erste Reflexion. Die beiden durch zweite Reflexion entstehenden Bilder fallen zusammen, und auf die gleiche Stelle fallen die durch die vierte, sechste, achte usw. Reflexion entstehenden Bilder. Die durch die dritte, fünfte, siebente usw. Reflexion entstehenden Bilder fallen mit den von der ersten Reflexion herrührenden zusammen.

407. Konkavspiegel. Unter den gekrümmten Spiegeln spielen diejenigen eine Hauptrolle, deren Fläche Teile einer Kugelfläche bilden. Je nachdem die

spiegelnde Fläche nach innen oder nach außen gewölbt ist, unterscheidet man Konkav- oder Hohlspiegel und Konvexspiegel. Für die folgenden Überlegungen gilt stets die Voraussetzung, daß die Spiegel nur kleine Teile von Kugelflächen bilden, d. h. daß die Dimensionen des Spiegels klein sind gegen seinen Krümmungsradius. Das in der Mitte der Spiegelfläche auf ihr errichtete Lot heißt die Achse des Spiegels, ein in dieser Richtung verlaufender Strahl Hauptstrahl. Ein auf einen Hohlspiegel fallender Strahl wird so reflektiert, als wenn er von der in diesem Punkte an die Kugelfläche gelegten Tangentialebene regulär reflektiert würde. Insbesondere verläuft er also bei senkrechtem (radialem) Einfall in sich selbst zurück.

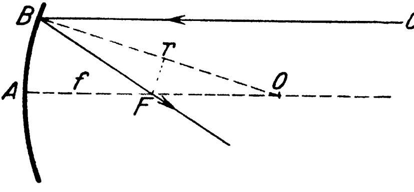


Abb. 369. Zur Reflexion am Konkavspiegel.

In der Richtung CB, parallel zur Achse, falle ein Strahl in B auf einen Spiegel vom Krümmungsradius r und werde nach F reflektiert (Abb. 369). O sei der Krümmungsmittelpunkt des Spiegels. Nach dem Reflexionsgesetz ist $\sphericalangle CBO = \sphericalangle FBO$, ferner ist aber $\sphericalangle CBO = \sphericalangle FOB$. Es ist also ΔBFO gleichschenklig. Daher ist weiter $FO = r/2 \cos \sphericalangle FOB$. Wegen der oben gemachten Annahme über die Dimensionen des Spiegels kann $\sphericalangle FOB$ nur sehr klein sein. In diesem Falle ist $\cos \sphericalangle FOB$ nahezu gleich 1, so daß man ohne merklichen Fehler setzen kann $FO = r/2$. Daraus folgt weiter

$$AF = FO = f = \frac{r}{2}. \tag{5}$$

Das gilt für jeden andern der Achse parallelen Strahl unter den genannten Voraussetzungen. Es folgt, daß sich alle der Achse parallelen Strahlen im Punkte F, dem sog. Brennpunkt, schneiden. Er liegt auf der Achse in der Mitte zwischen dem Spiegel und seinem Krümmungsmittelpunkt. Die Entfernung $AF = f = r/2$ nennt man die Brennweite des Hohlspiegels. Sie ist gleich dem halben Krümmungsradius r.

Nach dem Satz von der Umkehrbarkeit des Strahlenganges (§ 403) verläuft ein Strahl, welcher vom Brennpunkt F her auf den Spiegel fällt, gerade umgekehrt wie der soeben betrachtete Strahl. Ein Strahl, der aus der Richtung des Brennpunktes kommt, verläuft also nach der Reflexion zur Achse parallel.

Die Strahlen, welche von einem sehr fernen, in der Achse des Spiegels gelegenen Punkte herkommen, sind mit großer Genauigkeit unter sich und mit der Achse parallel. Sie gehen daher alle nach der Reflexion durch den Brennpunkt und divergieren wieder von ihm. Im Brennpunkt entsteht daher ein reelles Bild eines solchen, sehr entfernten (oder, wie man auch oft sagt, unendlich fernen) Punktes.

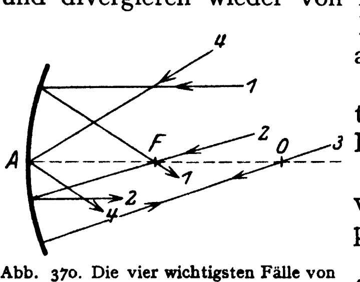


Abb. 370. Die vier wichtigsten Fälle von Reflexion am Konkavspiegel.

In Abb. 370 sind die vier für die Konstruktion von Bildern am Konkavspiegel wichtigsten Fälle dargestellt:

1. Ein zur Achse parallel einfallender Strahl verläuft nach der Reflexion durch den Brennpunkt;

2. ein durch den Brennpunkt einfallender Strahl verläuft nach der Reflexion zur Achse parallel;

3. ein durch den Krümmungsmittelpunkt senkrecht auf den Spiegel fallender Strahl läuft in sich selbst zurück;

4. ein im Schnittpunkt der Achse mit dem Spiegel einfallender Strahl bildet vor und nach der Reflexion mit der Achse den gleichen Winkel.

Wir wollen nunmehr die folgende Festsetzung treffen: Liegt das Bild auf der gleichen Seite wie der Gegenstand (reelles Bild), so soll die Entfernung des Bildes vom Spiegel positives Vorzeichen haben. Liegt es auf der entgegengesetzten Seite (virtuelles Bild), so erhält sie negatives Vorzeichen.

Mit Hilfe der obigen Sätze läßt sich die Konstruktion der von einem Hohlspiegel erzeugten Bilder durchführen. Es ist dabei vorauszuschicken, daß, solange die aufgestellten Bedingungen über die Spiegeldimensionen innegehalten werden, die von einem Punkte herkommenden Strahlen sich tatsächlich, soweit sie über den Spiegel verlaufen, alle mit sehr großer Annäherung wieder in einem Punkte schneiden (reelles Bild) oder zu schneiden scheinen (virtuelles Bild). Zur Auffindung dieses Schnittpunktes, also des Bildes eines solchen Punktes, genügen also schon zwei Strahlen. Beim Konkavspiegel stehen uns sogar vier leicht konstruierbare Strahlen zur Verfügung. Es sei der Pfeil G der abzubildende Gegenstand (Abb. 371). Sein Abstand g vom Spiegel sei größer als r. Um den Ort zu finden, an dem das Bild seiner Spitze entsteht, zeichnen wir von ihr aus: 1. den zur Achse parallelen Strahl, der nach der Reflexion durch den Brennpunkt geht, 2. den durch den Brennpunkt gehenden Strahl, der nach der Reflexion parallel zur Achse verläuft, 3. den durch den Krümmungsmittelpunkt gehenden Strahl, der in sich selbst zurückreflektiert wird. Wir können auch noch 4. den Strahl zeichnen, der in den Scheitel A des Spiegels fällt und unter gleichem Winkel gegen die Achse reflektiert wird. Im gemeinsamen Schnittpunkt dieser Strahlen entsteht das reelle Bild der Pfeilspitze. Ebenso kann man sich alle anderen Punkte des Gegenstandes abgebildet denken. Das Bild des auf der Achse liegenden Fußpunktes liegt natürlich ebenfalls auf der Achse. So entsteht das in der Abb. 371 gezeichnete Bild B im Abstande b. Dieses ist: 1. reell, denn die Strahlen schneiden sich in den Bildpunkten tatsächlich, 2. verkleinert, 3. umgekehrt, 4. liegt es auf der gleichen Seite wie der Gegenstand.

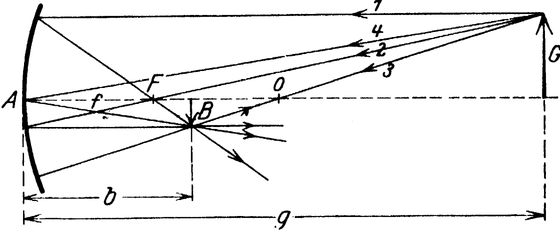


Abb. 371. Bildkonstruktion am Konkavspiegel. Reelles Bild.

Liegt der abzubildende Gegenstand an der Stelle, wo in Abb. 371 das Bild gezeichnet ist, so ergibt sich aus dem Satz von der Umkehrbarkeit des Strahlenganges (Umkehrung der Pfeilrichtung aller Strahlen) ohne weiteres, daß sein Bild jetzt dort liegen muß, wo vorher der Gegenstand lag, nämlich in G. Man kann also Bild und Gegenstand vertauschen. In diesem Falle also ist das Bild reell, vergrößert und umgekehrt. Das Bild eines im Brennpunkt befindlichen Punktes, dessen Strahlen ja nach der Reflexion alle parallel zur Achse verlaufen, entsteht in unendlicher Ferne. Rückt ein Gegenstand aus unendlicher Ferne immer näher an den Spiegel heran, so rückt sein zuerst im Brennpunkt liegendes, unendlich kleines Bild immer weiter vom Spiegel ab. Ist der Gegenstand bis zum Krümmungsmittelpunkt vorgerückt, so liegt sein Bild, welches aber stets umgekehrt ist, in der gleichen Entfernung vom Spiegel und ist mit ihm von gleicher Größe. Rückt der Gegenstand noch weiter, bis zum Brennpunkt, an den Spiegel vor, so rückt sein Bild in unendliche Ferne und wird unendlich groß. Bei weiterer Annäherung an den Spiegel entsteht kein reelles Bild mehr. Ist der Gegenstand außerhalb der doppelten Brennweite, so ist also das Bild verkleinert, befindet er sich gerade in der doppelten Brenn-

weite, so sind Gegenstand und Bild gleich groß, befindet er sich innerhalb der doppelten, bis zur einfachen Brennweite, so ist das Bild vergrößert.

Befindet sich aber der Gegenstand innerhalb der einfachen Brennweite, so entsteht ein virtuelles Bild hinter dem Spiegel. Die Konstruktion, die nach den gleichen Grundsätzen, wie oben beschrieben, erfolgt, zeigt Abb. 372. Diese Bilder sind virtuell, aufrecht und stets vergrößert. Bei der Konstruktion ist zu beachten, daß es für den Verlauf der Strahlen nach der Reflexion gleichgültig ist, ob die Strahlen tatsächlich vom Brennpunkt bzw. dem Krümmungsmittelpunkt oder nur aus der betreffenden Richtung kommen, also ihre rückwärtigen Verlängerungen durch einen dieser Punkte gehen.

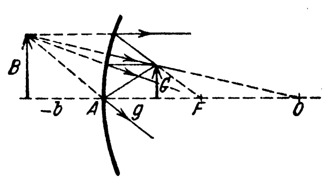
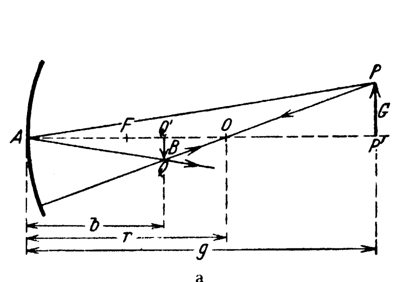


Abb. 372. Bildkonstruktion am Konkavspiegel. Virtuelles Bild.

Viele Toilettespiegel sind schwach gekrümmte Hohlspiegel, die zur Erzeugung eines etwas vergrößerten, virtuellen Bildes dienen. Bei den Scheinwerfern benutzt man Hohlspiegel, um das Licht einer Lichtquelle in eine bestimmte Richtung zu konzentrieren. Man setzt die Lichtquelle in den Brennpunkt, so daß die auf den Spiegel fallenden Strahlen parallel zur Achse austreten. Der Bruchteil des auf diese Weise konzentrierten Lichts ist um so größer, je größer der Öffnungskegel des auf den Spiegel fallenden Lichts ist. Diesem ist aber, wenn die vorstehenden Gesetzmäßigen noch einigermaßen streng gelten sollen, durch die eingangs genannten Dimensionsbeschränkungen des Spiegels eine ziemlich enge Grenze gesetzt. Von dieser Beschränkung frei sind parabolische Spiegel. Bringt man eine Lichtquelle in den Brennpunkt eines solchen, so reflektiert der Spiegel, unabhängig von seinen Dimensionen, alles auf ihn fallende Licht parallel zur Achse, wie man auf Grund der geometrischen Eigenschaften der Parabel nachweisen kann.

In Abb. 373a ist die Konstruktion eines reellen Bildes mit Hilfe derjenigen beiden Strahlen durchgeführt, welche durch den Krümmungsmittelpunkt O bzw. über den Scheitel A verlaufen. Wegen $\sphericalangle PAP' = \sphericalangle QAQ'$ und $\sphericalangle AP'P = \sphericalangle AQ'Q = 90^0$ sind die Dreiecke APP' und AQQ' ähnlich. Es sei



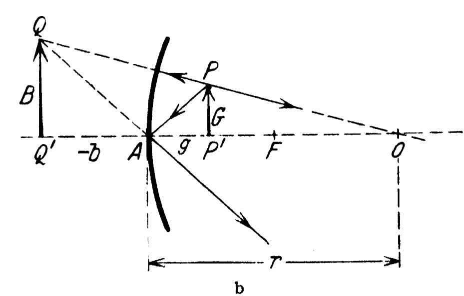


Abb. 373. Konkavspiegel. a reelles, b virtuelles Bild.

G die Größe des Gegenstandes, B die des Bildes, g die Entfernung des Gegenstandes, b die des Bildes vom Spiegelscheitel A. Dann ist

$$B : G = b : g. \tag{6}$$

Es sind aber auch die Dreiecke OQQ' und OPP' ähnliche Dreiecke. Es folgt

$$B : G = (r - b) : (g - r).$$

Es ist also

$$b : g = (r - b) : (g - r) \quad \text{oder} \quad \frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{2}{r} = \frac{1}{f}. \tag{7}$$

Durch eine einfache Umformung erhält man

$$(g - f) \cdot (b - f) = f^2. \tag{8}$$

Die Brennweite f ist also das geometrische Mittel aus den Längen $g - f$ und $b - f$.

Das Verhältnis $\gamma = B/G$ gibt die lineare Vergrößerung (bzw. Verkleinerung), es ist daher nach Gl. 6 die Vergrößerung

$$\gamma = \frac{B}{G} = \frac{b}{g}. \tag{9}$$

Gl. 7 bzw. 8 erlaubt den Ort des Bildes zu berechnen, wenn die Gegenstandsentfernung g und die Brennweite f bekannt sind, oder f bzw. r durch Messung von g und b zu bestimmen (vgl. § 449).

Liegt der Gegenstand innerhalb der Brennweite, so erhalten wir ein virtuelles Bild, und die Bildentfernung b ist nunmehr nach unserer obigen Festsetzung negativ. Aus der Abb. 373b liest man die Proportionen

$$\frac{B}{G} = \frac{-b}{g} = \frac{r-b}{r-g} \tag{10}$$

ab, die wieder zu der Gl. 7 führen. Diese ist demnach für alle Arten der Abbildung am Konkavspiegel gültig. Führen wir jedoch an Stelle von b seinen absoluten Betrag $|b| = -b$ in Gl. 10 ein, so erhalten wir

$$\frac{1}{g} - \frac{1}{|b|} = \frac{2}{r} = \frac{1}{f}. \tag{11}$$

Als lineare Vergrößerung ergibt sich für das virtuelle Bild

$$\gamma = \frac{B}{G} = \frac{-b}{g} = \frac{|b|}{g}. \tag{12}$$

Das virtuelle Bild ist stets aufrecht und größer als der Gegenstand.

Sind die oben eingeführten Beschränkungen bezüglich der Spiegeldimensionen nicht erfüllt, so schneiden sich achsenparallele Strahlen nicht mehr alle in einem Punkte. Die reflektierten achsenparallelen Strahlen haben eine Einhüllende, die sog. Katakaustik. Man kann sich den in Abb. 374 dargestellten Querschnitt dieser Fläche so konstruiert denken, daß ein Kreis vom Radius $r/4$ auf einem um den Mittelpunkt des Konkavspiegels beschriebenen Kreise vom Radius $r/2$ abrollt. Die Katakaustik wird alsdann von jenem Punkte des kleineren Kreises beschrieben, der den größeren Kreis im Achsenpunkte F — dem Brennpunkt nach der früheren Definition — berührt. Die Katakaustik ist also eine Epizykloide. Die parallel einfallenden Strahlen werden nach der Reflexion in den zwischen Spiegel und Katakaustik eingeschlossenen Raum zusammengedrängt.

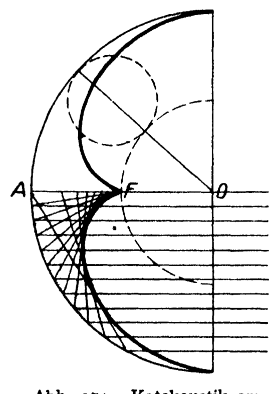


Abb. 374. Katakaustik am Konkavspiegel.

408. Konvexspiegel. Bei Konvexspiegeln ergibt sich durch eine Überlegung, die der im § 407 angestellten völlig analog ist, daß alle Strahlen, die parallel zur Achse einfallen, so reflektiert werden, als ob sie von einem Punkte F herkommen, der hinter dem Spiegel auf dessen Achse liegt, und der um die halbe Länge des Krümmungsradius, $-f = r/2$, vom Scheitel entfernt ist (Abb. 375). Dieser Punkt ist sozusagen ein virtueller Brennpunkt, und $-f$ ist die (negative) Brennweite des Hohlspiegels. Strahlen, welche in der Richtung auf den Krümmungsmittelpunkt, also senkrecht, auf den Spiegel fallen, werden in sich selbst reflektiert; bei im Scheitel auffallenden Strahlen ist der Winkel gegen

die Achse vor und nach der Reflexion gleich. Hieraus ergibt sich die Konstruktion der Bilder genau wie beim Konkavspiegel.

Aus der Abb. 375 liest man die folgenden Proportionen ab:

$$\frac{B}{G} = \frac{-b}{g} = \frac{r+b}{r+g}. \tag{13}$$

Hieraus folgt

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = -\frac{2}{r} = \frac{1}{f}, \tag{14}$$

also dieselbe Formel, wie beim Konkavspiegel (Gl. 7). Führen wir jedoch für die negative Brennweite und die negative Bildentfernung deren absolute Beträge $|f| = -f$ und $|b| = -b$ ein, so folgt

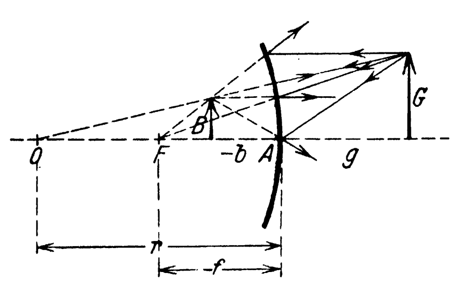


Abb. 375. Bildkonstruktion am Konvexspiegel.

$$\frac{1}{g} - \frac{1}{|b|} = -\frac{2}{r} = -\frac{1}{|f|}. \tag{15}$$

Für die Vergrößerung folgt aus Abb. 375 wieder

$$\gamma = \frac{B}{G} = \frac{-b}{g} = \frac{|b|}{g}. \tag{16}$$

Die Bilder am Konvexspiegel sind stets virtuell, aufrecht und verkleinert.

409. Das Brechungsgesetz. Optische Weglänge. Fällt Licht schräg auf eine durchsichtige Substanz, z. B. Glas, Quarz, Wasser usw., so beobachtet man im allgemeinen, daß es beim Eindringen in diese Substanz und beim Wiederaustritt seine Richtung ändert. Es wird „gebrochen", und man nennt diesen Vorgang Brechung oder Refraktion. Brechung erfolgt immer, wenn ein Lichtstrahl aus einem Medium in ein optisch anders beschaffenes Medium eintritt. Sie beruht auf der verschiedenen Geschwindigkeit des Lichts in den beiden Medien. Bei der gewöhnlichen Brechung liegen einfallender Strahl, Einfallslot und gebrochener Strahl stets in der gleichen Ebene.

Wir haben den Fall der Brechung bereits in der allgemeinen Wellenlehre (§ 133) behandelt. Das Licht ist auch ein Schwingungsvorgang, allerdings kein mechanischer. Doch gelten beim Licht formal die gleichen Gesetzmäßigkeiten, die wir dort abgeleitet haben, insbesondere das Brechungsgesetz

$$n_{12} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \tag{17}$$

das für das Licht von SNELLIUS (1615) entdeckt wurde. n_{12} ist der gegenseitige Brechungsindex der beiden beteiligten Medien.

In Gl. 17 bedeuten c_1 und c_2 die Geschwindigkeiten des Lichts in zwei aneinander grenzenden Medien I und II, α und β sind die beiden Winkel, die der Lichtstrahl mit dem Einfallslot auf die Grenzfläche diesseits und jenseits derselben bildet (Abb. 376). Natürlich gilt die FRESNELsche Konstruktion des gebrochenen Strahls (§ 133) auch in der Optik. Ist die Lichtgeschwindigkeit im ersten Medium größer als im zweiten, so wird der Strahl dem Einfallslot zugebrochen, $\alpha > \beta$ (Abb. 376a), andernfalls wird er von ihm weggebrochen, $\alpha < \beta$ (Abb. 376b). Die Lichtgeschwindigkeit ist im Vakuum größer als in allen materiellen Körpern; das Vakuum hat daher den kleinsten Brechungsindex. Man setzt ihn gleich 1. Die (normalen, vgl. § 466) Brechungsindizes aller materiellen Körper gegen das Vakuum sind daher größer als 1. Die auf das Vakuum bezogenen Brechungsindizes bezeichnet man als Brechungsindizes n schlechthin. Diese Größen sind es, die man in den Tabellen findet. In Tab. 30 sind als Beispiele einige Zahlen ge-

geben. (Sie beziehen sich auf das Licht der gelben Natriumlinie [D-Linie] und auf eine Temperatur von 18°. Wir werden später sehen, daß der Brechungsindex von der Farbe [Wellenlänge] abhängt.) Der Brechungsindex der

Tabelle 30.
Brechungsindex einiger Substanzen.

Wasser	1,3332
Eis	1,31
Kassiaöl	1,605
Schwefelkohlenstoff . .	1,6291
Kronglas, leicht	1,5153
Kronglas, schwer . . .	1,6152
Flintglas, leicht	1,6085
Flintglas, schwer	1,7515
Flintglas, schwerstes . .	1,9
Phosphor in CS_2 . . .	1,97

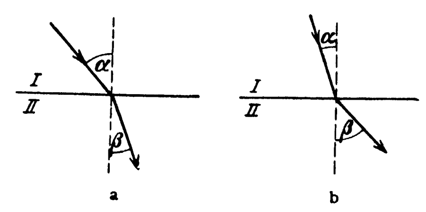


Abb. 376. Zur Brechung des Lichts.

Gase, also auch der Luft, ist von 1 nur sehr wenig verschieden. In der überwiegenden Mehrzahl der Fälle kann man daher von dem Vorhandensein von Luft an der Grenze brechender Substanzen absehen und sich an deren Stelle ein Vakuum denken.

Der gegenseitige Brechungsindex n_{12} zweier Medien ergibt sich aus ihren Brechungsindizes n_1 und n_2 gegen das Vakuum zu
$$n_{12} = \frac{n_1}{n_2}.$$

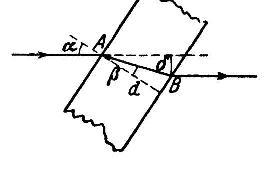


Abb. 377. Brechung in einer planparallelen Platte.

Eine Substanz, deren Brechungsindex größer ist als der einer andern, bezeichnet man als optisch dichter als diese. (Das hat aber nichts mit der Massendichte ϱ der Substanz zu tun!)

Man lasse einen Lichtstrahl auf einen weißen Schirm fallen. Bringt man in den Weg des Lichts eine schräggestellte dicke, planparallele Glasplatte oder einen planparallelen Glastrog mit Wasser, so verschiebt sich der Lichtfleck, weil der Strahl parallel zu seiner ursprünglichen Richtung verschoben ist. Aus Abb. 377 entnimmt man, daß die seitliche Verschiebung $\delta = AB \sin(\alpha - \beta)$, ferner $AB = d/\cos\beta$ (d = Dicke der Platte). Es ist also
$$\delta = d \cdot (\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)/\cos\beta,$$
oder wegen $\sin\alpha = n\sin\beta$
$$\delta = d\sin\alpha\left(1 - \frac{\cos\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}\right).$$

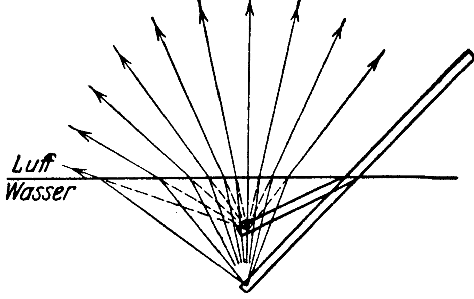


Abb. 378. Lichtbrechung im Wasser.

Aus der Lichtbrechung im Wasser erklärt sich, weshalb schräg ins Wasser tauchende Gegenstände in der Oberfläche geknickt und unterhalb der Oberfläche verkürzt erscheinen (Abb. 378).

Unter der optischen Weglänge eines Strahls zwischen zwei Punkten seiner Bahn versteht man das Produkt ns aus dem zwischen diesen Punkten zurückgelegten Wege s und dem Brechungsindex n, den der Strahl auf diesem Wege vorfindet. Sei c die Lichtgeschwindigkeit in der betreffenden Substanz, c_0 die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum, so benötigt der Strahl zur Zurücklegung des Weges s die Zeit
$$t = \frac{s}{c} = \frac{ns}{c_0}. \qquad (18)$$

Hieraus folgt, daß das Licht gleiche optische Weglängen in gleichen Zeiten zurücklegt.

410. Krumme Lichtstrahlen. Schlieren. Grenzen zwei Schichten der gleichen Substanz aneinander, in denen diese einen verschiedenen Brechungsindex hat, so findet auch an einer solchen Grenze eine Brechung statt. Das kann dann der Fall sein, wenn sich die Dichte der Substanz von Ort zu Ort ändert, z. B. in der Luft infolge einer Änderung der Temperatur mit der Höhe. Ist die Änderung des Brechungsindex eine stetige, so hat dies eine Krümmung eines Lichtstrahls zur Folge, wie dies Abb. 379 schematisch darstellt. Solche Ursachen rufen z. B. die Luftspiegelungen (Fata morgana u. dgl.) hervor. Von heißem Boden aufsteigende Luft ist infolge ihrer thermischen Inhomogenität auch optisch inhomogen. Infolgedessen erfährt das durch sie hindurchgehende Licht ganz unregelmäßige und fortwährend veränderliche Brechungen, welche die durch diese Luft gesehenen Gegenstände verzerrt und flimmernd erscheinen lassen. Die gleiche, als Schlieren bezeichnete Erscheinung beobachtet man auch in Lösungen, in denen die Konzentration noch nicht überall ausgeglichen ist. Ebenso beruht auf solchen optischen Störungen in der Atmosphäre das Flimmern der Fixsterne. Der Kegel von Licht, der von einem Fixstern in unser Auge gelangt, ist wegen der ungeheuren Entfernung dieser Sterne auch in den höchsten Schichten der Erdatmosphäre nur wenig breiter als unsere Pupille. Kleine örtliche optische Störungen in der Atmosphäre bewirken daher schon eine Störung der Lichtausbreitung bis zum Auge. Bei den viel näheren Planeten hat der Kegel des von ihnen in unser Auge kommenden Lichts in den oberen Atmosphärenschichten bereits einen beträchtlichen Durchmesser, z. B. beim Mars rund 10 m. Kleine örtliche optische Ungleichmäßigkeiten in der Atmosphäre gleichen sich daher gegenseitig aus und bewirken keine wesentlichen Helligkeitsschwankungen des Sterns. So kommt es, daß die Planeten nicht flimmern.

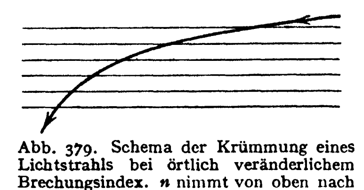


Abb. 379. Schema der Krümmung eines Lichtstrahls bei örtlich veränderlichem Brechungsindex. n nimmt von oben nach unten zu.

411. Totalreflexion. Ein Lichtstrahl falle unter dem Winkel β auf die Grenzfläche einer optisch dichteren gegen eine optisch dünnere Substanz. Der gegenseitige Brechungsindex der beiden Substanzen sei $n_{12} = \frac{n_1}{n_2}$ $(n_1 > n_2)$ Sein Austrittswinkel α im zweiten Medium ist dann gegeben durch

$$\sin\alpha = n_{12}\sin\beta\,.$$

Wenn $\sin\beta = 1/n_{12}$ ist, so ist $\sin\alpha = 1$, also $\alpha = 90^0$, der Strahl tritt, längs der Oberfläche verlaufend, aus dem Medium aus (Abb. 380, Strahl 1). Wird der Einfallswinkel β noch größer (Abb. 380, Strahl 2), so wird $n_{12}\sin\beta > 1$, es gibt also keinen Winkel α mehr, der dem Brechungsgesetz genügen könnte, da $\sin\alpha$ nicht größer als 1 werden kann. In diesem Falle tritt keine Brechung ein, sondern das Licht wird an der Grenzfläche wie an einer vollkommen spiegelnden Fläche in das erste Medium zurückreflektiert, und zwar nach dem Reflexionsgesetz (§ 405). Diese Erscheinung heißt Totalreflexion, und zwar deshalb, weil in diesem Falle das Licht tatsächlich vollständig reflektiert wird, während bei der gewöhnlichen Reflexion immer ein Bruchteil des Lichts in das reflektierende Medium eintritt, also nicht reflektiert wird. Der durch die Gleichung

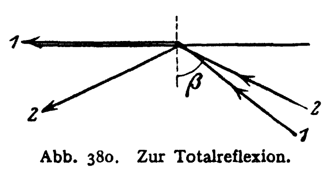


Abb. 380. Zur Totalreflexion.

$$\sin\beta = \frac{1}{n_{12}} = \frac{n_2}{n_1} \tag{19}$$

gegebene Winkel heißt der Grenzwinkel der Totalreflexion des betreffenden Mediums gegen das zweite Medium. Grenzt das Medium an das Vakuum (oder an Luft, $n_2 = 1$, $n_1 = n$), so wird $\sin\beta = \frac{1}{n}$. Die Totalreflexion wurde von KEPLER (1611) entdeckt. Man beachte, daß Totalreflexion nur dann eintreten kann, wenn der Strahl vom optisch dichteren Medium her auf die Grenzfläche trifft.

Bringt man unter Wasser einen drehbaren Spiegel an, auf den man einen Lichtstrahl fallen läßt, der von dort gegen die Wasseroberfläche reflektiert wird, so läßt sich die Totalreflexion an der Wasseroberfläche (Grenzwinkel ungefähr $48^1/_2{}^0$) leicht beobachten, besonders wenn man dem Wasser etwas Fluoreszein beimischt, durch das die Bahn des Lichtstrahls sichtbar gemacht wird.

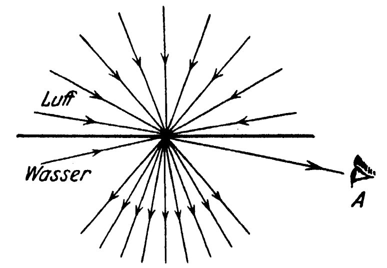


Abb. 381. Zur Brechung und Totalreflexion im Wasser.

Nach dem Satz von der Umkehrbarkeit des Strahlenganges (§ 403) wird ein Lichtstrahl, der streifend die Oberfläche eines optisch dichteren Mediums, z. B. Wasser, trifft, unter dem Grenzwinkel der Totalreflexion in das Wasser hineingebrochen. Fällt auf einen Punkt einer Wasseroberfläche von allen Richtungen her Licht (z. B. das diffuse Tageslicht), so wird das an jedem Punkt der Oberfläche in das Wasser eintretende Licht durch die Brechung in einen Kegel gesammelt, dessen Öffnung doppelt so groß ist wie dieser Grenzwinkel (Abb. 381). Zu dem Auge A eines Beobachters gelangt in der gezeichneten Blickrichtung durch das Wasser hindurch kein Licht aus dem Raum oberhalb der Wasseroberfläche. In das Auge kann bei dieser Blickrichtung von der Oberfläche her nur Licht treten, welches eine Totalreflexion an der Oberfläche erlitten hat, das also von einem Punkt innerhalb des Wassers herkommt. Daher erscheint die Wasseroberfläche als spiegelnd, wenn man sie unter einem Einfallswinkel betrachtet, der größer ist, als der Grenzwinkel der Totalreflexion. Aus dem Wasser „hinaussehen" kann man nur innerhalb des durch den Grenzwinkel der Totalreflexion begrenzten räumlichen Winkels. Diese Erscheinung beobachtet man z. B. bei großen Aquarien mit seitlichen Schaufenstern, bei denen man im allgemeinen nicht sehen kann, was sich oberhalb des Wassers befindet, und bei denen der Inhalt des Aquariums an der Wasserfläche gespiegelt erscheint.

Der Silberglanz, den mit Luftblasen bedeckte Gegenstände unter Wasser zeigen, rührt von der an den Luftblasen eintretenden Totalreflexion her. Ein in Wasser getauchtes, zum Teil mit Quecksilber gefülltes Reagenzglas erscheint dort, wo es leer ist, stärker spiegelnd als an dem mit Quecksilber gefüllten Teil, weil die Totalreflexion an der Luft vollkommener ist als die Reflexion am Quecksilber.

Der Grenzwinkel der Totalreflexion von Glas gegen Luft ist kleiner als 45°. Läßt man daher einen Lichtstrahl in der in Abb. 382a oder b dargestellten Weise in ein rechtwinkliges Glasprisma treten, so wird er im Innern total reflektiert und tritt unter 90° (a) bzw. 180° (b) gegen seine ursprüngliche Richtung aus dem Prisma wieder aus. Hiervon wird bei den Prismenfernrohren Gebrauch gemacht (§ 425). Bei dem in Abb. 382b dargestellten Strahlengang wird die Reihenfolge der Strahlen vertauscht, der vor der zweimaligen Reflexion obere Strahl ist nachher der untere. Man benutzt dies zur Umkehrung von Bildern (Umkehrprismen).

Da der Grenzwinkel der Totalreflexion in einfacher Weise nach Gl. 2 mit dem Brechungsindex n zusammenhängt, so kann man aus ihm diese Konstante berechnen. Hiervon wird bei den sog. Refraktometern Gebrauch gemacht, welche zur Anwendung bei Flüssigkeiten und festen Körpern in den verschiedensten Ausführungsformen existieren.

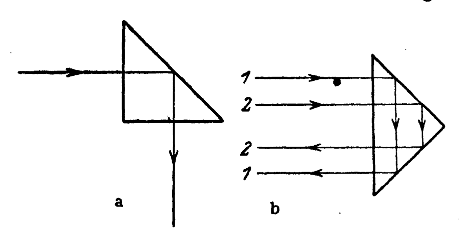


Abb. 382. Totalreflektierendes Prisma.

Man kann den Brechungsindex eines durchsichtigen Körpers auch so bestimmen, daß man durch Mischen zweier Flüssigkeiten, deren eine einen größeren und deren andere einen kleineren Brechungsindex hat, als der Körper, eine Flüssigkeit herstellt, deren Brechungsindex demjenigen des Körpers genau gleich ist. Dann wird der Körper in der Flüssigkeit unsichtbar, weil er sich optisch von ihr nicht unterscheidet. Dieses Verfahren kommt vor allem bei Körpern ohne für unmittelbare Messungen geeignete Außenflächen in Betracht. Der Brechungsindex der Flüssigkeitsmischung kann leicht gemessen werden, z. B. mit dem Refraktometer.

412. Prismen. Ein Prisma ist ein Körper aus einer brechenden Substanz, meist Glas, für besondere Zwecke auch aus Quarz (Bergkristall), Flußspat, Steinsalz usw. von dreieckigem Querschnitt. Mindestens zwei seiner Begrenzungsflächen müssen sehr gut eben geschliffen sein. Den Winkel, den diese miteinander bilden, nennt man den brechenden Winkel des Prismas (γ). Sehr häufig ist der Querschnitt ein gleichseitiges Dreieck, der brechende Winkel also 60^0. Abb. 383 zeigt die Brechung eines Strahles durch ein Prisma. Wie der Strahl auch einfallen möge, stets wird er vom Scheitel des brechenden Winkels fort abgelenkt.

Für die Berechnung der Ablenkung δ eines unter dem Winkel α auf eine Prismenfläche fallenden Strahls gelten außer dem Brechungsgesetz Gl. 1 die beiden aus Abb. 383 ablesbaren Beziehungen $\beta_1 + \beta_2 = \gamma$ und $\delta = (\alpha_1 + \alpha_2) - (\beta_1 + \beta_2)$, wobei δ den Winkel bedeutet, um den der Strahl nach dem Wiederaustritt aus seiner anfänglichen Richtung abgelenkt ist.

Die kleinste Ablenkung erfolgt, wenn der Strahl symmetrisch durch das Prisma hindurchtritt, also $\alpha_1 = \alpha_2$ und $\beta_1 = \beta_2$ ist. In diesem Falle ist $\beta_1 = \beta_2 = \gamma/2$ und $\alpha_1 = \alpha_2 = (\delta + \gamma)/2$ und daher nach dem Brechungsgesetz

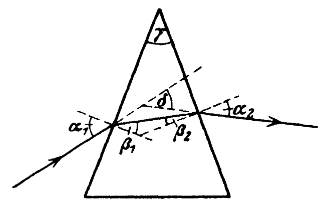


Abb. 383. Brechung im Prisma.

$$\sin\frac{\delta + \gamma}{2} = n \sin\frac{\gamma}{2}\,. \qquad (20)$$

Diese Beziehung kann dazu benutzt werden, um aus dem Winkel kleinster Ablenkung den Brechungsindex n der Prismensubstanz zu berechnen.

Ist der brechende Winkel γ sehr klein und n nicht sehr groß, so ist auch der Ablenkungswinkel δ sehr klein. Man kann dann die sin durch die Winkel ersetzen und erhält $\alpha_1 = n\beta_1$, $\alpha_2 = n\beta_2$, $\beta_1 + \beta_2 = \gamma$, $\alpha_1 + \alpha_2 = n\gamma$ und damit

$$\delta = (n - 1)\,\gamma\,.$$

Bei der praktischen Ausführung von Brechungsversuchen mit Prismen beobachtet man bei Verwendung von weißem Licht eine Veränderung dieses Lichts nach der Brechung, nämlich das Auftreten von Farben. Über diese Erscheinung (Dispersion) s. § 432.

413. Sphärische Linsen. Eine sphärische Linse ist ein Körper aus einer brechenden Substanz, meist Glas, welche von zwei koaxialen Kugelflächen begrenzt ist. Eine dieser Flächen kann auch eine Ebene sein. (Die Kugelform der Linsenflächen ist keineswegs die in allen Fällen günstigste. Jedoch wäre die Herstellung von Linsen mit anders geformten Begrenzungsflächen sehr schwierig und kostspielig.) Nach den dadurch gegebenen verschiedenen Möglichkeiten unterscheidet man folgende Typen von Linsen (Abb. 384):

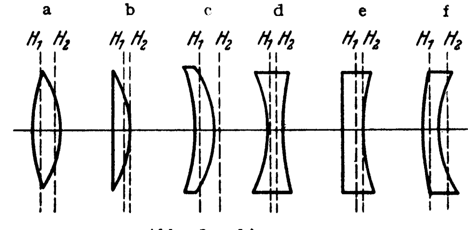
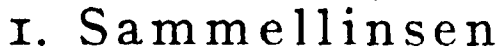


Abb. 384. Linsentypen.
I. Sammellinsen. II. Zerstreuungslinsen.



1. Sammellinsen
   a) bikonvex, b) plankonvex,
   c) konkavkonvex.

Die Linsen dieses Typus sind in der Mitte dicker als am Rande.

2. Zerstreuungslinsen,
   d) bikonkav, e) plankonkav, f) konvexkonkav.

Diese Linsen sind in der Mitte dünner als am Rande. (Über die Bedeutung von H_1, H_2 s. § 418).

Bei der Ableitung der folgenden Gesetzmäßigkeiten werden die gleichen einschränkenden Voraussetzungen gemacht wie beim Hohlspiegel (§ 407), nämlich daß die Dimensionen der Linse klein seien gegen die Krümmungsradien ihrer Begrenzungsflächen. Die bei den Linsen anzustellenden Überlegungen entsprechen den bei den Hohlspiegeln angestellten weitgehend und werden daher hier kürzer gefaßt.

414. Brechung in Linsen. Vom Punkte A her (Abb. 385) treffe unter dem Winkel α_1 gegen die Linsenachse ein Strahl auf die Linse und schneide nach zweimaliger Brechung die Achse unter dem Winkel α_2 auf der andern Seite wieder in B. O_1 und O_2 seien die Krümmungsmittelpunkte der beiden Linsenflächen, r_1 und r_2 die dazugehörigen Krümmungsradien. Vorausgesetzt wird, daß der Strahl sich nur wenig von der Achse entfernt, die Winkel α_1 und α_2 also klein sind, und daher auch der Strahl im Innern der Linse der Achse nahezu parallel ist. Dies trifft in den praktisch vorkommenden Fällen stets in hinreichender Annäherung zu.

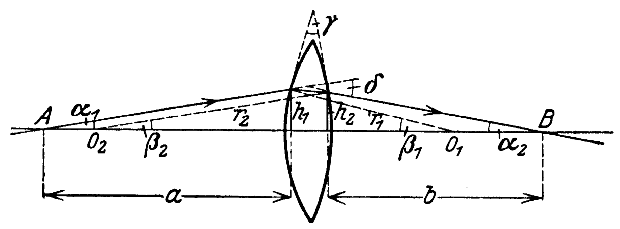


Abb. 385. Zur Ableitung der Linsenformel.

Es sei δ der Winkel, um den der von A kommende Strahl aus seiner Richtung abgelenkt wird. Diesen Winkel kann man auf zwei Weisen ausdrücken. Einmal ist $\delta = \alpha_1 + \alpha_2$, als Außenwinkel des die Winkel α_1 und α_2 enthaltenden Dreiecks. Da ferner die Linse auf den Strahl wie ein schmales Prisma wirkt (§ 412), so ist zweitens $\delta = (n - 1)\,\gamma = (n - 1)\,(\beta_1 + \beta_2)$. Wegen der Kleinheit der vorkommenden Winkel kann man weiter setzen

$$\alpha_1 \approx \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{h_1}{a}, \quad \alpha_2 \approx \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{h_2}{b}, \quad \beta_1 \approx \sin\beta_1 = \frac{h_1}{r_1}, \quad \beta_2 \approx \sin\beta_2 = \frac{h_2}{r_2}.$$

Setzt man diese Ausdrücke in die beiden Gleichungen für δ ein, so folgt $h_1/a + h_2/b = (n - 1)\,(h_1/r_1 + h_2/r_2)$. Nun sind h_1 und h_2 nach Voraussetzung

sehr wenig verschieden, so daß man ohne merklichen Fehler $h_1 = h_2$ setzen darf. Alsdann folgt

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = \frac{1}{f}, \tag{21}$$

wobei

$$f = \frac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)} = \frac{r_1 \cdot r_2}{(n-1)\,(r_1 + r_2)}. \tag{22}$$

Für eine Linse mit einer ebenen Fläche ($r_1 = r$, $r_2 = \infty$) ergibt sich aus Gl. 22 die Gleichung

$$f = \frac{r}{n-1} \tag{23a}$$

für eine solche mit zwei Flächen von gleicher Krümmung ($r_1 = r_2 = r$)

$$f = \frac{r}{2(n-1)}. \tag{23b}$$

Die Größe f ist nur von den geometrischen und optischen Eigenschaften der Linse abhängig, also für jede Linse eine charakteristische Konstante. Rückt der Punkt A in unendliche Ferne, so daß $a = \infty$, fallen also alle von A her kommenden Strahlen parallel auf die Linse, so reduziert sich Gl. 21 auf $1/b = 1/f$, d. h. Strahlen, welche parallel zur Achse auf die Linse fallen, gehen alle durch einen Punkt F, der den Abstand f von der Linse hat. Genau wie beim Hohlspiegel bezeichnet man daher F als den Brennpunkt (Fokus), f als die Brennweite der Linse. Aus dem Satz von der Umkehrbarkeit des Strahlenganges folgt, daß ein vom Brennpunkt her auf die Linse fallender Strahl hinter der Linse parallel zur Achse verläuft. Jede Linse hat zwei Brennpunkte, auf jeder Seite einen. Sie liegen auf der Linsenachse und haben beide den gleichen Abstand f von der Linse.

Die Gl. 5, die hier für eine bikonvexe Linse abgeleitet wurde, gilt ebenso für Linsen mit einer ebenen Fläche oder mit einer oder zwei konkaven Flächen. Dabei ist aber der Krümmungsradius von konkaven Flächen mit dem negativen Vorzeichen zu versehen. Es ergibt sich dann für alle Arten von Sammellinsen (Abb. 384a—c) eine positive, für alle Arten von Zerstreuungslinsen (Abb. 384 d—f) eine negative Brennweite.

Statt der Brennweite gibt man bei Linsen oft ihre sog. Dioptrienzahl oder Brechkraft D an. Es ist $D = 1/f$, wobei f in m angegeben wird. Eine Linse von z. B. 20 cm Brennweite hat demnach 5 Dioptrien. Sammellinsen haben positive, Zerstreuungslinsen negative Dioptrienwerte.

Fällt ein Strahl schräge durch die Linsenmitte, durchsetzt er also die Linsenflächen an zwei Stellen, wo diese einander parallel sind, so erfährt er keine Ablenkung, sondern nur eine seitliche Parallelverschiebung (§ 409). Diese ist aber bei der vorausgesetzten geringen Dicke der Linse so klein, daß man sie vernachlässigen kann. Man zeichnet daher bei einer dünnen Linse einen solchen Strahl so, als ob er ungebrochen geradlinig durch die Linsenmitte ginge.

In der Gl. 21 kommt der Winkel α_1, den der von A ausgehende Strahl mit der Linsenachse bildet, nicht vor. Diese Gleichung gilt also für jeden beliebigen von A ausgehenden und durch die Linse hindurchgehenden Strahl. Alle diese Strahlen schneiden sich in B, d. h. B ist ein reelles Bild von A. Es läßt sich zeigen, daß die Lage von B bei gegebener Lage von A auch durch die Bedingung gegeben ist, daß die optischen Weglängen aller Strahlen, die von A aus über die Linse nach B gelangen, gleich groß sind. Das gleiche gilt auch für die Bilder von Punkten, die nicht auf der Linsenachse liegen. Während es sonst zwischen zwei Punkten in der Regel einen sog. ausgezeichneten Lichtweg gibt (FERMATsches Prinzip, §§ 134 und 403), der einen Extremwert der optischen Weglänge zwischen

zwei Punkten darstellt, besteht ein solcher ausgezeichneter Lichtweg zwischen Gegenstand und Bild bei den Linsen nicht. Man kann dies geradezu als das Wesen der Linsenwirkung bezeichnen. (Vgl. hierzu die Abb. 388, § 415, sowie § 449.)

415. Sammellinsen. Fallen von einem Punkte ausgehende Strahlen auf eine Sammellinse, so ergibt sich, daß sich diese Strahlen — unter den gemachten einschränkenden Voraussetzungen über die Dimensionen der Linse — sämtlich entweder in einem auf der andern Seite der Linse gelegenen Punkt tatsächlich schneiden oder sich in einem auf der gleichen Seite gelegenen Punkt zu schneiden scheinen. Im ersten Falle liefert die Linse also ein reelles, im zweiten Fall ein virtuelles Bild des Punktes. Zur Konstruktion des Bildpunktes genügen demnach zwei Strahlen. Nach den Ausführungen des § 458 haben wir deren sogar drei zur Verfügung: 1. den von dem Ausgangspunkt parallel zur Achse auf die Linse fallenden Strahl, welcher auf der andern Seite durch den Brennpunkt geht, 2. den Strahl, der vom Ausgangspunkt durch den auf der gleichen Seite gelegenen Brennpunkt geht und auf der andern Seite achsenparallel austritt, 3. den Strahl, welcher durch die Mitte der Linse tritt und nur ein wenig parallel verschoben wird, also praktisch ungebrochen bleibt. Bei der Konstruktion, die ja eine dünne Linse voraussetzt, sehen wir von der tatsächlichen zweimaligen Brechung der beiden ersten Strahlen ab und zeichnen sie nur einmal in der Linse geknickt.

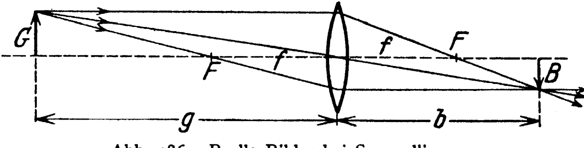


Abb. 386. Reelle Bilder bei Sammellinsen.

Auf diese Weise ergibt sich die in Abb. 386 dargestellte Konstruktion des Bildes B eines außerhalb der Brennweite gelegenen Gegenstandes G. Das Bild ist reell, umgekehrt und im vorliegenden Falle verkleinert. Betrachten wir aber jetzt umgekehrt B als den Gegenstand, G als dessen Bild, so ist die Konstruktion genau die gleiche. In diesem Falle ist das Bild vergrößert.

Aus Abb. 386 liest man ab, daß

$$\frac{B}{G} = \frac{b}{g} = \frac{b-f}{f} = \frac{f}{g-f}.$$

Dies liefert zwei Gleichungen zur Berechnung von b bei gegebenen g und f, während wir deren nur eine benötigen. Tatsächlich liefern beide Gleichungen das gleiche Resultat, ein Beweis dafür, daß sich die drei zur Konstruktion benutzten Strahlen tatsächlich in einem Punkt schneiden. Es folgt dann durch einfache Rechnung

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}, \tag{24}$$

also dieselbe Gleichung wie für die Abbildung an gekrümmten Spiegeln. Ebenso wie dort folgt ferner

$$(g-f)\cdot(b-f) = f^2 \tag{25}$$

und für die lineare Vergrößerung

$$\gamma = \frac{B}{G} = \frac{b}{g}. \tag{26}$$

Analog zu der bei den gekrümmten Spiegeln getroffenen Festsetzung schreiben wir dem von einer Linse erzeugten Bilde eine positive Bildweite b zu, wenn es sich um ein reelles Bild handelt, das bei einer Linse auf der entgegengesetzten Seite liegt, wie der Gegenstand. Virtuelle Bilder liegen auf der gleichen Seite wie der Gegenstand und haben eine negative Bildentfernung.

Rückt der Gegenstand von außen her bis in den Brennpunkt, so verlaufen die von den einzelnen Punkten des Gegenstandes ausgehenden Strahlen hinter der Linse parallel. Rückt er noch näher an die Linse, so divergieren sie hinter der Linse, und ihre rückwärtigen Verlängerungen schneiden sich in einem Punkt auf der Gegenstandsseite der Linse. In diesem Fall entsteht also ein virtuelles Bild, und die Bildentfernung b wird negativ. Die Konstruktion des Bildes zeigt Abb. 387. Beachtet man, daß b jetzt eine negative Größe ist, so liest man aus Abb. 387 ab, daß

$$\frac{B}{G} = \frac{-b}{g} = \frac{-b+f}{f} = \frac{f}{f-g}\,.$$

Hieraus folgen auch für die virtuellen Bilder die Gl. 24 und 25. Bezeichnen wir jedoch den absoluten Betrag der Bildentfernung mit $|b|$, so ist $|b| = -b$, und es folgt

$$\frac{1}{g} - \frac{1}{|b|} = \frac{1}{f}\,. \tag{27}$$

Der Betrag der linearen Vergrößerung ergibt sich zu

$$\gamma = \frac{B}{G} = \frac{-b}{g} = \frac{|b|}{g}\,. \tag{28}$$

γ ist stets größer als 1. Die virtuellen Bilder an Sammellinsen sind daher stets vergrößert, außerdem sind sie stets aufrecht.

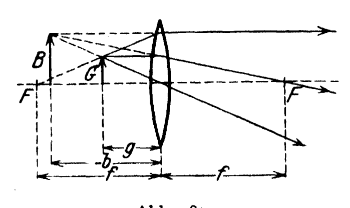


Abb. 387.
Virtuelle Bilder bei Sammellinsen.

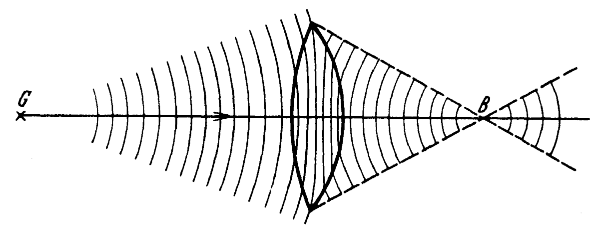


Abb. 388. Wirkung einer Sammellinse. (Nach J. PICHT.)

Die Wirkungsweise einer Sammellinse wird sehr anschaulich durch Abb. 388 dargestellt. Sie zeigt die von einem Punkt G auf der Achse ausgehenden Kugelwellen des von diesem Punkt aus auf die Linse divergierenden Lichtes. Nach dem Eintritt in die Linse wird ihre Geschwindigkeit geringer, nach dem Austritt wieder größer. Die durch die mittleren Teile der Linse gehenden Strahlen haben in ihr einen längeren Weg zurückzulegen als die randnahen Strahlen und erleiden deshalb eine größere Verzögerung als diese. Dadurch verwandeln sich die ursprünglich konzentrisch nach außen wachsenden Kugelwellen in solche, die konzentrisch auf einen Punkt B, das Bild von G, zusammenschrumpfen, um nach dem Durchgang durch diesen wieder zu wachsen. (Vgl. hierzu den Schluß von § 414.)

416. Zerstreuungslinsen. Für die Brechung in Zerstreuungslinsen gelten entsprechende Überlegungen wie für Sammellinsen. Gl. 22 (§ 414) ist, wie bereits erwähnt, unter Berücksichtigung des Vorzeichens der Krümmungsradien auch für Zerstreuungslinsen gültig. Parallel zur Achse einfallende Strahlen divergieren hinter der Linse und ihre rückwärtigen Verlängerungen schneiden sich in einem vor der Linse liegenden Punkte, den man wie bei den Sammellinsen als Brennpunkt bezeichnet. Im Brennpunkt wird also ein unendlich ferner, auf der Linsenachse gelegener Punkt virtuell abgebildet. Man schreibt daher, wie den virtuellen Bildern eine negative Bildentfernung, so einer Zerstreuungslinse eine negative Brennweite f zu.

Mit Hilfe der Brennpunkte und unter Benutzung des die Linsenmitte ungebrochen durchlaufenden Strahls lassen sich die Bilder bei den Zerstreuungs-

linsen analog zu denen bei Sammellinsen konstruieren. Unter Berücksichtigung der Vorzeichen von b und f liest man aus Abb. 389 die folgenden Proportionen ab:

$$\frac{B}{G} = \frac{-b}{g} = \frac{-f+b}{-f} = \frac{-f}{g-f}. \qquad (29)$$

Auch aus diesen Gleichungen folgen wieder die Gl. 24 und 25, welche demnach für jede Art von Abbildung für alle Linsentypen gültig sind. Führen wir jedoch die absoluten Beträge der Brennweite und Bildentfernung $|f| = -f$ und $|b| = -b$ in Gl. 29 ein, so folgt

$$\frac{1}{g} - \frac{1}{|b|} = -\frac{1}{|f|}. \qquad (30)$$

Für die Vergrößerung ergibt sich wieder

$$\gamma = \frac{B}{G} = \frac{-b}{g} = \frac{|b|}{g}. \qquad (31)$$

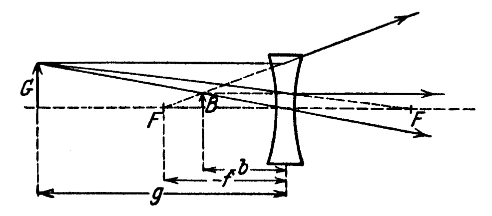


Abb. 389. Bilder bei Zerstreuungslinsen.

Die Bilder sind bei Konvexlinsen stets virtuell, aufrecht und verkleinert.

417. Diskussion der Linsenformel. Aus der allgemein gültigen Gl. 24 lassen sich folgende Gesetzmäßigkeiten ablesen.

Ist bei einer Sammellinse $g = \infty$, so wird $b = f$, d. h. das Bild liegt im Brennpunkt (Sonnenbild!). Ist $g = f$, so liegt das Bild in unendlicher Ferne ($b = \infty$). Für $g < f$ wird b negativ, es gibt ein virtuelles Bild. b wird gleich g, d. h. die Vergrößerung gleich 1, wenn $g = b = 2f$. Ist der Abstand $a = g + b$ zwischen Gegenstand und Bild fest gegeben, etwa dadurch, daß ein fest aufgestellter Gegenstand auf eine feste Wand abgebildet werden soll, so ergeben sich aus der Linsenformel zwei Wertepaare g_1, b_1 und g_2, b_2, derart, daß $b_2 = g_1$, $g_2 = b_1$. Es gibt also zwischen Schirm und Gegenstand zwei Linsenstellungen, bei denen scharfe Abbildung erfolgt. Sie liegen symmetrisch zur Mitte von a, und die eine gibt ein vergrößertes, die andere ein verkleinertes Bild. Ist $a = 4f$, so fallen beide Stellungen zusammen, Bild und Gegenstand sind einander an Größe gleich. Wird $a < 4f$, so ist eine reelle Abbildung nicht mehr möglich. Durch Messung von g und b kann man die Brennweite einer Sammellinse nach Gl. 24 bestimmen.

Wir fassen die Abbildungsverhältnisse bei Linsen und Hohlspiegeln noch einmal in der folgenden Tabelle zusammen, die die Abhängigkeit der Bildweite b und der Vergrößerung γ von der Gegenstandsweite g in ihren wesentlichen Zügen darstellt.

$$\text{Sammellinse und Konkavspiegel} \ldots\ldots \begin{cases} g = \infty \rightarrow \ f \ \rightarrow 0 \\ b = f \rightarrow \pm\infty \rightarrow -0 \\ \gamma = 0 \rightarrow \pm\infty \rightarrow -1 \end{cases}$$

$$\text{Zerstreuungslinse und Konvexspiegel} \ldots \begin{cases} g = \ \infty \rightarrow 0 \\ b = -f \rightarrow -0 \\ \gamma = -0 \rightarrow -1. \end{cases}$$

Abb. 390 stellt dies Verhalten graphisch dar, indem b als Funktion von g aufgetragen ist. Bei der Sammellinse ergeben sich die beiden Äste einer Hyperbel, deren Asymptoten die Geraden $g = +f$ und $b = +f$ sind. Der rechte Ast entspricht den reellen Bildern, der linke den virtuellen. Dieser hat jedoch nur für positive Werte von g physikalische Bedeutung, da g definitionsgemäß nur positiv sein kann. Auch bei der Zerstreuungslinse ergibt sich eine Hyperbel. Von dieser aber hat nur die Hälfte des rechten Astes, die zu den positiven Werten von g gehört, physikalische Bedeutung.

Die Brennweite einer Sammellinse und ebenso auch eines Hohlspiegels läßt sich aus b und g auf folgende Weise leicht graphisch ermitteln (Abb. 391). Man trage vom Punkt O aus g und b rechtwinklig zueinander ab, verbinde ihre Endpunkte durch eine Gerade, zeichne von O aus eine unter 45^0 gegen g und b verlaufende Gerade und fälle vom Schnittpunkt P der beiden gezeichneten Graden

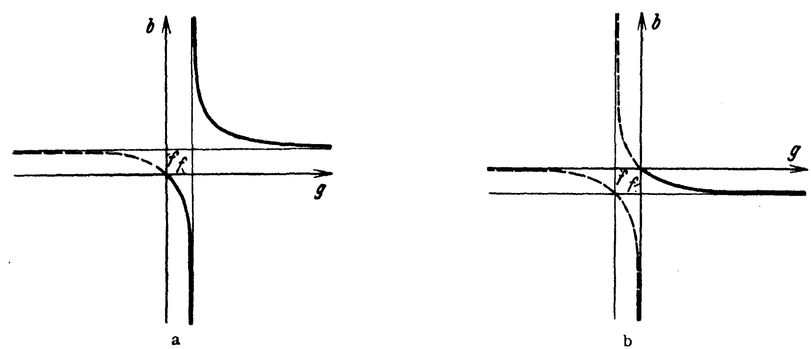


Abb. 390. Abbildungsverhältnisse a bei Sammellinsen (Konkavspiegeln), b bei Zerstreuungslinsen (Konvexspiegeln).

Lote auf b und g. Die Seiten des so entstehenden Quadrats haben die Länge f, Denn man liest aus der Abb. 391 ohne weiteres ab, daß $(g - f) : f = f : (b - f)$. was mit Gl. 25 identisch ist.

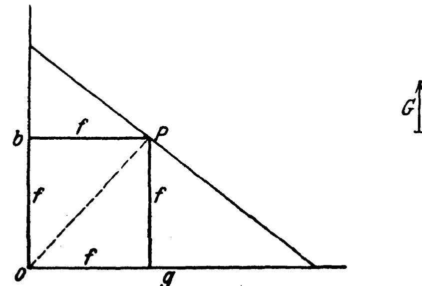


Abb. 391. Graphische Ermittelung von f aus b und g.

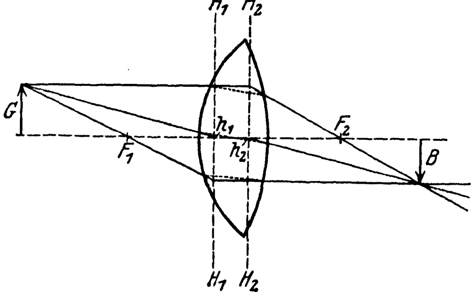


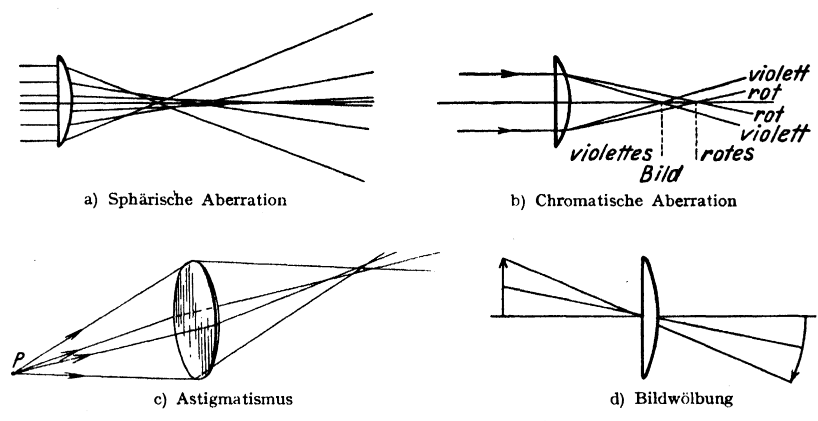
Abb. 392. Bildkonstruktion bei einer dicken Linse.

418. **Dicke Linsen.** Bei Linsen, deren Dicke man nicht, wie bisher vorausgesetzt, als sehr klein gegen die sonst vorkommenden Leardimensionen ansehen darf, sind die einfachen, im vorstehenden beschriebenen Bildkonstruktionen nicht mehr anwendbar. Es lassen sich aber bei einer solchen Linse stets zwei zur Linsenachse senkrechte Ebenen H_1 und H_2 (Abb. 392) angeben, die sog. Hauptebenen, deren Schnittpunkte h_1 und h_2 mit der Linsenachse die Hauptpunkte heißen, und welche in nachstehender Weise die Konstruktion der Bilder ermöglichen. Die Linse hat wieder zwei Brennpunkte F_1 und F_2, welche von den beiden Hauptpunkten den gleichen Abstand haben, $F_1 h_1 = F_2 h_2 = f$. Die Länge f ist die Brennweite der Linse. Die Bildkonstruktion erfolgt nunmehr wie aus der Abb. 392 ersichtlich. Ein zur Achse paralleler, von der Seite, auf der F_1 liegt, kommender Strahl wird bis zur Hauptebene H_2 geradlinig durchgezeichnet und verläuft von da ab nach F_2. Ein durch den Brennpunkt F_1 gehender Strahl wird geradlinig bis zur Hauptebene H_1 durchgeführt und von da ab parallel zur Achse weitergeführt. Ein auf den Hauptpunkt h_1 hinlaufender Strahl wird in gleicher Richtung, seitlich verschoben, durch den Hauptpunkt h_2 weitergeführt. Der wirkliche Strahlengang in der Linse ist punktiert angedeutet. Entsprechendes gilt für Zerstreuungslinsen.

Die Lage der Hauptebenen bei den verschiedenen Linsentypen ist in Abb. 384, § 413, eingezeichnet.

Die für die Abbildung durch Linsen abgeleiteten Gesetze gelten in gleicher Weise auch hier. Die bei dünnen Linsen gemachten Voraussetzungen kann man jetzt auch so formulieren, daß bei diesen der Abstand der beiden Hauptebenen voneinander so klein ist, daß man ihn vernachlässigen kann.

419. **Linsenfehler.** Einfache Linsen zeigen bei ihrer Anwendung eine Reihe von Fehlern, d. h. störende Abweichungen von den vorstehend abgeleiteten einfachen Gesetzmäßigkeiten, die ihren Grund erstens darin haben, daß die Linsen nicht unendlich dünn sind, bzw. nicht nur wirklich achsennahe Strahlen zur Verwendung kommen, und daß zweitens die verschiedenen Farben, aus denen weißes Licht besteht, verschieden stark gebrochen werden (Dispersion, § 432). Infolge der letzteren Erscheinung hat eine Linse für verschiedene Farben eine etwas verschiedene Brennweite (Gl. 1, § 466). Das wirkt sich hauptsächlich in folgenden Richtungen aus:



a) Sphärische Aberration

b) Chromatische Aberration

c) Astigmatismus

d) Bildwölbung

Abb. 393. Darstellung der wichtigsten Linsenfehler.

a) Sphärische Aberration. Die äußeren Linsenzonen haben eine kleinere Brennweite als die Linsenmitte. Von einem Bündel parallel zur Achse einfallender Strahlen schneiden sich die durch die äußeren Zonen der Linse tretenden in einem der Linse näheren Punkte, als die der Linsenachse nahe einfallenden Strahlen (Abb. 393a).

b) Chromatische Aberration. Der Brechungsindex des Glases ist für die verschiedenen Farben verschieden groß, für Rot am kleinsten, für Violett am größten. Daher schneiden sich die roten Anteile des von einem Gegenstand ausgehenden weißen Lichts in Punkten, die der Linse ferner liegen, als die Schnittpunkte der violetten Anteile (Abb. 393b).

c) Astigmatismus. Für außerhalb der Achse liegende Punkte des Gegenstandes ist die Brennweite der Linse in den verschiedenen durch die Linsenachse gehenden Ebenen verschieden groß (Abb. 393c, die Linse ist perspektivisch gezeichnet). Anastigmate sind Linsensysteme, bei denen dieser Fehler korrigiert ist. Astigmatismus macht sich bei photographischen Objektiven durch Unschärfe und Verzerrungen in den Bildecken bemerkbar.

d) Bildwölbung. Das Bild einer zur Linse parallelen, ebenen Fläche ist nicht eben, sondern gewölbt (Abb. 393d).

420. **Linsensysteme.** Die vorstehend geschilderten Linsenfehler kann man sehr weitgehend durch Kombination mehrerer Linsen aus Glas von verschiedenem

Brechungsindex (Kronglas, Flintglas, s. Tab. 30, § 409) beheben (sog. Anastigmate, Achromate usw.). Auch für ein solches System gelten die abgeleiteten Formeln. Zur Berechnung der Brennweite f eines solchen Linsensystems, das aus zwei Linsen von den Brennweiten f_1 und f_2 bestehe, denken wir uns einen leuchtenden Punkt G, der sich im Brennpunkt der einen der beiden Linsen befinde (Abb. 394). Man sieht ohne weiteres, daß er im Brennpunkt B der zweiten Linse abgebildet wird. Wendet man jetzt auf das System die Gl. 24, § 415, an, so folgt

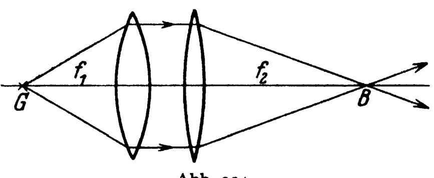


Abb. 394. Zur Ableitung der Brennweite eines Linsensystems.

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}, \qquad (32)$$

d. h. man erhält die Brechkraft $1/f$ eines Linsensystems durch Addition der Brechkräfte seiner Komponenten. Dabei ist die Brennweite einer Zerstreuungslinse negativ zu rechnen. Bei einem solchen Linsensystem können die beiden Hauptebenen auch beträchtlich außerhalb des Systems liegen. Abb. 395 zeigt einen besonders krassen Fall.

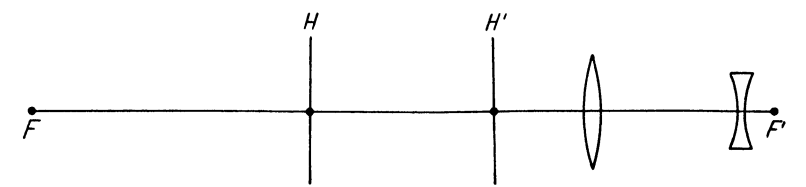


Abb. 395. Brennpunkte und Hauptebenen eines besonderen Linsensystems (Teleobjektiv).

421. Projektionsapparat. Photographische Kamera. Der Projektionsapparat besteht in seinen Hauptteilen aus einer starken Lichtquelle A (einer Bogenlampe oder einer hochkerzigen Metallfadenlampe geeigneter Konstruktion, d. h. mit kleiner leuchtender Fläche), dem Kondensor K, vor dem sich der zu projizierende Gegenstand G (Glasbild, Film usw.) befindet, und der Projektionslinse L (Objektiv, meist ein Linsensystem) (Abb. 396). Der Kondensor ist eine große Linse bzw. meist ein System aus zwei oder drei Linsen von ziemlich kleiner Brennweite, welche den Zweck hat, das von der Lichtquelle her durch das Glasbild fallende Licht so zu konzentrieren, daß es vollständig durch die Projektionslinse L hindurchgeht. Es ergeben sich daher zwei Bedingungen für die vorkommenden Brennweiten und Abstände. In der Regel wird man den Abstand l des Apparates (des Gegenstandes) von der Projektionswand sowie die verlangte Vergrößerung γ als gegeben anzusehen haben. Dann ist also dieser Abstand $l = g + b$ sowie $\gamma = b/g$ vorgeschrieben. Dann können b und g einzeln berechnet werden. Hieraus ergibt sich weiter aus der Linsenformel (Gl. 24, § 415) die notwendige Brennweite f_1 der Projektionslinse. Damit das Licht vollständig durch die Projektionslinse hindurchgeht, müssen sich die von der Lichtquelle durch den Kondensor tretenden Strahlen in der Linse schneiden, d. h. die Lichtquelle muß in der Linse abgebildet werden. Ist a der Abstand der Lichtquelle vom Kondensor, g die schon festgelegte Entfernung zwischen Glasbild (Kondensor) und Pro-

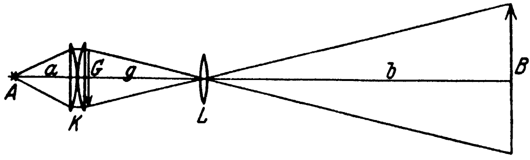


Abb. 396. Projektionsapparat.

jektionslinse, so folgt die für den Kondensor notwendige Brennweite f_2 aus der Linsenformel $1/a + 1/g = 1/f_2$. Hiernach kann man je nach den gegebenen Bedingungen die notwendigen Brennweiten berechnen.

Die photographische Kamera dient bekanntlich dazu, die von einer Linse entworfenen Bilder von Gegenständen festzuhalten und ihre Vervielfältigung zu ermöglichen. Zu diesem Zwecke wird mittels eines Linsensystems (Objektiv) auf einer photographischen Platte oder einem Film ein Bild der wiederzugebenden Gegenstände entworfen, welches durch die chemischen Wirkungen des Lichts (§ 510) in der diese Platte bedeckenden Bromsilberemulsion und eine nachfolgende Behandlung (Entwicklung) als sog. Negativ sichtbar gemacht wird. Mit Hilfe dieses Negativs kann das Bild beliebig oft vervielfältigt werden. Im übrigen darf die Konstruktion und Verwendungsart der Kamera hier als bekannt vorausgesetzt werden.

Die photographische Kamera ist der Lochkamera (§ 398) durch ihre bedeutend größere „Lichtstärke" beträchtlich überlegen. Denn die Lichtmenge, welche bei ihr von einem Punkt des Gegenstandes in einen Punkt des Bildes gelangt, ist der Öffnung der Linse proportional, bei der Lochkamera jedoch nur der sehr kleinen Öffnung des Loches.

422. **Allgemeines über Vergrößerung bei Lupe, Mikroskop und Fernrohr.** Bei einem von einer Linse auf eine Wand entworfenen Bilde ist es ohne weiteres klar, was man unter Vergrößerung versteht, nämlich das unmittelbar feststellbare Verhältnis der linearen Dimensionen von Bild und Gegenstand. Wird ein Glasbild von der Größe 9×12 auf der Projektionswand in der Größe 270×360 abgebildet, so haben wir eine 30fache lineare Vergrößerung.

Bei den im folgenden zu besprechenden optischen Instrumenten, Lupe, Fernrohr und Mikroskop, betrachtet das Auge ein virtuelles Bild des Gegenstandes. Dieses kann gegenüber dem Gegenstande vergrößert oder verkleinert sein. Bei Lupe und Mikroskop ist es größer, beim Fernrohr kleiner als dieser. Der Zweck dieser Instrumente ist an sich gar nicht die Erzeugung eines Bildes von veränderten Dimensionen, sondern die Verdeutlichung der Struktur oder der Umrisse von Gegenständen, welche ohne diese Instrumente der Auflösung durch unser Auge nicht mehr zugänglich sind. Entweder sind wir nicht in der Lage, uns ihnen so weit zu nähern, daß wir diese Struktur deutlich sehen; dann bedienen wir uns des Fernrohrs. Oder es genügt auch die größtmögliche Annäherung an das Auge (Nahepunkt etwa 15 cm, § 428) nicht, um eine Auflösung zu bewirken; dann benutzen wir eine Lupe oder ein Mikroskop. Um das Problem auf einen möglichst einfachen Fall zurückzuführen, betrachten wir zwei nahe benachbarte Punkte, die sich in einem gewissen Abstande vom Auge befinden. Die Augenlinse entwirft von ihnen ein Bild auf der Netzhaut, auf der die beiden Punktbilder sehr dicht beieinanderliegen. Diese werden vom Auge nur dann als zwei getrennte Erscheinungen wahrgenommen, wenn sie nicht auf das gleiche lichtempfindliche Organ (Zäpfchen oder Stäbchen, § 430) der Netzhaut fallen. Damit das nicht der Fall ist, dürfen die beiden Punkte, vom Auge aus gesehen, keinen kleineren Winkelabstand als etwa $1'$ haben. Dies entspricht bei einer Entfernung von 100 m etwa einem Punktabstand von 3,3 cm. Wir können also eine Struktur dadurch deutlicher machen, daß wir den Winkel vergrößern, unter dem wir die einzelnen Elemente der Struktur bzw. den ganzen Gegenstand sehen. Das natürliche Maß für die Vergrößerung dieser optischen Instrumente ist daher das Verhältnis des Winkels β, unter dem wir mit ihrer Hilfe das virtuelle Bild eines Gegenstandes sehen, zu dem Winkel α, unter dem wir den Gegenstand selbst bei unmittelbarer Betrachtung mit bloßem Auge tatsächlich sehen (Fernrohr) oder unter den günstigsten Umständen sehen könnten

(Lupe, Mikroskop). Zum Unterschied von der linearen Vergrößerung γ wollen wir die Vergrößerung des Gesichtswinkels mit v bezeichnen, also $v = \beta/\alpha$. Bei den folgenden Rechnungen können wir die Winkel α und β stets als sehr klein annehmen, so daß wir setzen dürfen $\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$ und $\sin\beta \approx \operatorname{tg}\beta \approx \beta$ (§ 8).

423. Die Lupe. Eine Lupe ist eine Sammellinse von ziemlich kleiner Brennweite f, welche zur Vergrößerung von Gegenständen benutzt wird, indem man das von ihr erzeugte virtuelle Bild betrachtet (§ 415). Man bringt also den zu betrachtenden Gegenstand G so unter die Lupe, daß er innerhalb der Brennweite f liegt (Abb. 397). Das Auge wird bei der Betrachtung am wenigsten angestrengt, wenn das Bild etwa in der deutlichen Sehweite liegt, die beim normalen oder richtig korrigierten Auge etwa bei $s = 25$ cm liegt. Zur Berechnung der Vergrößerung muß man die Frage stellen, wie sich der Winkel α, unter dem man den Gegenstand mit bloßem Auge in der Entfernung s sehen würde, zu dem Winkel β bei Anwendung der Lupe verhält. Im ersten Falle wäre $\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha = G/s$. Bei Betrachtung durch die Lupe ist der Winkel gegeben durch $\operatorname{tg}\beta \approx \beta = B/s$. Es ist also die Vergrößerung $v = \beta/\alpha = B/G$. Nun ist nach § 415 $B/G = -b/g$. Da man das Auge dicht an die Lupe bringt, so ist sehr nahezu $|b| = -b = s$, also $v = s/g$. Unter Hinzunahme der Gl. 27, § 415, $1/g - 1/|b| = 1/g - 1/s = 1/f$, folgt schließlich

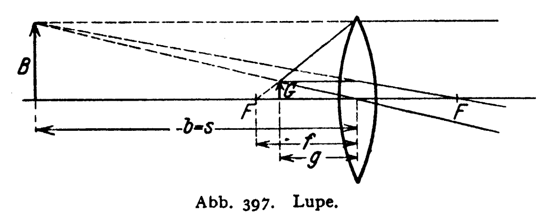


Abb. 397. Lupe.

$$v = 1 + \frac{s}{f}. \tag{33}$$

Dieser Ausdruck ist nahezu gleich s/f, da meist die Brennweite f klein ist gegen die deutliche Sehweite s. Daher ist auch g nur sehr wenig kleiner als f.

Die gleichen Überlegungen gelten auch, wenn G nicht ein wirklicher Gegenstand, sondern das reelle Bild eines Gegenstandes ist. Auch ein solches kann man mit einer Lupe vergrößert betrachten, natürlich nur innerhalb des meist kleinen räumlichen Winkels, in dem die von ihm ausgehenden Strahlen divergieren. Dies ist der Fall bei den Okularen der meisten optischen Instrumente. Diese sind nichts anderes als Lupen.

Bessere Lupen, insbesondere Okulare, bestehen nicht aus einer einfachen Linse, sondern aus einem Linsensystem.

424. Systeme mit Objektiv und Okular. Das astronomische Fernrohr und das Mikroskop stimmen darin überein, daß sie aus zwei Sammellinsen bzw. Linsensystemen zusammengesetzt sind, dem Objektiv und dem Okular

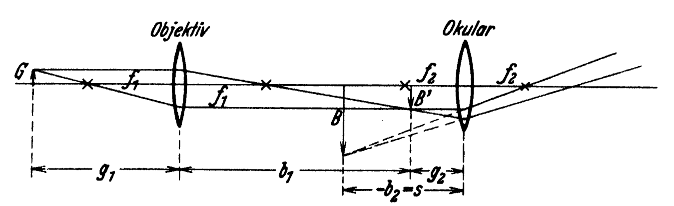


Abb. 398. System mit Objektiv und Okular.

(Abb. 398). Das Objektiv entwirft ein umgekehrtes reelles Bild des zu betrachtenden Gegenstandes ein klein wenig innerhalb der Brennebene des Okulars, und dieses Bild wird durch das als Lupe wirkende Okular betrachtet. Das Auge sieht

also ein umgekehrtes virtuelles Bild dieses ersten, reellen Bildes. Wir wollen hier zunächst für die besonderen Verhältnisse, die beim Fernrohr und beim Mikroskop vorliegen, eine gemeinsame Basis schaffen, indem wir ganz allgemein die von einem solchen aus zwei Sammellinsen (oder Linsensystemen) von den Brennweiten f_1 (Objektiv) und f_2 (Okular) erzeugte lineare Vergrößerung γ berechnen. Es sei G die Gegenstandsgröße, B' die Größe des vom Objektiv entworfenen reellen Bildes, B die Größe des vom Okular erzeugten virtuellen Bildes. Es seien ferner g_1 und b_1 bzw. g_2 und b_2 Gegenstands- und Bildentfernung beim Objektiv bzw. Okular, wobei der durch das Okular abgebildete „Gegenstand" das vom Objektiv entworfene reelle Bild ist. b_2 ist, da es sich um ein virtuelles Bild handelt, negativ. Dann ist nach § 415 $B/B' = -b_2/g_2$ und $B'/G = b_1/g_1$, also die gesamte lineare Vergrößerung

$$\gamma = \frac{B}{G} = \frac{B}{B'} \cdot \frac{B'}{G} = \frac{b_1}{g_1} \cdot \frac{-b_2}{g_2} = \gamma_1 \gamma_2 . \tag{34}$$

Ferner ist nach § 415

$$b/g = f/(g-f) \qquad \text{oder} \qquad b/g = (b-f)/f .$$

Wir betrachten zunächst die Okularvergrößerung. Bezüglich dieser besteht beim Fernrohr und Mikroskop kein prinzipieller Unterschied. Wie schon bei der Lupe erwähnt, wird das virtuelle Bild in der deutlichen Sehweite $s = -b_2$ $=$ etwa 25 cm erzeugt, und wir erhalten für den Anteil des Okulars an der linearen Vergrößerung aus der zweiten der vorstehenden Gleichungen $-b_2/g_2 = (s - f_2)/f_2$. Da stets s groß gegen f_2 ist, begnügt man sich meist mit der Näherung $-b_2/g_2$ $= s/f_2$. Demnach erhalten wir, je nachdem wir für das Objektiv die eine oder die andere der beiden obigen Gleichungen für b/g wählen,

$$\gamma = \frac{B}{G} = \frac{f_1}{g_1 - f_1} \cdot \frac{s}{f_2} \tag{35a}$$

oder

$$\gamma = \frac{B}{G} = \frac{b_1 - f_1}{f_1} \cdot \frac{s}{f_2} . \tag{35b}$$

Der prinzipielle Unterschied zwischen dem astronomischen Fernrohr und dem Mikroskop besteht nun darin, daß bei ersterem $g_1 \gg f_1$, bei letzterem $b_1 \gg f_1$ ist, so daß für jenes zweckmäßig Gl. 35a, für dieses Gl. 35b benutzt wird.

425. **Das Fernrohr.** Der Strahlengang in einem astronomischen Fernrohr ist in Abb. 399 dargestellt. Da der Gegenstand sehr weit entfernt ist, ist er selbst nicht gezeichnet, sondern nur die Strahlen P und P', die von den Enden des als Pfeil gedachten Gegenstandes herkommen. Nun ist $\operatorname{tg}\alpha/2 = G/g_1$, $\operatorname{tg}\beta/2 = B/(-b_2)$.

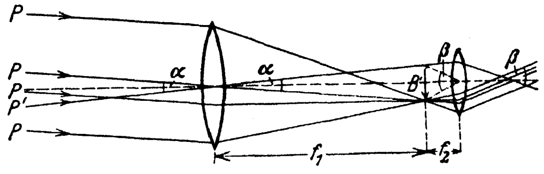


Abb. 399. Astronomisches Fernrohr.

Da die Winkel sehr klein sind, können wir die tg durch die Winkel ersetzen und erhalten für die Vergrößerung

$$v = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{B}{G} \cdot \frac{g_1}{-b_2} .$$

Nunmehr wenden wir die Gl. 35a an und vernachlässigen im Nenner f_1 gegen die sehr große Gegenstandsentfernung g_1. Ferner setzen wir wieder $b_2 = -s$. Dann ergibt sich

$$v = \frac{f_1}{f_2} . \tag{36}$$

Beim astronomischen Fernrohr ist also die Vergrößerung um so stärker, je größer die Brennweite des Objektivs und je kleiner die Brennweite des Okulars ist.

Diese Überlegung trifft auf die Betrachtung der Sonne, des Mondes, der Planeten oder irdischer (allerdings umgekehrt erscheinender) Objekte ohne weiteres zu. Bei der Betrachtung von Fixsternen handelt es sich dagegen, gar nicht um eine Vergrößerung, sondern lediglich um eine Erhöhung der scheinbaren Helligkeit. Bei der großen Entfernung der Fixsterne genügen nämlich selbst die stärksten Fernrohre nicht entfernt, um den Winkel, unter dem sie gesehen werden, auch nur annähernd gleich 1′ zu machen (§ 422). Sie erscheinen daher auch bei stärkster Vergrößerung nur als Lichtpunkte oder richtiger als kleine Beugungsscheibchen. Die Wirkung des Fernrohrs besteht vielmehr in diesem Falle darin, daß das breite Bündel paralleler Strahlen, das, von einem fernen Stern kommend, in die große Öffnung des Okulars eintritt, durch die Wirkung von Okjektiv und Okular zu einem schmalen Bündel von der Weite der Augenpupille zusammengedrängt wird (Abb. 400). Daher besteht die Wirkung in einer Vermehrung der Helligkeit eines Fixsterns im Verhältnis der Fläche (Öffnung) des Objektivs zu der des Okulars bzw. der Augenpupille. Auf diese Weise können mit stärksten Fernrohren noch Sterne etwa der 18. Größe gesehen werden, während das bloße Auge im besten Falle noch Sterne 5.—6. Größe sehen kann. Das entspricht aber einem Verhältnis der Lichtstärken von 1 : 10000.

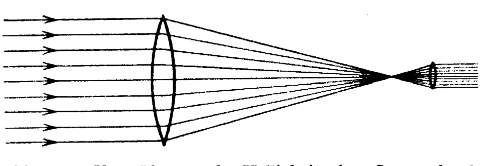


Abb. 400. Vergrößerung der Helligkeit eines Sterns durch das astronomische Fernrohr.

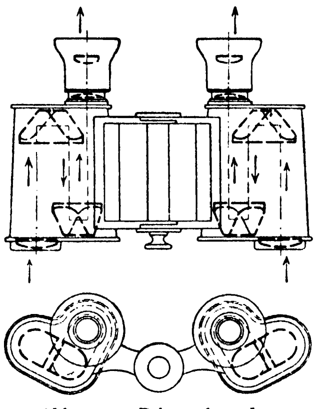


Abb. 401. Prismenfernrohr.

Das einfache astronomische Fernrohr ist für den Gebrauch an irdischen Gegenständen im allgemeinen nicht geeignet, weil es umgekehrte Bilder liefert, was für die Astronomie gleichgültig ist. Diesen Übelstand vermeidet bei grundsätzlich gleichem Prinzip das Prismenfernrohr. Bei diesem läuft das Licht zwischen Objektiv und Okular in der aus Abb. 401 ersichtlichen Weise über zwei totalreflektierende Prismen, von denen das eine, welches den Strahl in vertikaler Richtung verschiebt, eine Umkehrung des Bildes bewirkt (Umkehrprisma). Das andere Prisma dient dazu, die Umkehrung der Fortschreitungsrichtung des Lichts durch das andere zu kompensieren. Das erste Prisma bewirkt aber ferner, daß der Strahlengang seitlich verschoben wird. Das Prismenfernrohr wird fast stets beidäugig benutzt, und man gewinnt durch die seitliche Verschiebung des Strahlenganges den Vorteil, daß der Abstand der beiden Objektive größer ist als der Augenabstand (Okularabstand). Dies aber bringt eine erhebliche Verstärkung des räumlichen Eindrucks des Gesehenen mit sich (§ 431), das Bild erscheint plastischer, d. h. es tritt eine bessere Darstellung der Tiefenverhältnisse ein als bei Verwendung von Instrumenten, bei denen der Abstand der beiden Objektive gleich dem Augenabstand ist (Opernglas).

Andere Maßnahmen zur Umkehrung des Bildes beruhen auf der Verwendung eines aus zwei Linsen bestehenden Okulars, von denen die eine vom reellen Bilde ein zweites reelles und nunmehr aufrechtes Bild erzeugt, das durch die zweite Linse als

Lupe betrachtet wird (terrestrisches Fernrohr). Beim GALILEIschen Fernrohr (Operngias) kommt ein reelles Bild gar nicht erst zustande, sondern es befindet sich als Okular eine Konkavlinse innerhalb der Brennweite des Objektivs, durch welche in der aus Abb. 402 ersichtlichen Weise ein virtuelles Bild des Gegenstandes entsteht. Das Okular des GALILEI schen Fernrohrs ist also keine Lupe. Demnach gilt auch hier die Gl. 36 nicht.

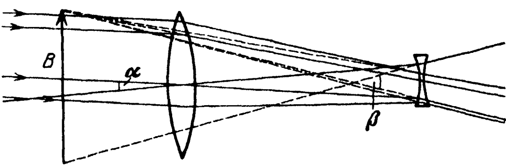


Abb. 402. GALILEIsches Fernrohr.

Bei denjenigen Fernrohrtypen, bei denen das Okular eine Lupe ist, also ein reelles Bild betrachtet wird, bringt man zur sauberen Begrenzung des Gesichtsfeldes im Rohr eine meist kreisförmige Blende an (§ 427), die gleichzeitig mit dem Bilde scharf gesehen wird. Beim GALILEIschen Fernrohr ist dies nicht möglich. Es hat daher kein scharf umgrenztes Gesichtsfeld.

Neuerdings werden im steigenden Maße wieder große astronomische Fernrohre gebaut, deren Objektiv keine Linse, sondern ein Hohlspiegel ist. Sie haben vor allem den Vorzug, daß durch das Objektiv keine Farbenzerstreuung und keine Absorption im Ultraviolett hervorgerufen wird. Eine der Konstruktionen eines solchen Spiegelteleskops zeigt Abb. 403. Das Licht, welches von einem Stern herkommt, wird von dem Hohlspiegel S_1 auf den Planspiegel S_2 geworfen und gelangt von da in das seitlich angebrachte Okular.

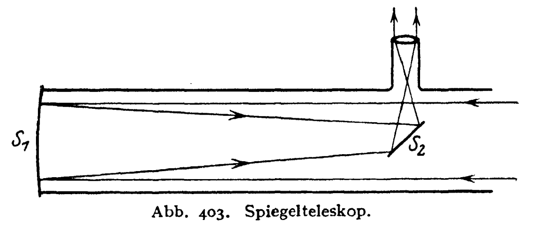


Abb. 403. Spiegelteleskop.

426. Das Mikroskop. Das Mikroskop dient zur Sichtbarmachung sehr kleiner Gegenstände bzw. sehr feiner Strukturen. Es besteht aus einem Objektiv von sehr kleiner Brennweite und einem als Lupe wirkenden Okular. Der Gegenstand G wird in einer die Brennweite f_1 des Objektivs nur wenig überschreitenden Entfernung g von diesem angebracht (Abb. 404). Der größeren Deutlichkeit halber ist das Verhältnis der Brennweiten von Objektiv und Okular nicht so gezeichnet, wie es in Wirklichkeit ist. Tatsächlich ist die Vergrößerung durch das Objektiv viel stärker als die weitere durch das Okular.

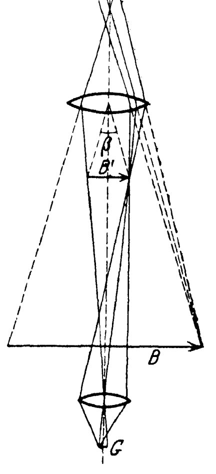


Abb. 404. Mikroskop.

Die Vergrößerung des Mikroskops ist nach einem anderen Gesichtspunkt zu beurteilen als diejenige beim Fernrohr. Da man ja den Gegenstand zur Betrachtung mit unbewaffnetem Auge in die deutliche Sehweite bringen würde, so vergleicht man den Gesichtswinkel β, unter dem sein virtuelles Bild im Mikroskop in der deutlichen Sehweite erscheint, mit dem Winkel α, unter dem er bei direkter Betrachtung in gleicher Entfernung erscheinen würde. Diese Winkel ergeben sich aus $\operatorname{tg}\alpha/2 = G/s$ und $\operatorname{tg}\beta/2 = B/s$, so daß, da wieder α und β sehr klein sind,

$$v = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{B}{G}.$$

Die Vergrößerung des Mikroskops ist also unmittelbar gleich seiner linearen Vergrößerung γ. Wir wenden nunmehr die Gl. 35b an und vernachlässigen im Zähler die sehr kleine Brennweite f_1 gegenüber der Bildentfernung b_1, die nahezu gleich

der Tubuslänge l des Mikroskops ist. Wir erhalten dann für den Betrag der Vergrößerung

$$v = \frac{l s}{f_1 f_2}. \quad (37)$$

Die Objektive und Okulare der Mikroskope sind zwecks Vermeidung der Linsenfehler stets Systeme aus mehreren Linsen. Abb. 405 zeigt ein Beispiel eines Objektivs.

Die strenge Theorie des Mikroskops erfordert eine Berücksichtigung der Beugung (§ 445 ff.). Wie HELMHOLTZ und ABBE gezeigt haben, ist der kleinste Abstand zweier Punkte, die man bei stärkster Vergrößerung im Mikroskop noch getrennt sehen kann, gleich $\delta = \lambda / n \sin \omega$. Hierin bedeutet ω den halben Öffnungswinkel des Kegels von Strahlen, die von einem Punkt des Gegenstandes in das Objektiv gelangen, n den Brechungsindex der Substanz, welche den Raum zwischen Gegenstand und Objektiv ausfüllt, λ die Wellenlänge des benutzten Lichts. Die Größe $n \sin \omega$ heißt die numerische Apertur des Objektivs. Befindet sich also zwischen Gegenstand und Objektiv nicht Luft, sondern ein Stoff von größerem Brechungsindex n, so wird dadurch die numerische Apertur vergrößert, also der noch auflösbare Abstand δ verkleinert. Nach ABBE benutzt man als sog. Immersionsflüssigkeit Zedernholzöl, dessen Brechungsindex gleich dem des Objektivmaterials ist (homogene Immersion). Man erreicht dann eine numerische Apertur bis zu 1,4, bei Verwendung von Monobromnaphthalin sogar bis zu 1,6. Man kann also mit dem Mikroskop noch Strukturen auflösen, die von der Größenordnung der Wellenlänge des sichtbaren Lichts — rund $5 \cdot 10^{-5}$ cm — sind. Auch durch Anwendung kleinerer Wellenlängen λ, d. h. von ultraviolettem Licht (§ 469), kann man δ verkleinern. Doch ist man dann, da das Auge diese Strahlen nicht sieht, auf photographische Aufnahmen angewiesen. Ferner muß eine Optik aus Quarz und anderen für ultraviolettes Licht durchlässigen Stoffen verwendet werden. (Über das Ultramikroskop s. § 449.)

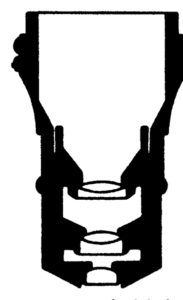


Abb. 405. Beispiel eines Mikroskop-Objektivs.

427. Blenden, Fadenkreuze, Okularmikrometer. Sieht man mittels des Okulars eines optischen Instruments das vom Objektiv erzeugte reelle Bild scharf, so kann man gleichzeitig wirkliche Gegenstände scharf sehen, welche sich in der gleichen Entfernung vom Okular befinden. So bringt man, wie schon erwähnt, am Orte des reellen Bildes stets eine Blende an, d. h. eine kreisrunde Öffnung, durch welche das Gesichtsfeld sauber und scharf begrenzt wird. Viele optische Instrumente besitzen am Ort des reellen Bildes eine Vorrichtung, welche es ermöglicht, einen Punkt des Bildes genau in die Achse des Instruments einzustellen. Meist dient dazu ein Fadenkreuz aus zwei senkrecht zueinander am Ort des Bildes ausgespannten feinen Fäden oder auch aus zwei zueinander senkrechte Ritzen auf einer in der Bildebene befindlichen planparallelen Glasplatte. Bei Mikroskopen kann man am Bildort eine feine, auf Glas geritzte Teilung anbringen (Okularmikrometer), welche mit dem Bilde gleichzeitig scharf und mit ihm in gleicher Ebene liegend gesehen wird. Man eicht die Teilung, indem man eine zweite Teilung von bekanntem Strichabstand (Objektmikrometer) vor das Objektiv bringt und feststellt, wie viele Teilstriche der Okularskala mit einem Teilstrich der andern Skala im Bilde zusammenfallen. Man kann dann mittels der Okularskala die Größe von unter dem Mikroskop befindlichen Gegenständen messen.

428. Das Auge. Der Bau des menschlichen Auges ist in seinen Hauptzügen in Abb. 406 dargestellt. Der nahezu kugelförmige Augapfel besitzt zum Eintritt des Lichts vorn die Hornhaut H, hinter der die mit einer Flüssigkeit

gefüllte vordere Augenkammer *Kw* liegt. Es folgt die Regenbogenhaut oder Iris mit der Pupille und die Kristalllinse *L*. Der Hauptteil des Auges ist mit dem gallertartigen Glaskörper *G* erfüllt. Die Wandung des Augapfels ist sehr kompliziert gebaut. Sie ist auf ihrer Innenseite von der Netzhaut *N* bedeckt, welche lichtempfindliche Organe enthält, die durch den Sehnerv mit dem Sehzentrum im Gehirn in Verbindung stehen. Außen liegt die Sehnenhaut *S*.

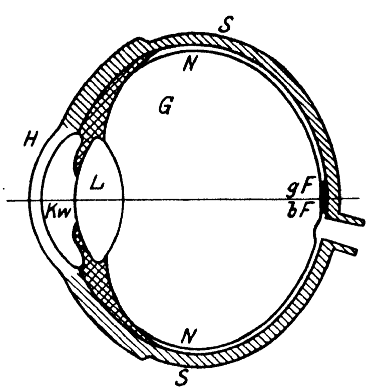


Abb. 406. Querschnitt durch das menschliche Auge.

Die Augenlinse entwirft bei richtiger Einstellung ein reelles, verkleinertes, umgekehrtes Bild der betrachteten Umwelt auf die Netzhaut. In der Achse der Augenlinse liegt die Zentralgrube (fovea centralis) oder der gelbe Fleck *gF*, der bei Tage empfindlichste Teil der Netzhaut, auf den wir beim Sehen das Bild desjenigen Punktes der Umgebung fallen lassen, welchen wir genau sehen (fixieren) wollen.

Das Auge hat eine gewisse Ähnlichkeit mit der gewöhnlichen photographischen Kamera. Es unterscheidet sich aber z. B. dadurch von ihr, daß die Augenlinse nicht, wie die Linse der Kamera, zwecks Einstellung der richtigen Bildweite verschiebbar ist, sondern die Bildweite ist durch den Bau des Auges gegeben. Um daher trotz ständig wechselnder Gegenstandsentfernung stets scharfe Bilder zu erzielen, muß die Brennweite der Augenlinse veränderlich sein. Da ihr Brechungsindex n unveränderlich ist, kann das nur durch Änderung ihrer Krümmung geschehen. Die Linse ist daher mit einem Muskel, dem Ziliarmuskel, versehen, der ihre Krümmung zu ändern gestattet. Bei entspanntem Muskel ist ein normalsichtiges Auge auf unendlich eingestellt, sieht also ferne Gegenstände scharf. Zur Betrachtung naher Gegenstände muß der Muskel die Augenlinse krümmen. Man nennt diesen Vorgang Akkommodation. Er geschieht unbewußt. Bei normalen Augen bezeichnet man eine Entfernung von 25 cm als die deutliche Sehweite, da ein normales Auge etwa in dieser Entfernung kleinere Gegenstände (Schrift u. dgl.) bereits gut sehen kann, ohne stark akkommodieren zu müssen. Auf weniger als etwa 15 cm Abstand (Nahepunkt) kann ein normales Auge nicht akkommodieren. Ein kurzsichtiges Auge vermag dagegen noch näher gelegene Gegenstände scharf zu sehen. Da die Gegenstände dann wegen ihrer kleineren Entfernung größer und daher deutlicher erscheinen, so bringt das Übel der Kurzsichtigkeit in diesem Falle einen Vorteil mit sich.

Die Iris dient dazu, die Menge des in das Auge gelangenden Lichts zu regeln. Die Pupille bildet eine Blende, die sich von selbst mehr oder weniger öffnet, je nach der herrschenden Helligkeit.

An der Eintrittsstelle des Sehnerven *bF* fehlen auf der Netzhaut die lichtempfindlichen Organe. Das Auge ist an dieser Stelle blind. Der blinde Fleck liegt im Bereich des Gesichtsfeldes, aber der Ausfall an dieser Stelle wird uns einerseits aus Gewöhnung, dann aber auch deshalb nicht bewußt, weil er in den beiden Augen an verschiedenen Stellen des Gesichtsfeldes liegt. Man kann den blinden Fleck mittels der Abb. 407 erkennen. Fixiert man den Stern bei geschlossenem linken Auge mit dem rechten Auge, so ist bei kleinem Abstand vom Auge der schwarze Kreis deutlich zu sehen. Entfernt man das Bild weiter, so verschwindet der Kreis, weil sein Bild auf den blinden Fleck fällt, um bei noch größerem Abstand wieder zu erscheinen.

Die Tatsache, daß uns die Außenwelt, trotz der Umkehrung des Bildes im Auge, aufrecht erscheint, enthält nichts Verwunderliches. Die Zuordnung der Lichteindrücke zu den räumlichen Gebilden hat mit der Stellung des Bildes im

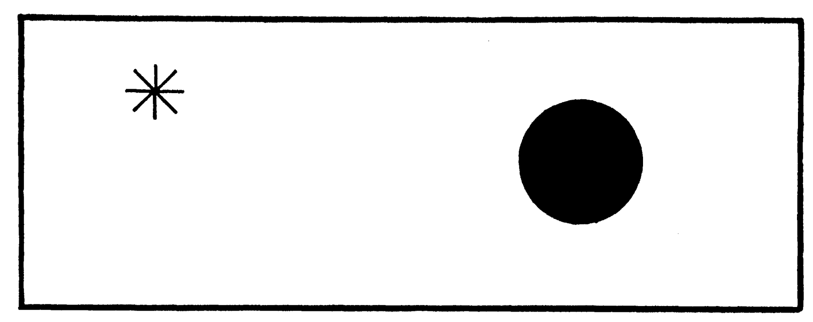


Abb. 407. Zur Demonstration des blinden Flecks.

Auge nichts zu tun, sondern ist als das Ergebnis einer in der allerersten Lebenszeit durch gleichzeitiges Tasten und Sehen erworbenen Erfahrung anzusehen. Ein Forscher hat den Versuch gemacht, längere Zeit vor den Augen Umkehrprismen zu tragen, welche das Netzhautbild umkehren, und hat nach einer Zeit der Gewöhnung mit den Prismen aufrecht gesehen. Es ist dies keine physikalische, sondern eine psychologische Angelegenheit.

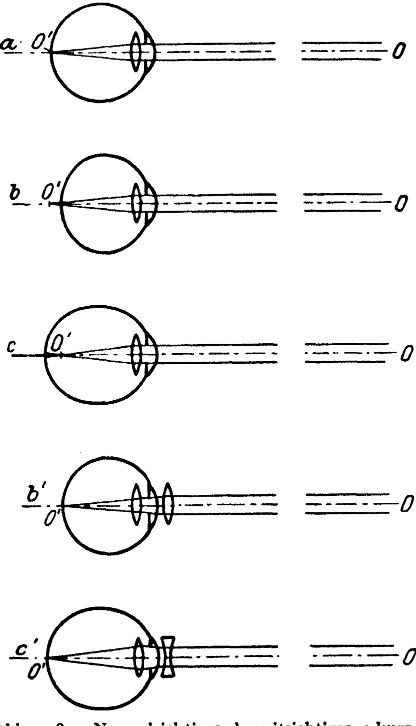


Abb. 408. a Normalsichtiges, b weitsichtiges, c kurzsichtiges Auge; b' korrigiertes weitsichtiges, c' korrigiertes kurzsichtiges Auge.

429. Augenfehler. Brillen. Bei kurzsichtigen Augen fällt das von der entspannten Augenlinse entworfene Bild v o r die Netzhaut, ferne Gegenstände können also nicht scharf gesehen werden. Der Nahepunkt und die deutliche Sehweite liegen dem Auge näher, als 15 cm bzw. 25 cm. Die Linse hat also eine zu kleine Brennweite. Man korrigiert diesen Augenfehler durch eine Brille mit Zerstreuungslinsen, deren negative Krümmung die Wirkung der zu großen positiven Krümmung der Linse aufhebt (Abb. 408c und c').

Bei weitsichtigen Augen würde das von der entspannten Augenlinse entworfene Bild h i n t e r die Netzhaut fallen, die Linse hat also eine im Verhältnis zur Tiefe des Auges zu große Brennweite, und zum scharfen Sehen ferner Gegenstände ist eine Akkommodation notwendig, die das Auge fortgesetzt anstrengt. Der Nahepunkt und die deutliche Sehweite liegen weiter ab als 15 cm bzw. 25 cm. Gewöhnliche Schrift muß zum bequemen Lesen weiter ab vom Auge gehalten werden und ist dann wegen der geringeren Bildgröße schwerer zu erkennen. Das Auge wird also beim Sehen ermüdet. Dieser Fehler wird durch eine Brille mit Sammellinsen korrigiert, die der Augenlinse das an Krümmung ersetzt, was ihr fehlt (Abb. 408b und b').

Anatomisch liegt der Fehler kurz- und weitsichtiger Augen meist nicht in einer anormalen Brennweite der Augenlinse, sondern in einer anormalen Länge (Kurzsichtigkeit) oder Kürze (Weitsichtigkeit) der Augenachse.

Astigmatische Augen sind solche, bei denen entweder die an der Abbildung auch beteiligte gewölbte Hornhaut oder die Augenlinse nicht genau sphärisch ist. Solche Augen können z. B. von einem System von zueinander senkrechten Strichen nur die der einen Richtung liegenden gleichzeitig scharf sehen. Dieser Augenfehler kann ebenfalls durch geeignet geschliffene Linsen korrigiert werden.

430. **Farbensehen, Sehen im Hellen und im Dunkeln.** Auf der Netzhaut befinden sich zwei Arten von lichtempfindlichen Organen, die Zäpfchen und die Stäbchen. Erstere dienen zum Sehen bei hellem Licht, letztere zum Sehen im Dunkeln, d. h. bei sehr schwacher Beleuchtung. Die Zäpfchen sind nicht nur überhaupt lichtempfindlich, sondern vermitteln auch die Farbeneindrücke. Näheres über Farbensehen s. § 478. Die Stäbchen sind außerordentlich viel lichtempfindlicher als die Zäpfchen, aber sie sind nicht farbentüchtig.

Das Licht bewirkt in den Zäpfchen und Stäbchen eine chemische Umwandlung des in ihnen enthaltenen Sehpurpurs. Die Produkte dieser Umwandlung wirken auf die in dem Zäpfchen und Stäbchen endigenden Nervenfasern und bewirken durch deren Vermittlung die Aufnahme und damit das Bewußtwerden des Lichteindrucks im Gehirn. Bei sehr starker Lichteinwirkung wird der Sehpurpur schneller verbraucht, als er neu gebildet werden kann, so daß die betroffene Netzhautstelle zeitweilig wenig oder gar nicht mehr lichtempfindlich ist. Dies ist die Ursache für die Blendung durch zu grelles Licht und für die Nachbilder, z. B. nach direktem Betrachten der Sonne oder heller Lampen.

Bei Tageslicht sind die sehr empfindlichen Stäbchen durch solche Ermüdung ganz außer Funktion gesetzt. Wir sehen bei Tage also ausschließlich mit den Zäpfchen. Bei sehr geringer Helligkeit aber erholen sich die Stäbchen nach einiger Zeit (man muß sich erst ans Dunkel gewöhnen!) und arbeiten noch, wenn die weit weniger empfindlichen Zäpfchen längst keinen Lichteindruck mehr vermitteln. Da die Stäbchen nicht farbentüchtig sind, so kann man im Dunkeln keine Farben unterscheiden („bei Nacht sind alle Katzen grau").

Die Zäpfchen und Stäbchen sind auf der Netzhaut ganz verschieden verteilt. Die Zäpfchen sind im gelben Fleck, also im Zentrum des Bildes, gehäuft vorhanden, an den anderen Stellen sind sie spärlicher. Dagegen fehlen im gelben Fleck die Stäbchen fast ganz und sind auf den anderen Teilen der Netzhaut zahlreich. Das hat zur Folge, daß wir erstens im Dunkeln, wie man leicht beobachten kann, ein erheblich größeres Gesichtsfeld haben als bei Tage, zweitens daß wir im Dunkeln im Zentrum des Gesichtsfeldes fast ganz blind sind. Versucht man, was nach einiger Übung gelingt, bei Nacht einen Stern genau so anzuschauen, wie wir es beim Fixieren bei Tage tun würden — was wir von selbst ganz unbewußt nicht tun —, so verschwindet der Stern, weil sein Bild auf den jetzt blinden gelben Fleck fällt, ja, es gelingt sogar, den Mond zum größten Teil zum Verschwinden zu bringen.

431. **Räumliches Sehen.** Die Augen vermitteln uns nicht nur Licht- und Farbeneindrücke, sondern auch Raumeindrücke, nicht nur das Nebeneinander, sondern auch das Hintereinander der Dinge. Letzteres verdanken wir dem Besitz zweier Augen. Wegen ihres Abstandes sehen wir mit beiden Augen nicht genau das gleiche Bild. Diese Ungleichheit wird uns aber im allgemeinen nicht bewußt. Das uns bewußt werdende Bild stammt stets nur von dem einen unserer Augen, bei der Mehrzahl der Menschen von dem rechten. Das im Unterbewußtsein bleibende Bild des andern Auges und seine Verschiedenheit vom Bild des ersten aber sind es, die uns die Raumeindrücke vermitteln, denn bei der Be-

trachtung flächenhafter Gebilde sind die Bilder nicht verschieden. Einäugige Menschen vermögen Entfernungen schwer zu beurteilen.

Das Stereoskop, von dem Abb. 409 eine besonders einfache Konstruktion zeigt, vermittelt räumliche Eindrücke mit Hilfe von Bildern. Es werden von dem gleichen Gegenstande zwei photographische Aufnahmen von ein wenig verschiedenen Standorten aus gemacht, so daß die beiden Bilder ein wenig verschieden sind. Meist bedient man sich dazu einer besonderen photographischen Kamera mit zwei Objektiven. Diese beiden Bilder B_1 und B_2 werden so vor die beiden Spiegel S_1 und S_2 des Stereoskops gebracht, daß jedes Auge nur eines dieser Bilder sieht, und daß die beiden Bilder am Orte B scheinbar räumlich zusammenfallen. Das Gehirn deutet den so entstehenden Eindruck in gewohnter Weise als die Folge eines räumlichen Hintereinander der dargestellten Gegenstände.

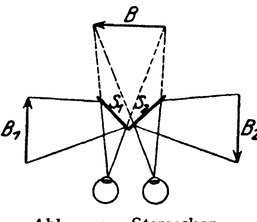


Abb. 409. Stereoskop.

Je größer der Augenabstand ist, desto tiefer erstreckt sich aus geometrischen Gründen die Wirkung des räumlichen Sehens. Der vergrößerte Objektivabstand beim Prismenfernrohr (§ 425) hat die gleiche Wirkung wie ein vergrößerter Augenabstand und macht daher das Bild des Gesehenen plastisch bis in Entfernungen, in denen man mit bloßem Auge nicht mehr räumlich sehen, d. h. keine Tiefenunterschiede mehr erkennen würde. Ist der Objektivabstand nur gleich dem Augenabstand, so wird die Vergrößerung der seitlichen Dimensionen nicht von einer gleichzeitigen Vergrößerung des Tiefeneindrucks begleitet. Die betrachteten Gegenstände erscheinen daher in der Sehrichtung zusammengedrängt.

Bei sehr kleinem Abstand des betrachteten Gegenstandes vom Auge und größerer Tiefenausdehnung, also bei sehr großer Verschiedenheit der von den beiden Augen gelieferten Bilder, findet eine Verschmelzung der Eindrücke der beiden Augen nicht mehr statt. Einen dicht vor die Nase gehaltenen Finger sieht man vor der entfernten Wand doppelt, wenn man die Wand fixiert.

432. **Dispersion.** Es ist bereits im § 412 erwähnt worden, daß beim Durchgang weißen Lichts durch ein Prisma Farbenerscheinungen auftreten. Es sei (Abb. 410) A eine Lichtquelle, die weißes Licht aussendet, z. B. eine Bogenlampe, K eine Linse, welche das Licht so auf einen Spalt Sp wirft, daß dieser voll beleuchtet ist. Dicht hinter dem Spalt steht das Prisma P, hinter diesem eine Linse L. Würde das weiße Licht unverändert durch das Prisma hindurchgehen, so würde die Linse bei richtiger Stellung auf dem Schirm S ein weißes Bild des Spaltes entwerfen. Das ist aber nicht der Fall. Vielmehr erhält man auf dem Schirm ein breites farbiges Band, welches sich von Rot über Gelb, Grün und Blau nach Violett erstreckt, und zwar entspricht der Ort des roten Endes einer geringeren Ablenkung des Lichts als der des violetten Endes. Man nennt diese Erscheinung ein Spektrum der Lichtquelle, den Vorgang Dispersion. Die Erklärung geht dahin, daß man das weiße Licht als eine Mischung aus allen Farben des Spektrums ansehen kann, und daß die einzelnen Farben verschieden stark gebrochen werden, rotes Licht am wenigsten, violettes Licht am stärksten, so daß durch das Prisma eine Zerlegung des weißen Lichtes in seine Bestandteile

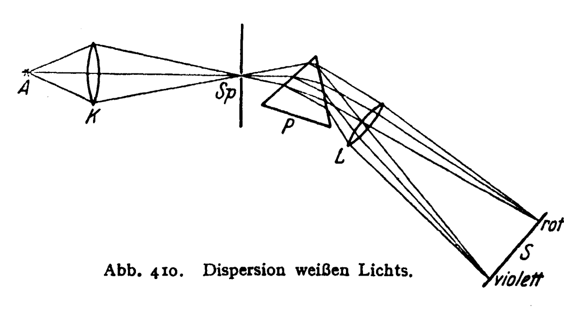


Abb. 410. Dispersion weißen Lichts.

stattfindet. Das Spektrum stellt daher ein Nebeneinander von Bildern des Spaltes dar, in deren jedem der Spalt in einer bestimmten Farbe abgebildet ist.

Man kann diese Farben auch wieder zu Weiß zusammenmischen, z. B. dadurch, daß man das Prisma durch einen geeigneten Mechanismus sehr schnell um einen kleinen Winkel hin und her bewegt. Dann fallen die verschiedenen Farben fortgesetzt auf andere Stellen des Schirms, und ihre Mischung durch Auge und Gehirn ergibt wieder den Eindruck des Weiß. Besser noch verfährt man so, daß man an der Eintrittsstelle des Lichts in das Prisma, wo das Licht also noch weiß ist, eine Blende anbringt und hinter dem Ort des Spektrums eine Linse, mittels derer man die Blende auf einen Schirm abbildet. Hierdurch werden die von den einzelnen Punkten der Blende ausgehenden, verschiedenfarbigen Strahlen jeweils wieder in einem Punkt vereinigt, also gemischt, und bilden zusammen wieder Weiß. Bringt man bei dieser Anordnung an diejenige Stelle des Spektrums, wo dieses scharf erscheint, ein spitzwinkliges Prisma, das das Licht nur ablenkt, ohne daß eine wesentliche Dispersion eintritt, und zwar so, daß nur ein Teil des im Spektrum vertretenen Lichts durch dieses Prisma hindurchgehen muß, so entstehen auf dem Schirm zwei Bilder der Blende nebeneinander. Jedes dieser Bilder entsteht durch eine Mischung der Farben je des einen der beiden Bereiche, in die das Spektrum durch das schmale Prisma zerlegt wurde. Sie sind daher farbig; und zwar sind die Farben der beiden Bilder zueinander komplementär, d. h. ihre Mischung ergibt Weiß. Durch Abblendung verschieden großer Teile des Spektrums kann man diese Farben weitgehend verändern. Das Nebeneinander von Komplementärfarben bietet einen besonderen ästhetischen Reiz und spielt in der Malerei eine wichtige Rolle. Die Farben des Spektrums, die reinen Spektralfarben, sind nicht weiter zerlegbar. Man erkennt dies durch folgenden Versuch: Man blende aus dem Spektrum durch einen zum ersten Spalt parallelen zweiten Spalt einen schmalen Bereich aus und bilde diesen Spalt unter Einschaltung eines Prismas durch eine Linse auf einem Schirm ab. Es zeigt sich dort lediglich die durch den Spalt ausgeblendete Farbe.

Die Tatsache der Dispersion zeigt, daß Glas und die anderen brechenden Substanzen für die verschiedenen Farben einen verschiedenen Brechungsindex n haben, und zwar ist er in der Regel für Rot am kleinsten, für Violett am größten. Es kommen aber auch Fälle vor, daß eine sonst mitten im Spektrum liegende Farbe weit stärker gebrochen wird als die übrigen (anomale Dispersion, s. § 466).

Die Dispersion in den einzelnen brechenden Substanzen ist eine verschiedene. Schon die verschiedenen Glassorten (Kronglas, Flintglas usw.) zeigen eine verschieden starke Dispersion, d. h. die verschiedenfarbigen Spektralgebiete werden beim Durchgang durch Prismen von gleichem brechenden Winkel verschieden weit voneinander getrennt.

Wie in § 409 erörtert worden ist, hängt der Brechungsindex einer Substanz eng mit der Geschwindigkeit des Lichtes in ihr zusammen. Die Tatsache der Dispersion beweist, daß sich Lichtstrahlen verschiedener Farbe in einer brechenden Substanz verschieden schnell fortpflanzen.

Abb. 411. Achromatisches Prisma aus Kron- und Flintglas.

Man kann durch Verwendung zweier Prismen aus verschieden brechendem Material (Kronglas *Kr* und Flintglas *Fl*) Prismensysteme herstellen, bei denen die Dispersion des ersten Prismas durch diejenige des zweiten gerade aufgehoben wird, während noch eine Ablenkung des nunmehr unzerlegten Lichts übrigbleibt (achromatisches Prisma, Abb. 411). Von größter Bedeutung für die praktische Optik ist aber die Möglichkeit, durch Kombination von Linsen

aus verschieden brechendem Material Linsensysteme herzustellen, die von den durch die Dispersion hervorgerufenen Linsenfehlern praktisch frei sind (Achromate).

433. Das Spektrometer. Ein Spektrometer (Abb. 412) dient zur Erzeugung und Untersuchung von Spektren. K ist das sog. Kollimatorrohr, an dessen vorderem Ende sich ein Spalt Sp befindet, durch den das zu untersuchende Licht in das Spektrometer fällt. Am anderen Ende des Kollimatorrohrs, um ihre Brennweite vom Spalt entfernt, befindet sich eine Linse L_1. Das vom Spalt herkommende Licht ist daher nach dem Austritt aus der Linse parallel. Es tritt dann in das Prisma P ein und wird dadurch in seine Farben zerlegt. Die den einzelnen Farben zugehörigen Strahlenbündel divergieren demnach nach dem Austritt aus dem Prisma, aber die Strahlen jeder einzelnen Farbe sind unter sich, der gleichen Brechung wegen, parallel. Daher wird das Licht, für jede Farbe an anderer Stelle, in der Brennebene des Objektivs L_2 des nunmehr folgenden Fernrohrs F wieder vereinigt, so daß hier das Spektrum reell im Raume erscheint und durch das Okular als Lupe betrachtet werden kann. Viele Spektrometer besitzen noch ein drittes Ansatzrohr Sk, welches an seinem vorderen Ende eine in der Brennebene der am andern Ende stehenden Linse L_3 befindliche, auf Glas geritzte Strichskala enthält, die mit einer Lampe beleuchtet wird. Das durch die Skala fallende Licht wird durch L_3 parallel gemacht und fällt auf diejenige Fläche des Prismas, aus der die das Spektrum bildenden Strahlen austreten. Hier wird es zum Teil reflektiert, und zwar so, daß es mit dem Lichte des Spektrums in das Fernrohr tritt. Da auch diese Strahlen parallel sind, so wird die Skala in der Bildebene des Fernrohrs zugleich mit dem Spektrum und am gleichen Orte scharf abgebildet. Man sieht also durch das Okular Spektrum und Skala gleichzeitig, sich überdeckend, und zwar ist die Skala so gestellt, daß ihre Striche das Spektrum parallel zu den einzelnen Farben, als helle Striche, durchziehen. Diese Skala dient zu Messungen an Spektren.

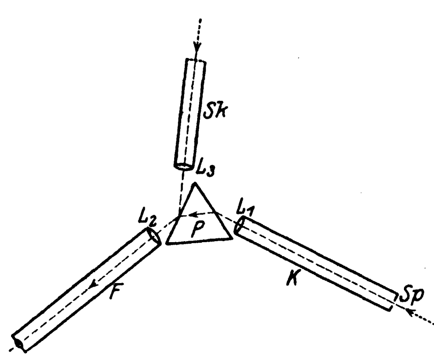


Abb. 412. Schema des Spektrometers.

Bei Spektrometern für genaue Messungen sind Fernrohr und Kollimatorrohr um die Achse des Instruments drehbar, und die Drehungswinkel können auf einer Skala abgelesen werden. Auch der das Prisma tragende Tisch ist drehbar. Ein Skalenrohr ist in diesem Falle nicht vorhanden.

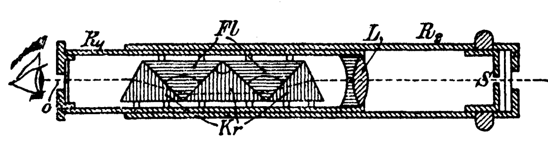


Abb. 413. Taschenspektroskop. R_1, R_2 ausziehbares Rohr, L Linse, S Spalt, Kr Kronglas, Fl Flintglas, O Okular.

Spektrometer ohne Skala, die wesentlich nur zur Betrachtung von Spektren dienen, nennt man Spektroskope, solche, welche mit einer Einrichtung versehen sind, um an den Ort des Bildes des Spektrums eine photographische Platte zu bringen, um eine Photographie desselben zu gewinnen, Spektrographen.

Zur Erhöhung der Dispersion eines Spektrometers verwendet man oft Sätze von mehreren Prismen, welche das Licht nacheinander durchläuft.

Durch Hintereinanderschaltung geeigneter Prismen aus verschieden brechendem Material (Kron- und Flintglas) kann man Prismenkombinationen her-

stellen, welche zwar eine Dispersion zeigen, mit denen also ein Spektrum erzeugt werden kann, bei denen aber der mittlere Teil des Spektrums unabgelenkt ist. Derartige geradsichtige Prismen haben den großen Vorteil, daß man mit ihnen den bei gewöhnlichen Prismen eintretenden Knick des Strahlenganges vermeidet. Sie finden z. B. bei den einfachen Taschenspektroskopen Verwendung (Abb. 413).

434. **Der Regenbogen.** Ein Regenbogen entsteht durch die in den Regentropfen eintretende Brechung und Reflexion des Sonnenlichts (Abb. 414). Da die verschiedenen Farben verschieden stark gebrochen werden, so erfährt der violette Anteil des Sonnenlichts die größte, der rote Anteil die kleinste Ablenkung $360^0 - \alpha$. Die nähere Untersuchung zeigt, daß die Strahlen sich bei einem Winkel α von etwa 41^0 häufen, wobei die violetten Strahlen etwas mehr, die roten etwas weniger abgelenkt sind. Wir sehen daher das Licht aus denjenigen Richtungen kommen, die hierdurch und durch den jeweiligen Sonnenstand gegeben sind. Diese Richtungen bilden einen Kegelmantel. Der Regenbogen ist also ein kreisbogenförmiges Band an der von der Sonne abgekehrten Seite des Himmels (in Wahrheit stammt das Licht aus ziemlich nahen Schichten der Atmosphäre, nämlich aus den fallenden Tropfen), der die Farben des Spektrums zeigt, Rot außen, Violett innen (Abb. 414a). Durch zweimalige Reflexion in den Tropfen kann ein zweiter Regenbogen entstehen, in dem, wie man aus Abb. 414b erkennt, die Farbenfolge umgekehrt ist.

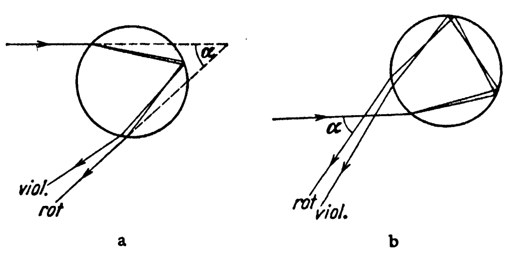


Abb. 414. Zur Entstehung des Regenbogens.

Eine strenge Theorie des Regenbogens ist nur unter Berücksichtigung der Wellentheorie des Lichts möglich.

30. Kapitel.

Das Licht als Schwingungsvorgang. Wellenoptik.

435. **Historisches zur Lichttheorie.** Die erste wissenschaftlich begründete Theorie des Lichts war die Emanationstheorie, die ihren größten Vertreter in Isaac Newton fand (1669). Diese Theorie nahm an, daß die Lichtemission in der Aussendung unwägbarer, materieller Teilchen von der Lichtquelle bestehe. Ihr stellte Huygens (1677, Vorläufer Descartes 1637, Hooke 1665) die Undulations- oder Wellentheorie entgegen, nach der das Licht ein Schwingungsvorgang, etwa wie der Schall, ist.

Der Kampf zwischen den beiden Lichttheorien hat fast zwei Jahrhunderte gedauert. Im Laufe der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts führte die Untersuchung der Interferenzerscheinungen des Lichtes zur Entscheidung zugunsten der Wellentheorie, nachdem zuerst Thomas Young (1802) in den schon von Leonardo da Vinci (1500) erwähnten, von Grimaldi (1665) genauer beobachteten Beugungserscheinungen einen entscheidenden Beweis für diese Theorie erblickt und auch die Newtonschen Ringe (§ 442) durch sie gedeutet hatte. Der Nachweis der Interferenzfähigkeit ist ein eindeutiger Beweis für die Wellennatur des Lichtes.

Mit der Aufstellung der Wellentheorie ergab sich ohne weiteres die Frage nach dem Träger der Lichtwellen. Da sich das Licht auch durch den leeren Raum

fortpflanzt, so ist offenbar die Ausbreitung des Lichtes nicht an das Vorhandensein von Materie im gewöhnlichen Sinne gebunden. Im Gegenteil kann man sagen, daß eine ganz ungestörte Lichtausbreitung nur dann stattfindet, wenn sich im Wege des Lichtes keine Materie befindet. Als die Wellentheorie sich im 19. Jahrhundert durchsetzte, galt es als sicher, daß sich alle Vorgänge in der Natur letzten Endes mechanisch verstehen lassen müßten, d. h. als irgendwelche Vorgänge oder Zustände an oder in materiellen Stoffen. So schien die Ausbreitung der Lichtquellen durch den im gewöhnlichen Sinne leeren Raum eindeutig zu beweisen, daß dieser Raum doch nicht völlig leer, sondern mit einer Substanz erfüllt sei, die sich allerdings jeder sonstigen Wahrnehmung entziehe, und deren Existenz sich lediglich durch die Lichtausbreitung dokumentiere. Hiernach konnte man die Lichtwellen als mechanische Schwingungen der einzelnen Teile dieses Stoffes ansehen, den man den Lichtäther, Weltäther oder auch kurz Äther nannte. Allerdings begegnete diese Vorstellung schon bald einer sehr großen Schwierigkeit. Wie wir noch sehen werden, sind die Lichtwellen Transversalschwingungen, und solche sind nach § 125 nur in festen Stoffen möglich. Überhaupt führt die Auffassung der Lichtwellen als mechanisch-elastische Schwingungen eines materiellen Mediums zu unmöglichen Folgerungen. Schließlich erwies sich auch aus der Relativitätstheorie, daß es einen Träger der Lichtwellen mit den allgemeinen Eigenschaften eines materiellen Stoffes nicht geben könne (§ 532). Die heutige Auffassung geht dahin, daß man den leeren Raum selbst in gewissem Sinne als eine physikalische Substanz ansehen muß. Das heißt, daß man ihm die Fähigkeit zuschreiben muß, gewisse Zustände anzunehmen und durch die Ausbreitung dieser Zustände Energie zu übertragen. Und zwar sind diese Zustände elektrische und magnetische Felder. Wenn heute noch das Wort Äther in der physikalischen Literatur gebraucht wird, so hat das mit dem materiellen Ätherbegriff der klassischen Physik nichts mehr zu tun. Es bezeichnet nur den Raum als Träger elektrischer und magnetischer Zustände, und damit auch des Lichtes, nicht einen Stoff mit irgendwelchen materiellen Eigenschaften.

Bis etwa um das Jahr 1900 schien die Wellentheorie für die Erklärung aller Lichterscheinungen auszureichen. Seitdem ist an ihre Seite (nicht an ihre Stelle!) die Quantentheorie (PLANCK 1900) getreten, die im 33. Kapitel ausführlich behandelt wird. In diesem Kapitel aber werden ausschließlich diejenigen optischen Erscheinungen behandelt, welche ihre Erklärung auf dem Boden der Wellentheorie finden (sog. klassische Optik).

Wie schon mehrfach erwähnt, ist das Licht ein elektromagnetischer Schwingungsvorgang (MAXWELL 1871). Doch ist es für die Erklärung der im folgenden zu besprechenden Erscheinungen vorerst unnötig, eine andere Vorstellung vom Wesen des Lichts zugrunde zu legen, als daß es überhaupt ein periodischer Schwingungsvorgang ist.

436. Schwingungszahl und Wellenlänge des Lichtes. Das Wesen der Spektralfarben. Wie beim Schall, so kann man auch beim Licht durch Interferenzversuche die Wellenlänge λ der Lichtschwingungen messen. Die in der Lichtquelle stattfindenden Vorgänge bestimmen primär die Schwingungszahl ν des Lichts. Diese ist der Messung nicht unmittelbar zugänglich, kann aber aus der für alle Schwingungsvorgänge gültigen Beziehung (§ 124)

$$\lambda \nu = c \qquad (1)$$

berechnet werden, wenn λ und die Lichtgeschwindigkeit c bekannt sind. Verläuft ein Lichtstrahl nacheinander durch verschiedene ruhende Medien, so bleibt dabei seine Schwingungszahl ν die gleiche, seine Wellenlänge aber ändert sich,

da ja c vom Material (Brechungsindex, § 409) abhängt, gemäß Gl. 1. Ist λ_0 die Wellenlänge einer Lichtschwingung im Vakuum, so ist sie, wenn das gleiche Licht in einer Substanz vom Brechungsindex n verläuft,

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n}. \tag{2}$$

In den Gasen, deren Brechungsindex ja sehr nahezu gleich 1 ist, ist also die Wellenlänge von derjenigen im Vakuum nur sehr wenig verschieden. Tabellarische Angaben der Wellenlänge beziehen sich meist auf das Vakuum.

Der physikalische Unterschied zwischen den reinen Spektralfarben besteht in einer Verschiedenheit ihrer Schwingungszahlen bzw. Wellenlängen. Die Wellenlänge nimmt von Rot nach Violett ab. Sie beträgt für die rote Grenze des Spektrums rund 770 mμ, für die violette Grenze rund 400 mμ (1 mμ = 10^{-7} cm). Aus Gl. 1 berechnen sich daher die Schwingungszahlen für die rote Grenze zu rund $4 \cdot 10^{14}$, für die violette Grenze zu rund $8 \cdot 10^{14}$ Schwingungen/sec. Das sichtbare Spektrum umfaßt also, in der Ausdrucksweise der Akustik, nur etwa 1 Oktave.

In der praktischen Spektroskopie bedient man sich als Maßeinheit der Wellenlänge meist der Ångström-Einheit (ÅE). 1 ÅE = $^1/_{10}$ mμ = 10^{-8} cm, so daß die obengenannten Grenzen des sichtbaren Spektrums dem Bereich von 4000—7700 ÅE entsprechen.

Neuerdings ist es immer mehr üblich geworden, nicht die Wellenlängen, sondern die sog. Wellenzahlen $N = 1/\lambda$ cm^{-1} anzugeben, wobei also die Wellenlänge in Zentimetern einzusetzen ist. N ist die Zahl der auf 1 cm entfallenden Wellenlängen und nach Gl. 1 gleich ν/c.

437. Interferenz des Lichts. Im § 126 ist das Wesen der Interferenz von Schwingungen besprochen. Interferenz findet statt, wenn zwei Schwingungen von gleicher Schwingungszahl zusammentreffen. Es erfolgt dann, je nach der bestehenden Phasenbeziehung, Verstärkung oder Schwächung der Schwingungen, unter Umständen bei einem Phasenunterschied von 180° und gleicher Intensität völlige Auslöschung.

Die Interferenz des Schalles kann z. B. mit Hilfe von zwei genau gleich gestimmten Stimmgabeln nachgewiesen werden. Man könnte demnach vermuten, daß man Lichtinterferenzen durch analoge Versuche mit zwei ganz gleichartigen Lichtquellen herstellen könnte. Das ist aber nicht der Fall. Der Nachweis der Interferenz gelingt nur mit sog. kohärentem Licht, d. h. nur dann, wenn man Licht, welches gleichzeitig von dem gleichen Punkt einer Lichtquelle ausgegangen ist, in einem Punkt des Raumes wieder zum Zusammentreffen bringt. Die Aussendung von Licht durch einen Körper beruht auf gewissen Vorgängen in den einzelnen Atomen (§ 496ff.). Zum Zustandekommen von Interferenzen müssen zwischen den zusammentreffenden Wellenzügen während einer gegen ihre Schwingungsdauer $\tau = 1/\nu$ langen Zeit konstante Phasenbeziehungen bestehen, und das ist bei nicht kohärentem Licht nie der Fall, sondern nur bei Wellenzügen, die dem gleichen elementaren Ausstrahlungsakt ihren Ursprung verdanken.

Diese Ausstrahlungsakte verlaufen aber in sehr kurzen Zeiten, zwischen denen beim einzelnen Atom viel längere Pausen liegen. Die Atome senden also Wellenzüge von begrenzter Länge (Interferenzlänge) aus. Wegen der begrenzten Länge der Wellenzüge genügt aber die Herkunft zweier Strahlen von demselben Punkt einer Lichtquelle allein noch nicht. Hat der eine der beiden Wellenzüge bis zu dem Punkt, in dem Interferenz stattfinden soll, einen Weg zurückzulegen, der um mehr als die Länge eines Wellenzuges größer ist als der Weg des andern, so findet ihre Wirkung in diesem Punkte gar nicht gleichzeitig

statt, und sie können nicht miteinander interferieren, wie das Abb. 415a schematisch andeutet. Ist die Wegdifferenz kleiner als die (von der Wellenlänge abhängige) Länge eines Wellenzuges, so tritt um so stärkere Interferenz ein, je weniger sich die beiden Wege unterscheiden.

Als Gangunterschied zweier kohärenter Lichtstrahlen bezeichnet man die Differenz der Wege, die sie von ihrem gemeinsamen Ursprung bis zu dem Punkte, in dem sie interferieren, zurückzulegen haben. Beträgt dieser Gangunterschied ein ganzzahliges Vielfaches ihrer Wellenlänge, so findet maximale Verstärkung statt. Beträgt er ein ungeradzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge, so erfolgt maximale Schwächung. Wir haben also

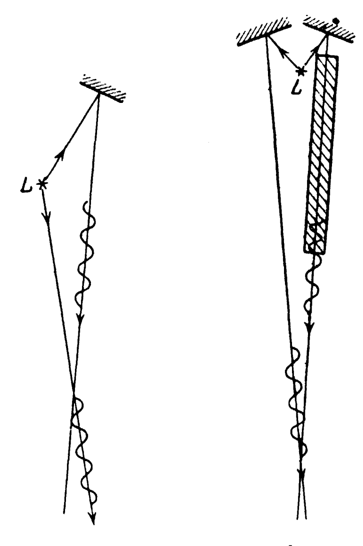


Abb. 415. Zur Interferenz von Wellenzügen.

bei $\delta = z\lambda$ maximale Verstärkung,

bei $\delta = \frac{2z+1}{2}\lambda$ maximale Schwächung.

(δ = Gangunterschied, z = ganze Zahl.)

Dabei ist als Wegdifferenz nicht die geometrische Wegdifferenz einzusetzen. Durchlaufen nämlich die beiden Wellenzüge bei gleicher geometrischer Weglänge Substanzen von verschiedenem Brechungsindex n, so ist ihre Geschwindigkeit eine verschiedene, und der eine kommt früher am Schnittpunkt der Strahlen an als der andere (Abb. 415b). Maßgebend für den Gangunterschied und für die Interferenzfähigkeit kohärenter Strahlen ist also nicht die Differenz der geometrischen, sondern der optischen Weglängen (§ 453).

Man unterscheidet FRESNELsche und FRAUNHOFERsche Interferenzen. Bei den ersteren liegt die Lichtquelle in endlicher Entfernung, und die von ihren einzelnen Punkten herkommenden Strahlen sind divergent. Bei den FRAUNHOFERschen Interferenzen liegt die Lichtquelle optisch im Unendlichen, d. h. die von ihren einzelnen Punkten herkommenden Strahlen sind zunächst parallel gemacht.

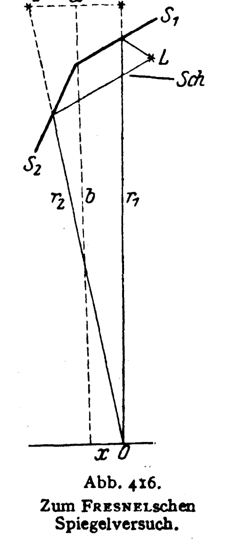


Abb. 416. Zum FRESNELschen Spiegelversuch.

438. FRESNELS Interferenzversuche. Zur Erzeugung kohärenter Lichtstrahlen kann man sich nach FRESNEL (1823) zweier, räumlich ein wenig getrennter Spiegelbilder der gleichen Lichtquelle bedienen, welche als kohärent strahlende Lichtquellen wirken. FRESNEL benutzte zu diesem Zwecke zwei, unter einem ganz kleinen Winkel gegeneinander geneigte Spiegel S_1 und S_2 (Abb. 416). Auf diese Weise entstehen von der Lichtquelle L zwei Spiegelbilder L_1 und L_2, welche bei dem Versuch nunmehr als Lichtquellen wirken, während die eigentliche Lichtquelle durch einen Schirm *Sch* abgeblendet wird. Der aus dem Reflexionsgesetz berechenbare Abstand von L_1 und L_2 sei a. Um die Erscheinung in einfachster Form zu erhalten, muß man eine Lichtquelle benutzen, die möglichst nur Licht einer einzigen Wellenlänge aussendet (monochromatisches Licht). Besonders geeignet ist dazu eine mit Natrium (Kochsalz) gefärbte Bunsen- oder Spiritusflamme. Bringt man in einige Entfernung von dem Winkelspiegel eine Lupe in den Weg

des von den beiden Spiegelbildern kommenden Lichts, so sieht man das Gesichtsfeld von hellen und dunklen Streifen durchzogen. Diese erklären sich durch die Interferenz des von den beiden Lichtquellen herkommenden Lichts.

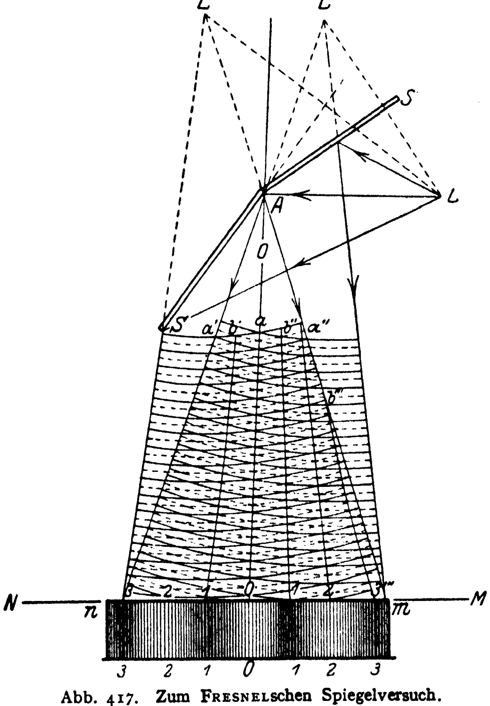


Abb. 417. Zum FRESNELschen Spiegelversuch.

Es seien r_1 und r_2 (Abb. 416) die Abstände eines Raumpunktes o vom Ort der beiden Spiegelbilder (also auch, längs des Lichtweges gerechnet, von der Lichtquelle selbst), b der senkrechte Abstand des betreffenden Punktes von a, x sein Abstand von der Symmetrielinie zwischen L_1 und L_2. Dann ist

$$r_1^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2,$$

$$r_2^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2} + x\right)^2,$$

also

$$r_2^2 - r_1^2 = 2\,a\,x \quad \text{oder} \quad r_2 - r_1 = \frac{2\,ax}{r_2 + r_1}\,.$$

Da b, also auch r_1 und r_2, groß sein sollen gegen a und x, so kann man ohne merklichen Fehler $r_2 + r_1$ durch $2b$ ersetzen, so daß der Unterschied der beiden Lichtwege $r_2 - r_1 = a\,x/b$ ist. Im § 437 ist gesagt worden, daß zwei Wellen sich durch Interferenz aufheben, wenn ihr Gangunterschied ein ganzzahliges, ungerades Vielfaches der halben Wellenlänge ist. Wir erhalten also Auslöschung des Lichts, wenn $\frac{a\,x}{b} = \frac{2\,z + 1}{2}\lambda$, wobei z Null oder irgendeine ganze Zahl ist. Die Gleichung ergibt die Lage x der einzelnen dunklen Streifen. Aus dem Abstand je zweier Streifen, $\delta = \lambda\,\frac{b}{a}$, kann man λ berechnen. Abb. 417 zeigt schematisch die Lichterscheinung auf einem in den Weg des Lichts gestellten Schirm.

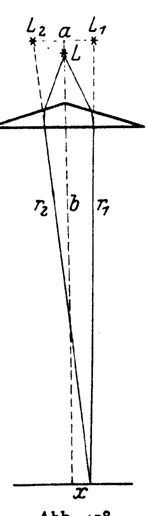


Abb. 418. FRESNELsches Doppelprisma.

Ist das benutzte Licht nicht monochromatisch, so liegen die Orte, an denen Auslöschung der einzelnen in dem Licht enthaltenen Spektralfarben eintritt, nicht an gleicher Stelle. Die Lichtwirkung in jedem Punkt rührt her von allen in der Lichtquelle vertretenen Farben, abzüglich derjenigen, für die gerade Auslöschung eintritt. Es erscheinen daher in diesem Falle farbige Streifen (Mischfarben, § 477), bei Benutzung weißen Lichts Folgen von schmalen kontinuierlichen Spektren. Diese bestehen aber nicht, wie beim Prisma, aus den reinen Spektralfarben, sondern ebenfalls aus Mischfarben und entstehen durch das Fehlen der jeweils ausgelöschten Farbe im weißen Licht, d. h. man sieht in jedem Punkt die Komplementärfarbe zu der dort gerade ausgelöschten Farbe.

Statt des Winkelspiegels benutzte FRESNEL auch ein Doppelprisma (Biprisma) von der in Abb. 418 dargestellten Form. Es bewirkt, wie man ohne

nähere Erklärung sieht, daß das Licht der Lichtquelle L von den beiden Punkten L_1 und L_2 herzukommen scheint, liefert also, genau wie der Winkelspiegel, zwei kohärente Lichtquellen.

439. **FRAUNHOFERsche Interferenzen in einer planparallelen Platte.** Als besonders lehrreiches Beispiel soll hier der folgende Fall in allen Einzelheiten diskutiert werden. Abb. 419 stelle eine dünne, planparallele Schicht von Brechungsindex n dar, auf die von außen her (aus der Luft bzw. dem Vakuum) ein Bündel paralleler, kohärenter Strahlen falle, die wir uns als von einem Punkt einer unendlich fernen Lichtquelle herrührend denken können. Bei der Ausführung des Versuchs wird man die Lichtquelle in die Brennebene einer Sammellinse bringen, aus der die von den einzelnen Punkten der Lichtquelle herkommenden Strahlen parallel austreten. Es handelt sich hier also um eine FRAUNHOFERsche Interferenzerscheinung (§ 437). Die Dicke der Schicht sei d.

Fällt ein Strahl auf eine solche Platte, so wird von ihm ein gewisser Bruchteil an der Oberfläche reflektiert. Der Rest tritt unter Brechung in die Platte ein. An der anderen Oberfläche wird wieder ein Bruchteil ins Innere der Platte reflektiert, der Rest tritt unter Brechung aus. Der ins Innere reflektierte Anteil wird im Innern der Platte immer wieder hin- und herreflektiert, erfährt aber bei jeder Reflexion einen Verlust durch Austritt eines Teils seiner Energie nach außen.

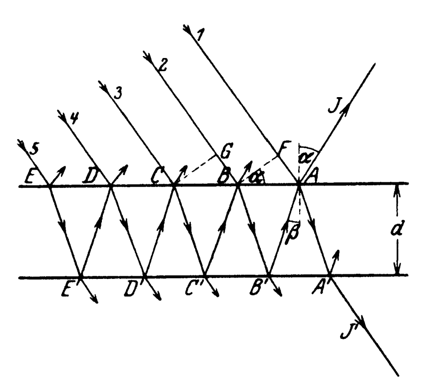


Abb. 419.
Zur Interferenz in einer planparallelen Platte.

Wir betrachten jetzt den vom Punkte A ausgehenden Strahl J. Seine Energie setzt sich aus mehreren Anteilen zusammen. Erstens aus dem an der Oberfläche regulär reflektierten Anteil des Strahles 1. Zu diesem kommen noch die Anteile der Strahlen 2, 3, 4 usw. hinzu, die nach mehrfachen Reflexionen im Innern der Platte den Punkt A erreichen und dort austreten. Die in der Richtung des Strahles J auftretende Lichtintensität hängt von den Phasenbeziehungen der Anteile der Strahlen 1, 2, 3 usw., die bei A austreten, ab. Wir wollen zunächst nur die Anteile der Strahlen 1 und 2, ohne Rücksicht auf ihre Intensitäten, ins Auge fassen. Diese beiden Strahlen sind in der Ebene BF (Abb. 419) in gleicher Phase. Sie haben aber bis zum Punkte A verschiedene optische Wege zu durchlaufen, so daß in A und daher auch im Strahle J zwischen ihnen ein Gangunterschied (§ 437) auftreten wird, von dessen Größe es abhängt, ob sie sich im Strahle J gegenseitig verstärken oder schwächen. Die optische Weglänge des aus dem Strahl 1 stammenden Anteils von der Ebene BF bis A ist einfach gleich der Strecke FA, diejenige des Anteils des Strahles 2 gleich der Strecke $BB'+B'A$, multipliziert mit dem Brechungsindex n der Plattensubstanz (§ 409). Ferner ist aber folgendes zu beachten: Ein Strahl erleidet bei der Reflexion an einem optisch dichteren Medium einen P h a s e n s p r u n g um den Betrag π, also die gleiche Änderung seiner Phase, die er beim Durchlaufen eines Weges von der Länge $\lambda/2$ erfahren würde. Die Phase des Anteils des Strahles 1 ist also gegenüber der Phase im Punkte F nach der Reflexion in A so verändert, als habe der Strahl nicht nur den Weg FA, sondern den Weg $FA + \lambda/2$ durchlaufen. Bei der Reflexion an einem optisch dünneren Medium tritt ein solcher Phasensprung nicht auf.

Aus der Abb. 419 liest man leicht ab, daß $AB = 2d \operatorname{tg}\beta$ und $FA = AB \sin\alpha$, so daß die optische Weglänge (zuzüglich des Phasensprunges) des aus dem Strahl 1

stammenden Anteils auf dem Wege FA gleich $s_1 = 2d \sin\alpha \operatorname{tg}\beta + \frac{\lambda}{2}$ ist, oder da nach dem Brechungsgesetz $\sin\alpha = n \sin\beta$,

$$s_1 = \frac{2nd\sin^2\beta}{\cos\beta} + \frac{\lambda}{2}.$$

Wir gehen jetzt zu dem in J vorhandenen Anteil des Strahles 2 über. Seine geometrische Weglänge ist gleich $BB' + B'A = 2d/\cos\beta$, seine optische Weglänge auf dem Wege BA daher gleich

$$s_2 = \frac{2nd}{\cos\beta}.$$

Demnach beträgt die Differenz der optischen Weglängen dieser beiden Strahlanteile, wie man durch einfache Rechnung unter Berücksichtigung der Beziehung $\sin\alpha = n\sin\beta$ findet,

$$\delta = s_2 - s_1 = 2nd\cos\beta - \frac{\lambda}{2}.$$

Wir erhalten also nach § 437, wenn wir noch gemäß dem Brechungsgesetz $n\cos\beta = \sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}$ setzen

$$\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} = \begin{cases} z\frac{\lambda}{2d} & \text{(maximale Verstärkung)} \\ \left(z + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2d} & \text{(maximale Auslöschung).} \end{cases} \qquad (3)$$

$$(z = 0, 1, 2 \ldots)$$

Hieraus lassen sich die Einfallswinkel α berechnen, bei denen einer dieser beiden Grenzfälle eintritt. Die zwischen diesen Werten von α liegenden Einfallswinkel ergeben Übergänge zwischen diesen beiden Grenzfällen.

Wir betrachten nunmehr noch den Anteil des Strahles 3. Für den Gangunterschied, den er in A gegenüber dem Anteil des Strahles 2 hat, gelten genau die gleichen Überlegungen, die wir soeben bezüglich der Anteile der Strahlen 1 und 2 angestellt haben. Der Unterschied der geometrischen Wege ist in beiden Fällen genau der gleiche, und so würde auch der in A auftretende Gangunterschied dieser beiden Strahlanteile genau der gleiche sein, wie für die Strahlen 1 und 2, wenn nicht in diesem Falle der Phasensprung um den Betrag π fortfiele, weil keiner der beiden Strahlanteile je am optisch dichteren Medium reflektiert wird. Hierdurch verschieben sich die Verhältnisse, wie man ohne weiteres sieht, derart, daß die Strahlen 2 und 3 sich bei denjenigen Einfallswinkeln α, bei denen sich die Strahlen 1 und 2 gegenseitig maximal verstärken, gerade maximal schwächen, und umgekehrt. Eine wesentliche Änderung der oben betrachteten Verhältnisse tritt jedoch hierdurch nicht ein, denn in allen praktisch in Betracht kommenden Verhältnissen ist die Energie im Strahlanteil 2 von J sehr viel größer als die im Strahlanteil 3, so daß die Schwächung (bzw. Verstärkung) des Strahles 2 durch den Strahl 3 nur äußerst geringfügig ist. Betrachten wir noch die Wirkung der weiteren Strahlen 4, 5 usw., so zeigt eine einfache Überlegung, daß sich in dem Falle, daß der Anteil des Strahles 2 den Anteil des Strahles 1 maximal verstärkt, dies auch die Anteile der Strahlen 4, 6, 8 usw. tun, während die Anteile der Strahlen 3, 5, 7 usw. den Anteil des Strahles 1 in J schwächen. Bei denjenigen Einfallswinkeln α aber, bei denen der Anteil des Strahles 2 den Anteil des Strahles 1 in J maximal schwächt, wirken auch die Anteile der Strahlen 3, 4, 5 usw. alle schwächend auf den Anteil des Strahles 1, unterstützen also die Interferenzwirkung des Strahles 2. Allerdings beruht die Hauptwirkung stets auf dem Anteil des

Strahles 2, da die Intensitäten der verschiedenen Anteile sehr schnell abnehmen. Näheres über die Intensitätsfragen s. § 440.

Die in der Abb. 419 nicht gezeichneten, zwischen den Strahlen 1, 2, 3 usw verlaufenden parallelen Strahlen, erzeugen in den übrigen Punkten der Oberfläche der planparallelen Platte entsprechende Erscheinungen. Es gehen also von der Platte parallel zu J Strahlen aus, in denen sich die einzelnen Anteile, aus denen sie entstehen, je nach der Größe des Einfallwinkels α mehr oder weniger stark schwächen oder verstärken. Bringt man in den Weg dieser parallelen Strahlen eine Linse, so werden diese Strahlen in deren Brennpunkt vereinigt, und in diesem tritt Helligkeit oder Dunkelheit auf, je nachdem die Bedingungen für Verstärkung oder Schwächung erfüllt sind. Das gleiche erkennt man durch Beobachtung mit dem Auge. Kommt das Licht von einer ausgedehnten Lichtquelle, deren Strahlen vor dem Einfall durch eine Linse parallel gemacht sind, so fallen die von den einzelnen Punkten dieser Lichtquelle herkommenden parallelen Strahlen unter verschiedenen Einfallswinkeln auf die Platte. Das von der zweiten Linse entworfene Bild der Lichtquelle ist dann von hellen und dunklen Streifen durchzogen. Jeder Streifen entspricht Strahlen, die unter dem gleichen Einfallswinkel auf die Platte fielen. Man spricht daher in diesem Falle von Interferenzen gleicher Neigung.

Ist das von der Lichtquelle kommende Licht nicht einfarbig, sondern enthält es Licht verschiedener Wellenlängen, so ergeben sich auch für die einzelnen Farben verschiedene Einfallswinkel α für maximale Verstärkung und Auslöschung. Benutzen wir z. B. weißes Licht, das eine kontinuierliche Folge von Wellenlängen enthält, so sind in einer bestimmten Richtung jeweils nur bestimmte Wellenlängen maximal ausgelöscht bzw. maximal verstärkt. Daß dies in der gleichen Richtung für mehr als eine Wellenlänge eintreten kann, rührt daher, daß ja die Zahl z jeden beliebigen ganzzahligen Wert annehmen kann, bzw. daß durch den Betrag von α noch nicht die maximal verstärkte oder geschwächte Wellenlänge λ, sondern die Größe $(z + \frac{1}{2})\,\lambda/d$ (maximale Verstärkung), bzw. $z\lambda/d$ (maximale Schwächung) gegeben ist. Daraus ergibt sich für jeden Wert von z (der Ordnungszahl der Interferenz) ein anderer Wert von λ. Nun kann man aus Gl. 3 leicht herleiten, daß z einen gewissen Betrag nicht unterschreiten kann, und daß es in allen praktisch vorkommenden Fällen mindestens von der Größenordnung von d/λ ist. Ist also die Dicke der Platte groß gegen die vorkommenden Wellenlängen, so ist z auch groß, und diejenigen Wellenlängen, die bei einem bestimmten Einfallswinkel α maximal geschwächt werden, sind einander sehr nahe benachbart, z. B. im Falle, daß der Mindestwert von z etwa gleich 1000 sei. Dann ergeben sich, wenn wir $z = 1000$, 1001, 1002 usw. setzen, bei gegebenen d und α Werte von λ, die sich nur sehr wenig unterscheiden. Ebenso ergibt sich auch, daß für die gleiche Wellenlänge benachbarte Winkel maximaler Auslöschung nur äußerst wenig voneinander verschieden sind, so daß der kleine Winkelunterschied eine Auflösung durch das Auge nicht mehr zuläßt (§ 422). In diesem Falle werden also die Interferenzstreifen vom Auge nicht mehr aufgelöst, und eine flächenhafte, überall gleichmäßig leuchtende Lichtquelle erscheint dem Auge auch im reflektierten Lichte gleichmäßig leuchtend. Deshalb treten Interferenzstreifen in diesem Falle bei einer gegen die Wellenlänge des Lichtes großen Plattendicke, also z. B. bei gewöhnlichem Glase, nicht auf, sondern nur dann, wenn die Dicke so gering ist, daß sie mit der Wellenlänge des Lichtes vergleichbar ist.

Wird eine solche sehr dünne Schicht von weißem Licht beleuchtet, so fallen in jeder Richtung gewisse Wellenlängen (Farben) durch Interferenz aus. Betrachtet man einen Punkt der Oberfläche einer solchen Schicht, so fehlen diese Farben in

dem von dort reflektierten Licht. Dieses zeigt daher durch Mischung des nicht ausgelöschten Restes, der vom weißen Licht nach Ausfall des ausgelöschten Anteils übrigbleibt, die Komplementärfarbe des ausgelöschten Anteils. Da man die einzelnen Punkte der Fläche einer solchen Schicht unter verschiedenen Winkeln sieht, so wechselt die Wellenlänge der ausgelöschten Farbe und damit die Farbe des ins Auge gelangenden Lichtes von Ort zu Ort. Die Schicht schillert in allen möglichen Farben (Farben dünner Blättchen). Das bekannteste Beispiel dieser Art sind die Seifenblasen. Auch die schillernden Farben von Ölschichten und von dünnen Oxydschichten auf Metallen (Anlauffarben) haben den gleichen Ursprung.

Besondere Erscheinungen treten bei ganz geringen Schichtdicken auf. Ist die Dicke d merklich kleiner als die Wellenlänge λ, so wird der Gangunterschied δ der interferierenden Strahlanteile nur noch so gut wie ausschließlich durch den Phasensprung des einen direkt reflektierten Strahls um π (s. oben) bewirkt, und ist vom Einfallswinkel praktisch unabhängig. In diesem Falle besteht also stets ein Gangunterschied $\lambda/2$, und es erfolgt stets und unabhängig von Einfallsrichtung und Farbe Auslöschung. Daher verschwindet die Interferenzerscheinung, auch die Farbe dünner Blättchen, bei Schichtdicken, die die Wellenlänge des Lichtes merklich unterschreiten.

Man kann diese Erscheinung sehr schön an Seifenlamellen beobachten. Erzeugt man in einem Drahtrahmen eine vertikalstehende Seifenlamelle, so wird sie unter der Wirkung der Schwere allmählich oben immer dünner. Das zeigt sich zuerst daran, daß die farbigen Streifen dort einen immer breiter werdenden Abstand bekommen. Schließlich aber verschwinden die Farben, und die Lamelle erscheint farblos, im reflektierten Lichte schwarz (sog. schwarzer Fleck).

Bisher haben wir nur das von einer dünnen Schicht reflektierte Licht auf Interferenzerscheinungen untersucht. Wir gehen nunmehr zu denjenigen Anteilen der Strahlen 1, 2, 3 usw. über, die im Punkte A' (Abb. 419) aus der Platte austreten. Auf Grund der vorstehenden Überlegungen können wir die im Strahl J' herrschenden Verhältnisse leicht ohne weitere Rechnung ermitteln. Der Strahl J' setzt sich aus Anteilen aller Strahlen 1, 2, 3 usw. zusammen, und zwar aus solchen, die mehr oder weniger häufig im Innern der Platte reflektiert worden sind. Es ist ohne weiteres einleuchtend, daß der optische Wegunterschied der von je zwei benachbarten einfallenden Strahlen herrührenden Anteile im Punkte A' genau ebenso groß ist, wie bei zwei benachbarten Strahlen im reflektierten Strahl J, abgesehen von den beiden Strahlanteilen 1 und 2. Denn bei dem reflektierten Strahlanteil 1 ist eine Reflexion am optisch dichteren Medium im Spiel. Eine solche findet aber bei den durch die Platte hindurchtretenden Anteilen nirgends statt. Die Strahlanteile, die den austretenden Strahl J' bilden, verhalten sich also so zueinander wie die Strahlanteile, die den Strahl J bilden, unter Fortlassung des reflektierten Strahls 1. Nun haben wir oben gesehen, daß sich im Falle maximaler Verstärkung in der Reflexion die Strahlen 2, 3, 4 usw. paarweise schwächen, indem sich zwar die geradzahligen Strahlanteile in J gegenseitig verstärken, und ebenso die ungeradzahligen — vom Strahlanteil 1 abgesehen — diese beiden Gruppen sich aber gegenseitig schwächen. Das gleiche muß also in diesem Falle auch im durchgelassenen Strahl der Fall sein. Haben wir demnach maximale Verstärkung im reflektierten Strahl, so haben wir gerade maximale Schwächung im durchgehenden Strahl. Tritt aber im reflektierten Strahl J maximale Schwächung ein, so wirken, wie wir oben gesehen haben, die Strahlen 2, 3, 4 usw. sämtlich gleichsinnig und schwächen alle den Strahlanteil 1. Im durchgehenden Anteil wirken deshalb jetzt alle Strahlanteile gleichsinnig, d. h. sie verstärken sich maximal. Daraus folgt, daß die Lichtwirkung im durchgehenden

Strahl bei denjenigen Einfallswinkeln ein Maximum hat, bei denen sie im reflektierten Strahl ein Minimum hat, und umgekehrt. Diese Tatsache könnte an sich schon daraus gefolgert werden, daß die einfallende Energie doch restlos wieder aus der Platte austreten muß, da nirgends Lichtenergie verlorengeht. Je weniger Licht also im reflektierten Anteil enthalten ist, um so mehr Licht muß im durchgehenden Anteil enthalten sein. Über die Intensitätsverhältnisse im durchgehenden Licht s. § 440.

Bezüglich der bei Verwendung von nicht monochromatischem Licht, insbesondere weißem Licht, auftretenden Farberscheinungen und des Einflusses der Plattendicke lassen sich für das durchgehende Licht ganz entsprechende Überlegungen anstellen, wie oben für das reflektierte Licht. Insbesondere gilt, daß Farberscheinungen bei Verwendung weißen Lichtes nur bei sehr dünnen Platten auftreten.

Bei den vorstehenden Überlegungen war vorausgesetzt worden, daß die betrachtete Platte einen höheren Brechungsindex als ihre Umgebung hat. Prinzipiell ändert sich nichts, wenn es sich um eine planparallele Schicht einer Substanz handelt, die in ein Medium von höherem Brechungsindex eingebettet ist. Dieser Fall liegt z. B. bei einer Luftschicht vor, die von zwei parallelen, ebenen Glasflächen begrenzt wird. Wie man leicht feststellen kann, tritt in diesem Falle in Gl. 3 an die Stelle von n der reziproke Wert $1/n$, wobei n jetzt den Brechungsindex des die Luftschicht begrenzenden Glases bedeutet. Die Abb. 419 wäre dahin abzuändern, daß die Strahlen beim Eintritt in die Luftschicht vom Einfallslot weggebrochen, beim Austritt zum Einfallslot hingebrochen werden. Alle Folgerungen bleiben erhalten.

440. Intensitätsverhältnisse bei der Interferenz an planparallelen Platten. Wir wollen nunmehr die Intensitäten in den Strahlen J und J' berechnen und diese Intensitäten ebenfalls mit den Buchstaben J und J' bezeichnen. Die einfallenden Strahlen 1, 2, 3 usw. sollen alle die gleiche Intensität J_0 haben. Wir bezeichnen denjenigen Bruchteil eines Strahles, der jeweils an einer der Grenzflächen reflektiert wird, mit ϱ. Dieser Bruchteil ist für beide Grenzflächen gleich groß. Der durch die Fläche hindurchtretende Bruchteil beträgt alsdann $1-\varrho$. Betrachten wir als Beispiel den Strahl 2. Seine Intensität beträgt ursprünglich J_0. Im Punkte B geht durch Reflexion in Richtung des kurzen Pfeils (Abb. 419) die Intensität $J_0\varrho$ verloren. Der in die Platte eintretende Strahlanteil hat nur noch die Intensität $J_0(1-\varrho)$. Er erfährt bei der Reflexion bei B' erneut eine Schwächung auf den Bruchteil ϱ und hat daher auf dem Wege $B'A$ nur noch die Intensität $J_0(1-\varrho)\varrho$. Bei A tritt eine erneute Schwächung dieses Anteils ein, da von ihm nur der Bruchteil $1-\varrho$ austritt. Im Strahl J ist daher von dem Strahl 2 nur noch der Betrag $J_0(1-\varrho)^2\varrho$ von der ursprünglichen Intensität J_0 übriggeblieben. In entsprechender Weise findet man leicht die Intensitäten, mit denen die einzelnen, aus den Strahlen 1, 2, 3 usw. stammenden Anteile in die Strahlen J und J' eintreten. Wir wollen sie mit J_1, J_2, J_3 usw. J_1', J_2', J_3' bezeichnen. Es ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} &J_1 = J_0\varrho, \quad J_2 = J_0(1-\varrho)^2\varrho, \quad J_3 = J_0(1-\varrho)^2\varrho^3, \quad J_4 = J_0(1-\varrho)^2\varrho^5 \text{ usw.} \\ &J_1' = J_0(1-\varrho)^2, \quad J_2' = J_0(1-\varrho)^2\varrho^2, \quad J_3' = J_0(1-\varrho)^2\varrho^4, \quad J_4' = J_0(1-\varrho)^2\varrho^6 \text{ usw.} \end{aligned} \tag{4}$$

Nun folgt aus der elektromagnetischen Theorie des Lichtes, daß man in dem hier vorliegenden Falle der Kohärenz die Intensität der Strahlen J und J' nicht durch Addition der Intensitäten der Strahlen 1, 2, 3 usw. erhält, sondern man muß die Wurzeln aus den Einzelintensitäten bilden und diesen Wurzeln je nachdem ob sie den stärksten vorhandenen Strahlanteil verstärken oder schwächen,

positives oder negatives Vorzeichen geben. Alsdann erhält man die resultierende Intensität, indem man die Summe dieser Wurzeln quadriert. (Die Erklärung hierfür liegt darin, daß die Lichtintensität dem Quadrat der Amplituden der Lichtschwingungen proportional ist. Um die Summe der Intensitäten verschiedener Lichtschwingungen zu finden, muß man aber zunächst ihre Amplituden addieren. Die Gesamtintensität ist dann dem Quadrat der Amplitudensumme proportional.) Hiernach ergeben sich die Intensitäten J und J' folgendermaßen. (Dabei nehmen wir jetzt die Zahl der einfallenden Strahlen als unendlich groß an.)

I. Maximale Verstärkung im reflektierten Strahl. Wie in § 439 ausgeführt, verstärken die Strahlanteile 2, 4, 6 usw. den Strahlanteil 1 in J, die Strahlanteile 3, 5, 7 usw. schwächen ihn. Es ist demnach

$$J = (\sqrt{J_1} + \sqrt{J_2} - \sqrt{J_3} + \sqrt{J_4} - \sqrt{J_5} + \dots)^2$$
$$= J_0 \varrho [1 + (1 - \varrho)(1 - \varrho + \varrho^2 - \varrho^3 + \dots)]^2 = J_0 \frac{4\varrho}{(1+\varrho)^2}.$$

Im Strahl J' verstärken sich die Strahlenteile 1, 3, 5 usw. und 2, 4, 6 usw. unter sich, aber diese beiden Gruppen wirken einander entgegen, daher ist

$$J' = (\sqrt{J_1'} - \sqrt{J_2'} + \sqrt{J_3'} - \sqrt{J_4'} \dots)^2$$
$$= J_0 (1 - \varrho)^2 (1 - \varrho + \varrho^2 - \varrho^3 + \dots)^2 = J_0 \left(\frac{1-\varrho}{1+\varrho}\right)^2.$$

Man stellt leicht fest, daß $J + J' = J_0$ ist. Das ist auch zu erwarten, da keine Energie verlorengeht, und da, wenn wir alle von der Platte ausgehenden Strahlen berücksichtigen, auf jeden einfallenden Strahl je ein reflektierter und ein durchgehender Strahl entfällt.

II. Maximale Schwächung im reflektierten Strahl. Hier wirken, wie in § 439 ausgeführt, in J die Strahlanteile 2, 3, 4 usw. sämtlich dem Strahlanteil 1 entgegen. Daher ist jetzt

$$J = (\sqrt{J_1} - \sqrt{J_2} - \sqrt{J_3} - \sqrt{J_4} - \dots)^2$$
$$= J_0 \varrho [1 - (1 - \varrho)(1 + \varrho + \varrho^2 + \varrho^3 + \dots)]^2 = 0.$$

Im Strahl J' wirken alle Strahlanteile gleichsinnig und es ergibt sich

$$J' = (\sqrt{J_1'} + \sqrt{J_2'} + \sqrt{J_3'} + \sqrt{J_4'} + \dots)^2$$
$$= J_0 (1 - \varrho)^2 (1 + \varrho + \varrho^2 + \varrho^3 + \dots)^2 = J_0.$$

Es tritt also in diesem Falle vollkommene Auslöschung in der Reflexion ein, und die gesamte einfallende Intensität findet sich im durchgehenden Licht wieder. Man sieht aus den vorstehenden Gleichungen, daß die reflektierte Intensität je nach dem Einfallswinkel zwischen den Bruchteilen $4\varrho/(1-\varrho)^2$ und 0 der einfallenden Intensität J_0 schwankt. Der relative Intensitätsunterschied ist also in diesen Fällen sehr groß, genau gesagt unendlich groß. Im durchgehenden Licht hingegen verhalten sich die Intensitäten in den beiden Extremfällen wie $\left(\frac{1-\varrho}{1+\varrho}\right)^2$. Nun ist ϱ in den meisten praktisch in Frage stehenden Fällen eine sehr kleine Zahl, z. B. für Glas etwa gleich 0,025. Demnach schwankt J etwa zwischen den Intensitäten 0 und $0{,}1 \cdot J_0$, J' zwischen den Intensitäten $0{,}9 \cdot J_0$ und J_0. Gegenüber dem Wechsel zwischen Helligkeit und vollständiger Dunkelheit im reflektierten Lichte zeigt also das durchgehende Licht in dem gedachten Falle nur eine maximale Schwankung um etwa 10%. Die Interferenzerscheinung ist daher im

reflektierten Licht weit stärker ausgeprägt als im durchgehenden Lichte. Das ist z. B. bei einer Seifenlamelle zu sehen. Sie zeigt ihre Interferenzfarben nur im reflektierten Lichte deutlich. Im durchgehenden Lichte erscheint sie nahezu farblos.

Wie man aus der Gl. 4 erkennt, ist bei kleinen Werten von ϱ der Strahl J_2 der einzige, dessen Intensität von der gleichen Größenordnung ist, wie die des Strahls J_1. Es ist daher auch ganz überwiegend der Strahl J_2, der durch sein Zusammenwirken mit dem Strahl J_1 die betrachteten Interferenzerscheinungen bewirkt. Aus diesem Grunde kann man sich im allgemeinen bei der Betrachtung derartiger Erscheinungen mit diesen beiden Strahlen begnügen und das Vorhandensein der weiteren schwachen Strahlanteile vernachlässigen.

441. **Fresnelsche Interferenzen an einer planparallelen Platte.** Wir betrachten nunmehr den Fall, daß die Lichtquelle in endlicher Entfernung von einer planparallelen Platte liegt, die von ihren einzelnen Punkten herkommenden Strahlen also divergent auf die Platte fallen. Die hierbei auftretenden Erscheinungen sind von denjenigen im parallel einfallenden Licht prinzipiell verschieden. L sei eine punktförmige Lichtquelle bzw. ein Punkt einer ausgedehnten Lichtquelle (Abb. 420). Wir wollen nun das von einem Punkte A der oberen Fläche der Platte ausgehende, von L herrührende Licht betrachten. Wir sehen, daß in dem von A ausgehenden Licht Anteile ganz bestimmter Strahlen 1, 2, 3 usw. enthalten sind, die infolge von Reflexion bzw. Brechung im Innern der Platte auf dem Wege von L nach A verschieden lange optische Wege zurückgelegt haben, also Gangunterschiede besitzen, ähnlich wie wir dies bei dem Fall parallelen Lichtes besprochen haben. Aber diese Strahlanteile vereinigen sich nicht wie im letzteren Fall zu einem einzigen Strahl, sondern bilden ein Strahlenbündel von endlicher Öffnung. Blicken wir auf den Punkt A, so vereinigen sich diese Strahlen auf der Netzhaut zu einem Bilde des Punktes A, und dieses Bild erscheint hell oder dunkel je nach den Phasenbeziehungen (Gangunterschieden) in den von A ausgehenden Anteilen der Strahlen 1, 2, 3 usw. Im Punkte A, in dem sich die betrachteten Strahlen schneiden, findet tatsächlich Interferenz statt, genau wie bei den sich schneidenden Strahlen im Falle des Fresnelschen Spiegelversuchs (§ 484). Aus dem am Schluß von § 440 angegebenen Grunde genügt es, wenn wir nur die Wirkung der Strahlen 1 und 2 betrachten. Solange die Entfernung der Lichtquelle groß bleibt gegen die Dicke der Platte, ergeben sich dann für die in A auftretende Interferenzerscheinung genau die gleichen Bedingungen wie bei parallelem einfallenden Licht im reflektierten Strahl (§ 439, Gl. 3).

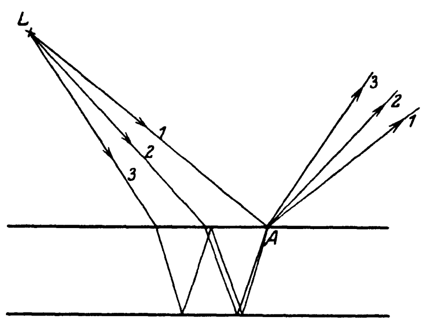


Abb. 420. Fresnelsche Interferenzen an einer planparallelen Platte.

Handelt es sich um eine ausgedehnte Lichtquelle, so wird bei gegebener Stellung des betrachtenden Auges das von ihren einzelnen Punkten herrührende Licht unter verschiedenen Einfallswinkeln α auf die Platte fallen. Betrachtet man daher die Platte, so wechseln auf ihr Stellen, an denen das auffallende Licht durch Interferenz ausgelöscht wird, mit solchen ab, an denen Verstärkung stattfindet, je nach dem für die betreffende Stelle durch die gegenseitige Stellung der Lichtquelle, des Auges und der Platte gegebenen Winkel α.

Der bei einer solchen Interferenzerscheinung erzeugte Sinneseindruck ist ein doppelter. Richtet man die Aufmerksamkeit auf die Lichtquelle selbst,

indem man auf ihr Spiegelbild in der Platte akkommodiert, so sieht man dieses Spiegelbild an der durch das Reflexionsgesetz bestimmten Stelle hinter der Platte, aber im Falle einer monochromatischen Lichtquelle durchzogen mit dunklen Streifen. Diese jedoch liegen nicht am Ort der Lichtquelle, sondern in der Platte, denn der Ort, an dem die Interferenz stattfindet, von dem aus die interferierenden Strahlen in unser Auge divergieren, liegt ja in der Plattenoberfläche. Daß die Interferenzerscheinung tatsächlich in der Platte selbst liegt, erkennt man am deutlichsten daran, daß man auf sie bei zu kleiner Augenentfernung nicht mehr akkommodieren kann, während man das Spiegelbild der entfernteren Lichtquelle noch deutlich sieht.

Bei nicht monochromatischen Lichtquellen, insbesondere bei weißem Licht, ergeben sich wieder Farberscheinungen, die denjenigen, die in § 439 besprochen wurden, ganz äquivalent sind.

442. Interferenzen an keilförmigen Schichten. NEWTONsche Ringe. Auf eine schwach keilförmige, von zwei ebenen Flächen begrenzte dünne Schicht einer brechenden Substanz falle paralleles Licht (Abb. 421). Wir betrachten einen Punkt A an der Oberfläche dieser Schicht. Sehen wir von Strahlen, die mehr als eine Reflexion im Innern der Schicht erlitten haben, ab (vgl. die Bemerkung am Schlusse von § 440), so treten bei A nur Anteile von zwei ganz bestimmten Strahlen 1 und 2 des einfallenden Strahlenbündels aus, nämlich ein direkt reflektierter Anteil von 1 und ein zweimal gebrochener und einmal im Innern reflektierter Anteil des Strahles 2. Wegen der Keilform der Schicht verlaufen diese beiden Strahlanteile nicht wie im Fall der planparallelen Schicht und parallelen einfallenden Lichtes in der gleichen Richtung, sondern divergieren von A aus. Es treten also im reflektierten Licht Erscheinungen auf, die denen bei einer planparallelen Platte bei endlicher Entfernung der Lichtquelle gleichen (§ 441). Man sieht, daß die beiden Strahlen im Punkte A interferieren und einander je nach ihren Phasenbeziehungen (ihrem Gangunterschied) gegenseitig verstärken oder schwächen. Der Ort der Interferenzerscheinung liegt also in der Schichtoberfläche.

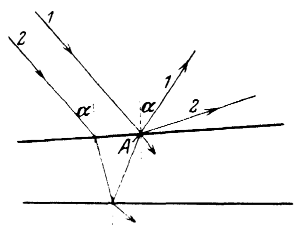


Abb. 421. Zur Interferenz in einer keilförmigen Schicht.

Bei geringer Dicke des Keils und kleinem Keilwinkel gelten auch hier für das Auftreten von Helligkeit oder Dunkelheit im Punkt A die gleichen Bedingungen wie bei einer Planplatte (Gl. 3, § 439). Da nun die Dicke d der Schicht von Ort zu Ort variiert, so ändert sich auch von Ort zu Ort der Gangunterschied der miteinander interferierenden Strahlen. Man erblickt bei parallelem, monochromatischem einfallenden Licht ein System von hellen und dunklen Streifen. Diese sind um so weiter voneinander entfernt, d. h. um so breiter, je kleiner der Keilwinkel ist. Jeder Streifen entspricht gleicher Dicke des Keils an den Stellen, wo der Streifen zu sehen ist. Man spricht deshalb in diesem Falle von Interferenzen gleicher Dicke.

Ein besonderer Fall derartiger Interferenzen liegt bei den sog. NEWTONschen Farbenringen vor (von BOYLE entdeckt, von HOOKE und NEWTON genauer untersucht). Sie entstehen, wenn man Licht auf eine Luftschicht fallen läßt, die sich zwischen einer ebenen Glasplatte und einer scharf auf diese gepreßten, schwach gekrümmten Linse befindet. Die einzelnen Segmente dieser Luftschicht kann man nahezu als keilförmig ansehen. Man sieht dann bei Verwendung monochromatischen Lichtes helle und dunkle Kreise, deren Mittelpunkt im Berührungspunkt von Platte und Linse liegt. Bei ausreichend enger Berührung erscheint im reflektierten Licht in der nächsten Umgebung der Be-

rührungsstelle wegen extrem kleiner Dicke der Luftschicht der „schwarze Fleck" (§ 439). Die Breite der hellen und dunklen Kreise nimmt wegen der zunehmenden Dicke der Luftschicht von innen nach außen immer mehr ab (Abb. 422).

Bei Verwendung von weißem Licht treten farbige Interferenzkreise auf. Die Farben rühren, wie bei den Seifenblasen, davon her, daß an jeder Stelle bestimmte Wellenlängen durch Interferenz ausgelöscht werden, so daß durch Ausfall der betreffenden Farben an Stelle von Weiß die zugehörige Komplementärfarbe entsteht.

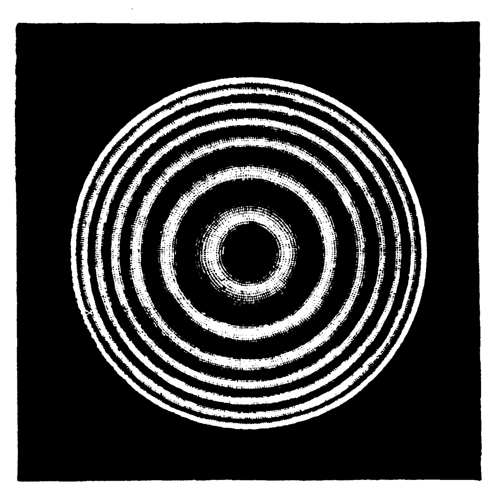


Abb. 422. NEWTONsche Ringe im reflektierten Licht.

443. Interferometer. Ein Interferometer (auch Interferenzrefraktor genannt) beruht auf der Interferenz kohärenter Lichtstrahlen. Als Beispiel betrachten wir das Interferometer von JAMIN. Es kann u. a. dazu dienen, sehr kleine Unterschiede oder Änderungen im Brechungsindex von Substanzen zu messen. Es besteht in der Hauptsache aus zwei sehr gut planparallelen Glasplatten P_1 und P_2, welche um einen außerordentlich kleinen und deshalb in der Abb. 423 nicht angedeuteten Winkel gegeneinander geneigt sind. Der auf die Oberfläche I von P_1 fallende Strahl spaltet sich in einen reflektierten und einen gebrochenen Anteil S_1 und S_2, welche in ihrem weiteren aus der Abbildung ersichtlichen Verlauf in gleicher Weise an der Oberfläche III der Platte P_2 noch einmal zerlegt werden. So entstehen aus dem einen einfallenden Strahl vier kohärente Strahlen, von denen S_1' und S_2'' abgeblendet werden. Die beiden durch die Austrittblende austretenden Strahlen S_2' und S_1'' würden zusammenfallen und hätten seit der ersten Spaltung gleich lange optische Wege

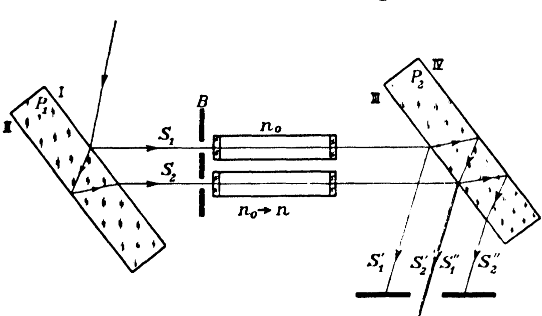


Abb. 423. Interferometer nach JAMIN.

durchlaufen (von den übrigen Teilen der Apparatur zunächst abgesehen), wenn die Platten keinerlei Neigung gegeneinander hätten. Die kleine vorhandene Neigung bewirkt, daß ihre optischen Wege ein wenig verschieden lang sind, und daß sie selbst ein wenig gegeneinander geneigt verlaufen, genau wie die von den beiden sekundären Lichtquellen beim FRESNELschen Spiegelversuch herkommenden Strahlen. Infolgedessen entsteht in der Blende ein System von Interferenzstreifen, genau wie bei jenem Versuch. Die Lage der Interferenzstreifen ist von der Differenz der optischen Weglängen abhängig. Bringt man nun in den Weg der beiden Strahlen S_1 und S_2 je eine Röhre, die gleich lang und zunächst mit der gleichen Substanz (Brechungsindex n_0) gefüllt seien, z. B. Luft, so ändert sich bei gleicher Röhrenlänge an der Differenz der optischen Weglängen, also auch an der Interferenzerscheinung, nichts. Ändert man aber jetzt den Brechungsindex in der einen der beiden Röhren allmählich von n_0 auf n, etwa durch Veränderung des Druckes

so ändert sich die Differenz der optischen Weglängen, und dies hat zur Folge, daß sich die Interferenzstreifen verschieben. Aus der Größe dieser Verschiebung kann man die Änderung des Brechungsindex berechnen.

Ändert man auf irgendeine andere Weise die Lichtgeschwindigkeit in der einen der beiden Röhren, so wirkt dies genau wie eine Änderung des Brechungsindex, bzw. der optischen Weglänge. Das kann z. B. so geschehen, daß man in beide Röhren die gleiche Flüssigkeit bringt, die aber in der einen ruht, in der andern längs des Rohres strömt. Es ist plausibel, daß das Licht das Rohr schneller durchläuft, wenn die Strömung in der Richtung der Lichtfortpflanzung erfolgt, langsamer, wenn das Umgekehrte der Fall ist. Die Strömung sollte also im ersten Falle die optische Weglänge verkürzen, im zweiten verlängern. Die Größe dieser sog. Mitführung des Lichts kann demnach mit dem Interferometer gemessen werden. Der von FRESNEL experimentell gefundene sog. Mitführungskoeffizient hat seine quantitative Deutung erst durch die Relativitätstheorie gefunden und bildet eine der wichtigsten Stützen dieser Theorie (§ 536). Hier sei vorläufig nur erwähnt, daß die Geschwindigkeit des Lichts relativ zum umgebenden Raum nicht, wie man erwarten sollte, gleich der algebraischen Summe der Strömungs- und der Lichtgeschwindigkeit ist, sondern kleiner als diese Summe.

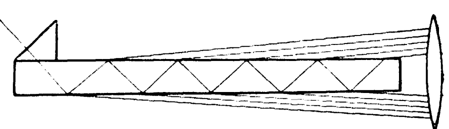


Abb. 424. Interferometer nach LUMMER und GEHRCKE.

Von den sonstigen Interferometertypen sei noch dasjenige von LUMMER und GEHRCKE erwähnt (Abb. 424). Das zu untersuchende Licht fällt von links her durch das rechtwinklige Glasprisma in eine sehr genau planparallele Glasplatte, an deren Seitenflächen es zum Teil nach außen gebrochen, zum Teil wieder ins Innere reflektiert wird (vgl. § 439). Auf diese Weise entstehen aus dem einen Strahl Bündel paralleler, kohärenter Strahlen, die unter sich, wie man leicht sieht, einen sehr großen Gangunterschied haben. Der Austrittswinkel aus der Platte hängt von der Wellenlänge ab. Die Linse vereinigt die austretenden parallelen Strahlen in ihrer Brennebene. Dieses Interferometer dient in erster Linie zur Untersuchung der Feinstruktur von Spektrallinien.

444. **Das HUYGENSsche Prinzip in der Optik. Beugung des Lichtes.** Das im § 136 erläuterte HUYGENSsche Prinzip findet für die Lichtwellen genau die gleiche Anwendung wie für andere Wellen. Es besagt in diesem Falle also, daß man jeden von Licht getroffenen Punkt im Raum als Ausgangspunkt einer von ihm rings in den Raum gehenden Lichtstrahlung betrachten kann. Breitet sich Licht aus, ohne auf Körper zu treffen, oder sind die in den Weg des Lichts tretenden Körper oder Öffnungen in solchen groß gegen die Wellenlänge des Lichts, so ergibt sich die geradlinige Fortpflanzung des Lichts, indem das in allen anderen Richtungen von einem Raumpunkt ausgehende Licht durch Interferenz mit Licht, das von anderen Raumpunkten ausgeht, ausgelöscht wird und nur das der geradlinigen Fortpflanzung entsprechende Licht übrigbleibt. Zur Hervorrufung von Beugungserscheinungen (§ 137) muß man daher Körper oder Öffnungen verwenden, deren Dimensionen mit der Wellenlänge des Lichts vergleichbar sind. Man unterscheidet je nach der Lage der Lichtquelle FRESNELsche und FRAUNHOFERsche Beugungserscheinungen (§ 437).

445. **FRESNELsche Beugungserscheinungen.** Eine als punktförmig gedachte Lichtquelle L befinde sich in einigem Abstande von einem Schirm S, in der sich eine enge Blende, z. B. eine kleine kreisförmige Öffnung befindet (Abb. 425), deren Durchmesser nicht groß gegen die Wellenlänge des von L

ausgehenden Lichtes ist. Nach dem HUYGENSschen Prinzip wird diese Öffnung zu einer Lichtquelle, von der aus nach allen Richtungen Licht ausgeht. Sie unterscheidet sich aber von einer selbstleuchtenden Fläche dadurch, daß die von ihren sämtlichen Punkten ausgehenden Lichtstrahlen wegen ihres Ursprunges von der gleichen punktförmigen Lichtquelle L unter sich kohärent, also interferenzfähig sind. Wir betrachten einen beliebigen Punkt P in dem Raum hinter der Öffnung. In ihm schneiden sich Strahlen, welche von allen einzelnen Punkten der Öffnung herkommen und die auf ihrem Wege von L über die Öffnung nach P verschieden lange Wege durchlaufen, also Gangunterschiede gegeneinander gewonnen haben. Die Lichtwirkung in P hängt davon ab, ob diese einzelnen Strahlen sich auf Grund ihrer Gangunterschiede im Durchschnitt gegenseitig verstärken oder schwächen, und zwar wird sich dies von Ort zu Ort anders verhalten, je nach der Lage des Punktes P. Im Raume hinter der Öffnung wird beim Fortschreiten in einer bestimmten Richtung, z. B. in einer zu S parallelen Ebene, die Helligkeit periodisch schwanken.

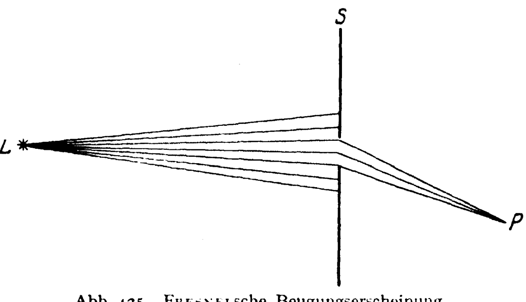


Abb. 425. FRESNELsche Beugungserscheinung an einer engen Blende.

Diese Erscheinung wird am besten sichtbar gemacht, indem man die Lichtquelle zunächst durch eine Linse L auf einen Schirm S' scharf abbildet und dann die beugende Öffnung zwischen Lichtquelle und Linse bringt (Abb. 426). Zur praktischen Ausführung des Versuchs verwendet man als Lichtquelle am besten einen engen Spalt, der z. B. von einer Bogenlampe beleuchtet wird, und als beugende Öffnung ebenfalls einen zum ersten parallelen Spalt. Man sieht dann nach Anbringung des zweiten Spaltes auf dem Schirm S' kein scharfes Bild des ersten Spaltes mehr, sondern eine mehr oder minder verwaschene Lichterscheinung von zueinander parallelen Streifen, deren Helligkeit von der Mitte aus nach beiden Seiten abfällt. Sendet die Lichtquelle monochromatisches Licht aus, so wechselt im Beugungsbild hell und dunkel. Sendet sie weißes Licht aus, so erblickt man Streifen in wechselnden Farben, die, wie z. B. bei den Farben dünner Blättchen (§ 439), dadurch entstehen, daß an jeder Stelle ein bestimmter Farbanteil durch Interferenz maximal geschwächt wird, so daß die dazugehörige Komplementärfarbe auftritt.

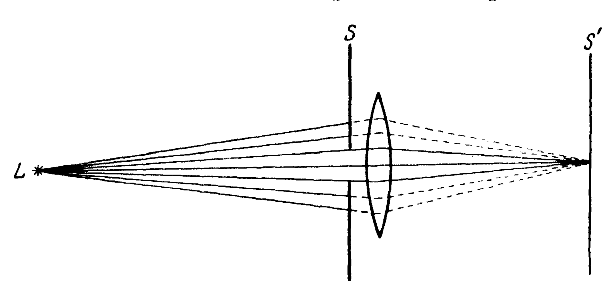


Abb. 426. Erzeugung FRESNELscher Beugungserscheinungen.


Abb. 427. Beugung an einem Haar.

Ganz entsprechende Erscheinungen zeigen sich, wenn man an Stelle des Spaltes ein ganz schmales Hindernis in den Weg des Lichtes bringt. Dieses wirft

dann keinen scharfen Schatten, sondern es zeigt sich wieder eine verwaschene, aus hellen und dunklen (bzw. farbigen) Streifen bestehende Lichterscheinung (Abb. 427). Die Beugungserscheinungen an einem Hindernis, z. B. einem kreisförmigen Schirm, sind genau die gleichen wie an einer Öffnung in einem Schirm, die die gleiche Form und Größe hat wie jener (Theorem von BABINET).

446. FRAUNHOFERsche Beugungserscheinungen. Die Verhältnisse bei der Beugung gestalten sich viel einfacher und übersichtlicher, wenn die auf das beugende Objekt auffallenden kohärenten Strahlen unter sich parallel sind und wenn diejenigen von dem beugenden Objekt ausgehenden Strahlen, die unter sich parallel sind, durch eine Linse auf einem Schirm wieder zur Vereinigung gebracht werden (FRAUNHOFERsche Beugungserscheinungen, Abb. 428).

Abb. 428. Erzeugung von FRAUNHOFERschen Beugungserscheinungen.

In der Ebene des Spaltes ist das einfallende parallele Licht bei senkrechtem Einfall überall in gleicher Phase. Wir greifen jetzt hinter dem Spalt AB ein Strahlenbündel heraus, welches den Winkel α mit der Richtung der einfallenden Strahlen bilde, und fällen das Lot AC. In dieser Ebene befinden sich die einzelnen Strahlen des Bündels nicht mehr in gleicher Phase wie in der Spaltebene. Denn sie haben von dort bis zur Ebene AC verschieden lange Wege zurückzulegen, so daß zwischen ihnen Phasendifferenzen eintreten. Sei z. B. BD gleich der Wellenlänge λ der Strahlen, EF gleich $\lambda/2$, so besteht zwischen den beiden durch C und G gehenden Strahlen ein Gangunterschied $\lambda/2$; sie können sich also gegenseitig auslöschen, wenn man sie irgendwo im gleichen Raumpunkt zur Vereinigung bringt. Ebenso kann man für jeden zwischen den Geraden BC und EG verlaufenden Strahl einen solchen zwischen den Geraden EG und HJ finden, für den das gleiche gilt. Bringt man also in den Strahlengang eine Linse, die die parallelen Strahlen in einem Punkt vereinigt, so löschen sich alle Strahlen des gedachten Bereichs gegenseitig durch Interferenz aus, und es bleibt nur eine Lichtwirkung derjenigen Strahlen übrig, welche aus dem Bereich zwischen A und der Geraden HJ herkommen. Bei größerer Neigung gibt es mehrere Bereiche, deren Strahlen sich gegenseitig auslöschen. Demnach findet vollständige Auslöschung durch Interferenz in denjenigen Richtungen statt, bei denen zwischen den durch A und B gehenden Randstrahlen ein Wegunterschied besteht, der gleich einem ganzzahligen Vielfachen der Wellenlänge ist. Denn in diesem Falle ist kein Restgebiet (AH) mehr vorhanden, dessen Strahlen nicht ausgelöscht werden, sondern es gibt zu jedem in solcher Richtung verlaufenden Strahl einen zweiten, der einen um $\lambda/2$ verschiedenen Weg bis zur Ebene AC zurückzulegen hat. Wie man aus der Abb. 428 entnimmt, sind diese Richtungen durch die Bedingung

$$\sin\alpha = \frac{z\lambda}{a} \tag{5}$$

gegeben, wobei $a = AB$ die Breite des Spaltes und z irgendeine ganze Zahl bedeutet. In der Richtung der einfallenden Strahlen ($\alpha = 0$) findet natürlich maximale Verstärkung statt, da ja die in dieser Richtung verlaufenden Strahlen in allen zur Strahlrichtung senkrechten Ebenen in gleicher Phase sind. Es geht also auch Licht geradlinig durch den Spalt, und zwar mehr als in jeder andern Richtung. Abb. 429 zeigt graphisch die Verteilung der Helligkeit im Beugungsbild eines Spaltes.

Man erkennt aus Gl. 5, daß α, also die Ablenkung, um so größer ist, je größer die Wellenlänge λ ist. Es wird also im sichtbaren Gebiet Rot am stärksten, Violett am wenigsten gebeugt. Da z, α und a leicht zu bestimmen sind, kann man mittels der Beugung am Spalt die Wellenlänge λ des benutzten Lichts messen. Bei Benutzung weißen Lichts überlagern sich die Beugungsbilder der einzelnen Spektralfarben, und es entstehen ebenso wie beim FRESNELschen Spiegelversuch farbige Bänder. Je nach dem Wert von z in Gl. 5 spricht man von Interferenzen erster, zweiter usw. Ordnung.

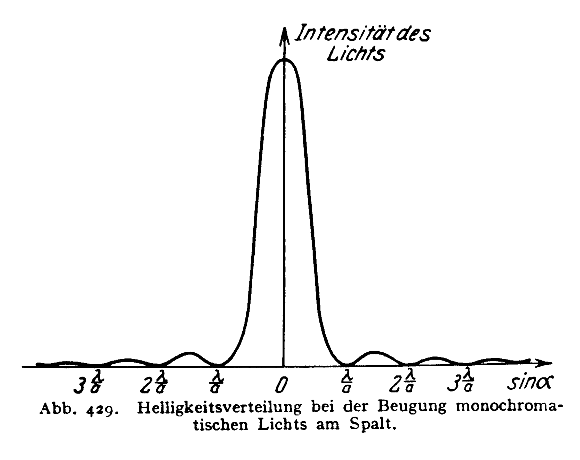


Abb. 429. Helligkeitsverteilung bei der Beugung monochromatischen Lichts am Spalt.

447. Beugung am Gitter. Die Lichtstrahlen, welche an einem Spalt zur Interferenz gelangen, bilden ein zusammenhängendes Bündel einzelner kohärenter Strahlen. Bei den Beugungsgittern (FRAUNHOFER 1817) haben wir es dagegen mit der Interferenz einer großen Zahl überaus schmaler Strahlenbündel zu tun, die alle unter sich kohärent sind. Ein Beugungsgitter besteht in der Regel aus einer planparallelen Glasplatte, auf deren eine Seite mittels eines Diamanten eine sehr große Zahl feiner Striche geritzt ist, bis zu 2000 auf 1 mm. Nur durch die zwischen den Strichen stehengebliebenen, überaus schmalen Teile der Glasfläche kann das Licht ungestört hindurchtreten, an den anderen Stellen wird es zerstreut. So bildet ein solches Gitter gewissermaßen eine große Zahl von sehr schmalen und sehr dicht beieinanderliegenden Spalten (Abb. 430a). (Man kann von solchen Gittern durch einfache photographische Reproduktion oder durch Abguß auf einem Kollodiumhäutchen Kopien herstellen, die allerdings nicht so gut sind wie die Originale.) Man kann auch das Gitter auf eine spiegelnde, hohlspiegelförmig geschliffene Metallfläche ritzen; dann wirken die allein regulär reflektierenden Stellen zwischen den Strichen ebenso wie die unzerstörten Stellen eines Glasgitters, wenn Licht auf sie fällt. Die Hohlspiegelform eines solchen Konkavgitters hat den Vorteil, daß man bei der Aufnahme von Spektren mit dem Gitter die Verwendung einer Linse vermeidet.

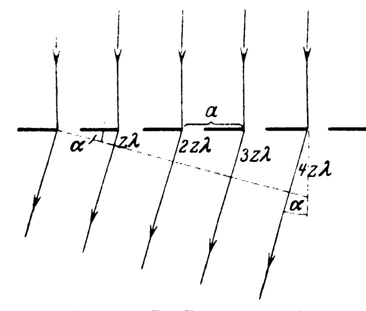


Abb. 430a. Zur Beugung am Gitter.

Wir betrachten jetzt als wichtigsten Fall die FRAUNHOFERschen Beugungserscheinungen am Gitter, d. h. wir lassen parallele, kohärente Strahlen auf das Gitter fallen und betrachten die auf der Rückseite parallel austretenden Strahlen, die dann zwecks Beobachtung der Interferenzerscheinungen durch eine Linse in einen Punkt konzentriert werden müssen. Aus dem einfallenden Bündel greifen wir jetzt homologe Strahlen heraus, z. B. diejenigen, die in Abb. 430a gerade durch den linken Rand der einzelnen Gitterspalte treten. Hinter diesen wird sich das Licht nach dem HUYGENSschen Prinzip wie beim einfachen Spalt nach allen Richtungen ausbreiten. Wir betrachten nun die von den einzelnen Spalten in irgendeiner bestimmten Richtung ausgehenden Strahlen. Es ist ohne weiteres klar, daß sich

die von zwei benachbarten Gitterspalten herkommenden Strahlen gegenseitig maximal verstärken werden, wenn ihr Gangunterschied in der betrachteten Richtung ein ganzzahliges Vielfaches (z-faches) ihrer Wellenlänge ist. Ist diese Bedingung für die obengenannten Strahlen erfüllt, so ist sie in der gleichen Richtung — gleiche Breite der Gitterspalte und gleichen Gitterabstand a vorausgesetzt — auch für alle anderen durch die Spalte tretenden Strahlen erfüllt. Aus der Abb. 430a liest man ab, daß die Richtungen maximaler Verstärkung durch die Bedingung

$$\sin\alpha = z\frac{\lambda}{a} \tag{6}$$

gegeben sind, wobei a den Abstand zweier benachbarter homologer Gitterpunkte, die sog. Gitterkonstante, und z irgendeine ganze Zahl ist. Je nach der Größe von z unterscheidet man Interferenzen 1., 2. usw. Ordnung. Die strenge Theorie des Beugungsgitters, auf die hier nicht eingegangen werden kann, ergibt, daß, je größer die Zahl der Gitterstriche ist, die durchgehende Lichtintensität um so mehr ausschließlich in den durch Gl. 6 gegebenen Richtungen konzentriert ist. Es entstehen hier also bei Verwendung monochromatischen Lichtes nach Konzentration durch eine Linse scharfe Spektrallinien. Weißes Licht ergibt ein Spektrum mit reinen Spektralfarben.

Man beachte, daß die Interferenzerscheinungen beim Gitter auf völlig andere Weise zustande kommen als beim einzelnen Spalt. Das ist schon daran zu erkennen, daß zwar die Gl. 5 und 6 formal identisch sind, daß aber die auf den Spalt bezügliche Gl. 5 die Richtung maximaler Auslöschung, die auf das Gitter bezügliche Gl. 6 die Richtung maximaler Verstärkung angibt, und daß a in Gl. 5 die Spaltbreite, in Gl. 6 die Gitterkonstante bedeutet.

Befindet sich hinter dem Spalt eine Substanz vom Brechungsindex n, so ist, wenn λ die Wellenlänge im Vakuum bedeutet, statt λ in Gl. 6 die Wellenlänge λ/n in dieser Substanz einzusetzen (§ 436), so daß dann die Bedingung gilt

$$\sin\alpha = \frac{1}{n}\cdot\frac{z\lambda}{a}. \tag{7}$$

Betrachtet man eine nahezu punktförmige Lichtquelle durch einen engmaschigen Stoff, z. B. eine entfernte Straßenlaterne durch den Stoff eines Regenschirms hindurch, so erblickt man Spektralfarben, welche von einer Beugung des Lichts durch die Öffnungen im Stoffe herrühren. Der Stoff bildet ein sog. Kreuzgitter, so, wie wenn man ein Glasgitter mit zwei zueinander senkrechten Strichsystemen herstellte.

Ein Beugungsgitter kann, ebenso wie ein Prisma, zur Aufnahme der Spektren von Lichtquellen dienen. Je höher die Ordnung des Spektrums ist, um so größer ist die Dispersion, d. h. der Abstand zweier Spektrallinien von bestimmter Wellenlängendifferenz. Da es sich in praktischen Fällen stets um kleine Ablenkungen α handelt, so kann man statt Gl. 6 auch schreiben $\alpha = z\lambda/a$. Die Ablenkung des Lichts beim Gitter ist also der Wellenlänge proportional, während dies beim Prismenspektrum keineswegs der Fall ist (Abb. 430b). Man nennt daher das Gitterspektrum auch Normalspektrum. Kennt man die Gitterkonstante a, so kann man aus der Ablenkung α des Lichts die Wellenlänge berechnen. Aus Gl. 6 folgt, daß im Gegensatz zum Prismenspektrum beim Gitter die Ablenkung um so größer ist, je größer λ ist. Im sichtbaren

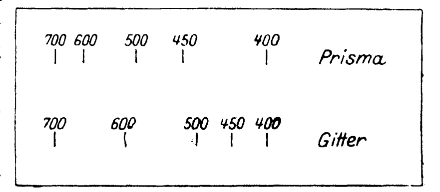


Abb. 430b. Vergleich eines Gitter- und eines Prismenspektrums. Wellenlängen in mμ. Die Spektren sind so gezeichnet, daß sie bei 400 und 700 mμ zusammenfallen.

Gebiet wird also das rote Licht am stärksten, das violette Licht am wenigsten abgelenkt.

Mit dem Strichgitter kommt man wegen der geringen Lichtstärke der höheren Ordnungen über die dritte Ordnung meist nicht hinaus, auch überdecken sich die höheren Ordnungen in stets zunehmendem Maße. Interferenzen sehr viel höherer Ordnung erzielt man mit dem sog. Stufengitter und der LUMMER-GEHRCKE-Platte (§ 443). Beiden ist gemeinsam, daß bei ihnen ein großer Gangunterschied der Strahlen dadurch erzielt wird, daß die einzelnen Teile eines Strahlenbündels sehr verschieden lange Wege in Glas zurückzulegen haben.

Beim Gitter ist zwischen der Dispersion und dem Auflösungsvermögen wohl zu unterscheiden. Die Dispersion ist um so größer, je größer die Differenz der Winkel α für irgend zwei verschiedene Wellenlängen ist. Das Auflösungsvermögen aber ist die Fähigkeit, zwei nahe benachbarte Spektrallinien noch getrennt sichtbar zu machen. Es ist also von der Dispersion abhängig. Aber nicht allein von dieser, sondern auch von der Schärfe der Spektrallinien. Denn bei gleicher Dispersion können zwei nahe benachbarte Spektrallinien noch zusammenfließen, wenn sie ausreichend breit sind. Die Spektrallinien sind aber um so schärfer, je größer die Zahl der Gitterstriche ist. Demnach hängt auch das Auflösungsvermögen eines Gitters von dieser Zahl entscheidend ab.

Die Intensität der Gitterspektren nimmt im allgemeinen mit steigender Ordnungszahl schnell ab. Doch kann man es durch Wahl eines geeigneten Profils der Gitterstriche (Furchenform) erreichen, daß die Intensität einer bestimmten Ordnung besonders groß ist.

448. Beugung und Zerstreuung an kleinen Teilchen. Wie bereits in § 445 erwähnt, bewirken nicht nur kleine Öffnungen, sondern auch Hindernisse, deren Dimensionen nicht groß gegen die Wellenlängen sind, eine Beugung des Lichts. Durch sie erklärt sich zum großen Teil die Unschärfe der durch Nebel, Rauch u. dgl. gesehenen Gegenstände, ebenso die gelegentlich sichtbaren „Höfe“ um Sonne und Mond, die von einer Beugung an feinen, in hohen Atmosphärenschichten schwebenden Eisnadeln herrühren. Jedes einzelne kleine beugende Objekt ergibt ein sog. Beugungsscheibchen, d. h. es wirft keinen scharf begrenzten Schatten. An dessen Stelle treten unscharfe, aus Systemen von hellen und dunklen Ringen bestehende Lichterscheinungen.

Von der Beugung an kleinen Teilchen, die von der Größenordnung der Lichtwellenlänge des Lichtes sind, ist die Zerstreuung des Lichtes an noch kleineren Teilen zu unterscheiden, bei der das Licht aus seiner Richtung abgelenkt wird, ohne daß zwischen den einzelnen abgelenkten Strahlen Phasenbeziehungen bestehen, die zu Interferenzerscheinungen Veranlassung geben.

Auch die Moleküle eines Gases wirken zerstreuend auf das Licht, und zwar um so mehr, je kleiner die Wellenlänge ist. Daher rührt die blaue Farbe des Himmels. Aus dem die ganze Atmosphäre erfüllenden Sonnenlicht wird das kurzwellige blaue Licht von den Molekülen weitaus am stärksten abgebeugt, das langwelligere rote viel weniger. Jedes Molekül der bestrahlten Atmosphäre wird daher zum Ausgangspunkt von blauem Licht, und so scheint uns das Himmelsgewölbe in blauem Lichte zu leuchten. Steht die Sonne am Horizont, so hat ihr Licht in der Atmosphäre eine besonders lange Wegstrecke zu durchlaufen, auf der es durch Beugung seinen blauen Anteil zum großen Teil verliert. Die Sonne erscheint daher beim Aufgehen und Untergehen rot, um so mehr, je mehr beugende Teilchen (Staub, Nebel) sich in der Atmosphäre befinden.

Bildet man eine beleuchtete kreisförmige Blende mit einer Linse auf einem Schirm ab und bringt zwischen die Blende und die Linse eine behauchte oder

noch besser eine mit Lykopodium bestreute Glasplatte, so zeigt das Bild die gleichen Erscheinungen wie die Höfe um Sonne und Mond.

Die Trübheit vieler Stoffe rührt von dem Vorhandensein kleiner beugender oder zerstreuender Teilchen in ihnen her.

449. Wellentheorie der optischen Abbildung. Beugung im Mikroskop. Ultramikroskop. Damit von einem Punkt eines Gegenstandes in einem andern Punkt des Raumes ein Bild entsteht, ist es notwendig, daß sich die von dem ersten Punkt herkommenden kohärenten Wellenzüge in diesem Punkt gleichzeitig schneiden. Wegen der begrenzten Länge der Wellenzüge (§ 437) ist es aber ferner notwendig, daß die optischen Weglängen dieser Wellenzüge, die ja den zweiten Punkt auf verschiedenen Wegen erreichen, gleich groß sind. Wir haben dies bereits in § 414 als ein wesentliches Merkmal der Linsenwirkung bezeichnet, das wir aber erst jetzt auf Grund der Wellentheorie verstehen können. Wir wollen hier einen ganz einfachen Fall, nämlich die Abbildung durch einen Hohlspiegel, betrachten. Dieser Fall ist deshalb besonders einfach, weil keine brechenden Stoffe im Spiel sind, die optischen Weglängen also gleich den geometrischen Weglängen sind.

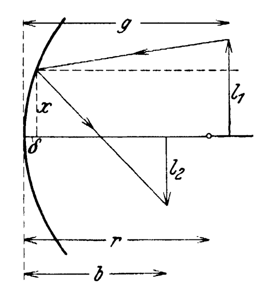


Abb. 431. Zur Wellentheorie der Abbildung bei einem Hohlspiegel.

Abb. 431 stellt einen Hohlspiegel dar, der von dem Gegenstand l_1 ein Bild l_2 entwirft. Wir betrachten die Abbildung der Pfeilspitze und greifen einen beliebigen von der Spitze des Gegenstandes über den Spiegel zur Spitze des Bildes verlaufenden Strahl heraus. Es seien b und g die Entfernungen der Fußpunkte des Gegenstandes und des Bildes vom Spiegelscheitel, r der Krümmungsradius des Spiegels. Der senkrechte Abstand des Reflexionspunktes von der Spiegelachse sei x, sein senkrechter Abstand von der den Scheitel berührenden Tangentialebene sei δ. Wir setzen gemäß den bereits in § 407 gemachten Einschränkungen voraus, daß x und daher erst recht δ sehr klein gegen g, b und r sind. Dann ergibt sich aus den geometrischen Eigenschaften des Kreises durch eine einfache Rechnung, daß δ sehr nahezu gleich $x^2/2r$ ist.

Zunächst kann man aus der Abb. 431 folgendes entnehmen. Die Bedingung, daß alle Lichtwege von der einen Pfeilspitze zur andern gleich lang sind, kann bei einem sphärischen Spiegel streng nie erfüllt sein. Sie wäre auf Grund einer bekannten Eigenschaft der Ellipse nur bei einem Spiegel erfüllt, dessen Querschnitt eine Ellipse ist, deren Brennpunkte in den beiden Pfeilspitzen liegen. Je nach der Lage dieser Punkte hätte auch die Ellipse bei festgehaltenem Spiegelscheitel eine etwas andere Gestalt und eine andere Achsenrichtung. Die Abbildung durch einen sphärischen Spiegel muß daher notwendig unvollkommen sein. Sie wird um so vollkommener, ein je kleineres Stück einer Kugelfläche der Spiegel bildet, denn um so besser läßt sie sich durch ein Rotationsellipsoid annähern. Für die vollkommene Abbildung eines auf der Spiegelachse unendlich fern oder im Brennpunkt des Spiegels gelegenen Punktes müßte der Spiegel parabolischen Querschnitt haben.

Wir wollen nunmehr den in Abb. 431 dargestellten Lichtweg s berechnen. Es ist

$$s = \sqrt{(g-\delta)^2 + (l_1 - x)^2} + \sqrt{(b-\delta)^2 + (l_2 + x)^2}.$$

Nun ist $l_1 - x$ und $l_2 + x$ nach den oben gemachten Voraussetzungen klein gegen g und b. Eine Reihenentwicklung, bei der wir nur die Glieder zweiter Ordnung berücksichtigen und ferner Glieder, die mit der sehr kleinen Größe δ^2 multipliziert sind, vernachlässigen, ergibt dann

$$s = g - \delta + \frac{(l_1 - x)^2}{2g} + b - \delta + \frac{(l_2 + x)^2}{2b}.$$

Setzen wir nun noch $\delta = x^2/2r$, so folgt

$$s = g + b + \frac{l_1^2}{2g} + \frac{l_2^2}{2b} - x\left(\frac{l_1}{g} - \frac{l_2}{b}\right) + \frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{g} + \frac{1}{b} - \frac{2}{r}\right).$$

Nun sollen die optischen Weglängen für alle über den Spiegel von einer Spitze zur andern verlaufenden Strahlen einander gleich sein. Das bedeutet, daß s von x unabhängig sein muß. Das ist nur dann möglich, wenn die Klammerausdrücke, mit denen x und x^2 multipliziert sind, gleich Null sind. Daraus folgt

$$1)\ \frac{l_1}{g} = \frac{l_2}{b}, \qquad 2)\ \frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{2}{r} = \frac{1}{f}.$$

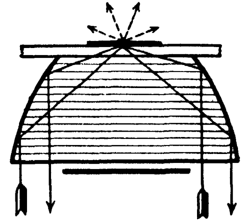
Das aber sind die Gleichungen 1. für die Vergrößerung beim Hohlspiegel (§ 407, Gl. 9) und 2. für die Beziehung zwischen Gegenstands- und Bildentfernung (§ 407, Gl. 7). Damit sind die Gesetze der Abbildung durch einen Hohlspiegel restlos wellentheoretisch gedeutet. Das gleiche läßt sich für die Abbildung durch eine Linse durchführen.

Eine Abbildung ist aber nun nicht nur bei genau gleichen optischen Weglängen möglich, sondern allgemein, sofern die kohärenten Wellenzüge sich überhaupt noch am Bildort treffen, die optischen Weglängen sich also um weniger als die Länge eines Wellenzuges unterscheiden. Im allgemeinen wird dann aber wegen der auftretenden Phasenunterschiede teilweise oder vollständige Auslöschung durch Interferenz eintreten, außer wenn sich die optischen Weglängen um ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge unterscheiden. Daher wird in Wirklichkeit ein Punkt des Gegenstandes nicht in einen einzelnen Punkt abgebildet, sondern das Bild besteht aus einem Punkt, der sehr eng von einer Anzahl konzentrischer, mit der Entfernung schnell an Helligkeit abnehmender Interferenzringe umgeben ist. Es ist ein Beugungsscheibchen. Wir haben das bereits bei der Abbildung der Fixsterne im Fernrohr erwähnt (§ 425).

Für die Auflösung von Strukturen durch ein optisches Instrument folgt aus diesen Überlegungen, daß die Größe der noch auflösbaren Strukturen durch die Größe der Beugungsscheibchen gegeben ist. Wir wollen diese Betrachtungsweise im einzelnen hier nicht durchführen, sondern uns mit einer etwas einfacheren Überlegung begnügen. Man denke sich ein Beugungsgitter der im § 447 beschriebenen Art unter einem Mikroskop. Damit von der Struktur dieses Objekts im Tubus ein reelles Bild entsteht, ist es notwendig, daß außer dem ungebeugt durch das Gitter hindurchgehenden mittleren Strahl noch mindestens der Strahl erster Ordnung durch das Objektiv des Mikroskops hindurchtritt. Ist die Gitterkonstante aber sehr klein, also die Ablenkung sehr groß, so ist dies nicht mehr der Fall. Das Mikroskop gibt kein Bild der Struktur des Gitters mehr, es löst die Struktur nicht auf. Die gleiche Überlegung kann man auf alle anderen Arten von Strukturen, die mit einem Mikroskop betrachtet werden, übertragen. In dieser Tatsache liegt der Grund für die im § 426 besprochene Grenze des Auflösungsvermögens eines Mikroskops. Bringt man zwischen Objekt und Objektiv eine Substanz von großem Brechungsindex n (Immersionsflüssigkeit), so wird der Ablenkungswinkel, wie man aus Gl. 7, § 447, abliest, kleiner, und es können noch feinere Strukturen aufgelöst werden. Der Ausdruck für die numerische Apertur in § 426 wird jetzt durch Vergleich mit Gl. 7 ohne weiteres verständlich.

Handelt es sich darum, sehr kleine Gebilde, z. B. gewisse sehr kleine Bakterien, Goldteilchen in kolloidaler Goldlösung bei der BROWNschen Bewegung (§ 159) u. dgl. unter Verzicht auf eine Abbildung ihrer Form wenigstens noch sichtbar zu machen, so kann man so verfahren, daß man das Objekt

nicht senkrecht von unten her, sondern schräge von unten stark beleuchtet. Abb. 432 zeigt eine Vorrichtung, welche bewirkt, daß das Licht sehr schräg auf das Objekt fällt. Dann gelangen nicht der mittlere Strahl und die Strahlen niederer Ordnung in das Mikroskop, sondern die viel dichter beieinanderliegenden gebeugten Strahlen höherer Ordnung. In diesem Falle erscheinen die bei gewöhnlichen Mikroskopen unter der Sichtbarkeitsgrenze liegenden Gebilde — bis zu einer unteren Grenze von etwa $4 \cdot 10^{-6}$ mm — als leuchtende, runde Beugungsscheibchen von je nach ihren Dimensionen verschiedener Farbe auf dunklem Grunde (Dunkelfeld). Zu diesem Zwecke eingerichtete Mikroskope heißen Ultramikroskope.


Abb. 432. Kondensor für Dunkelfeldbeleuchtung.

450. Stehende Lichtwellen. WIENER ist es gelungen, analog zu den stehenden Schallwellen (§ 143) stehende Lichtwellen zu erzeugen. Er ließ paralleles Licht auf eine durchsichtige, mit Bromsilber versetzte Gelatineschicht fallen, die auf einer Quecksilberoberfläche lag, die die Lichtwellen reflektierte. Die einfallenden und austretenden Wellen interferieren miteinander und bilden Knoten und Bäuche, die man unter dem Mikroskop am Querschnitt der entwickelten Bromsilber-Gelatineschicht als helle und dunkle Streifen erkennen kann.

451. Der optische DOPPLER-Effekt. Wie bei jedem andern Schwingungsvorgang, so tritt auch beim Licht ein DOPPLER-Effekt, d. h. eine Änderung der Schwingungszahl ein, wenn sich die Lichtquelle relativ zum Beobachter bewegt (§ 129). Die Größe des Effekts, der sich in einer Verschiebung der Spektrallinien der Lichtquelle nach Rot oder Violett äußert, hängt von dem Verhältnis v/c der Geschwindigkeit v der Lichtquelle und der Lichtgeschwindigkeit c ab (vgl. hierzu § 534). Beobachtbare Effekte sind daher bei Geschwindigkeiten unter einigen km/sec nicht zu erwarten. Solche Geschwindigkeiten können wir ausgedehnten Lichtquellen auf der Erde nicht erteilen. Hingegen haben die leuchtenden Atome in den Kanalstrahlen (§ 292) ganz erheblich größere Geschwindigkeiten, und bei diesen sind die zu erwartenden Linienverschiebungen in der richtigen Größe gefunden worden. Auch die thermische Bewegung leuchtender Atome macht sich, wie STARK entdeckt hat, in einem optischen DOPPLER-Effekt als eine Verwaschenheit der Spektrallinien bemerkbar. Diese ist daher bei den sehr leichten und daher besonders schnell bewegten Wasserstoffatomen besonders ausgeprägt.

Von großer Bedeutung für die Astronomie ist der DOPPLER-Effekt im Licht der Fixsterne. Es gibt nur äußerst wenige Fixsterne, deren Geschwindigkeit so groß ist, daß man eine direkt meßbare Ortsänderung am Himmel im Laufe längerer Zeiten beobachten kann. Die Verschiebung der Spektrallinien, die von einer Bewegung der Fixsterne relativ zur Erde herrührt, ist aber in vielen Fällen meßbar. Wirksam ist dabei allerdings nur die Komponente der Geschwindigkeit, die in der Verbindungslinie Fixstern—Erde liegt (Radialkomponente). Die Lage der Spektrallinien der Elemente ist im Fixsternspektrum nach Violett oder Rot gegenüber ihrer Lage bei einer auf der Erde ruhenden Lichtquelle verschoben, je nachdem der Fixstern sich der Erde nähert oder sich von ihr entfernt. Man hat auf diese Weise auch das Vorhandensein einer großen Zahl von Doppelsternen, welche umeinander rotieren, an einer periodischen Änderung ihrer Linienverschiebung erkennen können.

Mit Hilfe des DOPPLER-Effekts ist kürzlich auch die sehr interessante Tatsache entdeckt worden, daß sich die außerhalb der Milchstraße stehenden sog. außergalaktischen Sternnebel, die selbst Milchstraßensysteme sind, sämtlich von uns

fortbewegen, und zwar mit um so größerer Geschwindigkeit, je weiter sie von uns entfernt sind (HUBBLE-Effekt). Es sind dabei Geschwindigkeiten bis über 10 000 km/sec gemessen worden.

452. Polarisation durch Reflexion. Es bleibt nunmehr die Frage zu klären, ob das Licht eine longitudinale oder eine transversale Schwingung ist. Im § 137 ist auseinandergesetzt, daß die Polarisierbarkeit über diese Frage entscheidet. Die nachstehend beschriebene, zuerst von MALUS (1808) beobachtete Erscheinung entscheidet sie zugunsten der Transversalität.

Ein Lichtstrahl falle unter einem Einfallswinkel von 57° auf eine ebene Glasplatte (Kronglas) S_1 und werde von ihr auf eine zweite Glasplatte S_2 reflektiert, welche um eine in der Richtung des auf sie fallenden Strahls liegende Achse A gedreht werden kann, und auf welche das reflektierte Licht ebenfalls unter 57° falle (Abb. 433). Zum Auffangen des von der zweiten Glasplatte reflektierten Lichts ist in seiner jeweiligen Richtung ein Schirm angebracht. Dreht man nun die zweite Glasplatte um ihre Drehungsachse A, wobei der Einfallswinkel von 57° stets erhalten bleibt, das reflektierte Licht sich also auf einem Kegelmantel bewegt, so zeigt sich, daß der Lichtfleck auf dem Schirm maximale Helligkeit zeigt, wenn die beiden Platten entweder parallel stehen oder die zweite Platte um 180° gegen die Parallelstellung gedreht ist. Ist sie aber nach einer der beiden Seiten um 90° gegen die Parallelstellung gedreht, so verschwindet der Lichtfleck, die zweite Glasplatte reflektiert das auf sie fallende Licht nicht mehr. Dies beweist erstens, daß mit dem Licht bei der Reflexion an der ersten Glasplatte eine Veränderung vor sich gegangen sein muß. Es beweist aber weiter, daß es sich hierbei um eine Veränderung des Lichts handelt, welche nur bei einer transversalen Schwingung auftreten kann, wie dies bei dem mechanischen Beispiel in § 125 auseinandergesetzt ist. Denn die zweite Glasplatte erweist sich durch diesen Versuch als ein Gebilde, welche ohne Änderung ihrer Orientierung gegen die Richtung des Lichtstrahls seine Fortpflanzung bei einer Drehung um diese Richtung als Achse verschieden beeinflußt. Der am Glase reflektierte Anteil des auffallenden Lichtes ist linear polarisiert, d. h. seine Schwingungen erfolgen nach der Reflexion nur noch in einer bestimmten Ebene. Als Polarisationsebene bezeichnet man (willkürlich) die Einfallsebene an der ersten Glasplatte. Es wird also nur diejenige Komponente des Lichts an der ersten Glasplatte reflektiert, deren Polarisationsebene in der Einfallsebene liegt. Das an der ersten Platte nicht reflektierte Licht wird von dieser durchgelassen. Es enthält außer der zur Einfallsebene senkrecht schwingenden Komponente auch noch Licht der anderen Komponente, wenn auch weniger. Es ist daher teilweise (partiell) polarisiert. Durch Anwendung mehrerer Glasplatten hintereinander (Glasplattensatz) kann man auch das hindurchgehende (gebrochene) Licht weitgehend linear polarisieren.

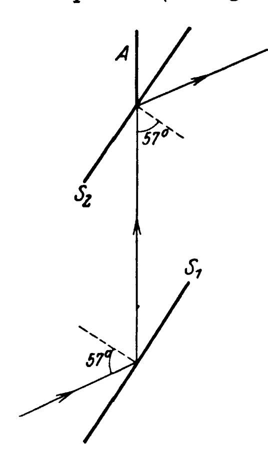


Abb. 433. Zum Nachweis der Polarisation durch Reflexion.

Stehen bei dem beschriebenen Versuch die beiden Platten einander parallel oder unter 180° verdreht, so liegt bei der zweiten Platte die Polarisationsebene des einfallenden Lichts in der Einfallsebene, es wird also reflektiert, in den beiden dazu senkrechten Stellungen aber enthält das einfallende Licht keinen Anteil, dessen Polarisationsebene in der Einfallsebene liegt, es kann also nichts reflektiert werden. Die erste Glasplatte nennt man auch den Polarisator, die zweite den Analysator.

Dieser Versuch beweist, daß das Licht ein transversaler Schwingungsvorgang ist.

Den Winkel von 57^0 nennt man den Polarisationswinkel des Glases. Bei Einfall unter anderm Winkel findet nur eine teilweise Polarisation statt, das Licht ist elliptisch polarisiert. Der Polarisationswinkel hängt vom Brechungsindex n ab. BREWSTER bewies, daß bei vollständiger linearer Polarisation der reflektierte und der in die Substanz gebrochene Strahl aufeinander senkrecht stehen. Es ist daher (Abb. 434) $\alpha + \beta = 90^0$, $\sin\beta = \cos\alpha$, ferner nach § 409 $\sin\beta = \frac{1}{n}\sin\alpha$, und daher

$$\operatorname{tg}\alpha = n. \qquad (8)$$

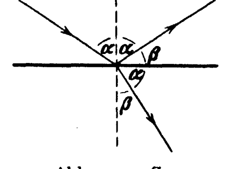


Abb. 434. Zum BREWSTERschen Gesetz.

453. **Elliptisch, zirkular und linear polarisiertes Licht.** Aus den Ausführungen des § 452 folgt, daß wir dem Licht einen Vektor — Lichtvektor — zuordnen können, der senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung des Lichtes steht. Bei natürlichem Licht von konstanter Intensität ist zwar der Betrag dieses Vektors im zeitlichen Durchschnitt stets der gleiche, aber seine Richtung im Raume wechselt in ganz unregelmäßiger und zufälliger Weise.

Der Begriff der elliptischen und zirkularen Polarisation ist bereits im § 125 auseinandergesetzt worden. Elliptisch polarisiertes Licht ist demnach solches, dessen Lichtvektor J sich während einer Schwingung einmal um 360^0 dreht und dessen Intensität dabei periodisch zu- und abnimmt. Man kann sich elliptisch polarisiertes Licht zusammengesetzt denken aus zwei senkrecht zueinander linear polarisierten Komponenten von verschiedenen Amplituden und einer Phasendifferenz von 90^0, so daß die beiden Schwingungen durch die Gleichungen $J_1 = a_1 \sin\omega t$, $J_2 = a_2 \sin(\omega t + \pi/2) = a_2 \cos\omega t$ gegeben sind (Abb. 435a). Wird a_1 oder a_2 gleich Null, so hat der Lichtvektor konstante Richtung. Das Licht ist linear polarisiert. Zirkulare Polarisation ist ein Spezialfall der elliptischen, in dem die beiden Amplituden a_1 und a_2 einander gleich sind (Abb. 435b). Über die Herstellung linear, elliptisch und zirkular polarisierten Lichts s. § 455 und 457.

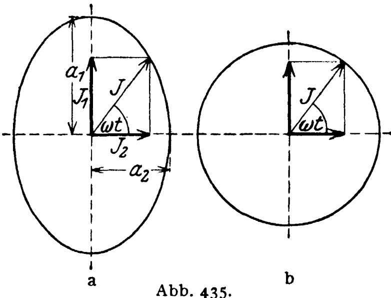


Abb. 435. a Elliptisch, b zirkular polarisiertes Licht.

Schwingungen können sich nur dann gegenseitig vollkommen aufheben, d. h. durch Interferenz auslöschen, wenn sie in der gleichen Ebene erfolgen. Daher können zwei senkrecht zueinander linear polarisierte Strahlen, auch wenn sie kohärent sind, also aus dem gleichen Strahl natürlichen Lichts erzeugt wurden, nicht miteinander interferieren. Auch in dieser Tatsache liegt ein Beweis für die transversale Natur der Lichtschwingungen.

Das von kleinen Teilchen zerstreute Licht ist mehr oder weniger stark polarisiert (TYNDALL-Phänomen). Es ist bereits § 448 gesagt worden, daß die blaue Farbe des Himmelslichts von einer Zerstreuung des Sonnenlichts in der Erdatmosphäre herrührt. Demgemäß treten auch am Himmelslicht derartige Polarisationserscheinungen auf. Nur an zwei vom Sonnenstande abhängigen Punkten des Firmaments ist das Himmelslicht nicht polarisiert (ARAGOscher und BABINETscher Punkt). Die Polarisation des Himmelslichts spielt eine gewisse Rolle in der Meteorologie.

(Man vermeide die laxe Ausdrucksweise, linear polarisiertes Licht einfach als polarisiertes Licht zu bezeichnen, da man zwischen den verschiedenen Arten der Polarisation wohl unterscheiden muß.)

Aus der elektromagnetischen Theorie des Lichtes folgt, daß dem Licht nicht nur ein Vektor zuzuordnen ist, sondern zwei, in nicht doppelbrechenden Medien untereinander und zur Fortpflanzungsrichtung senkrechte Vektoren, nämlich der elektrische und der magnetische Feldvektor. Bei der Polarisation durch Reflexion liegt der elektrische Vektor senkrecht zur Polarisationsebene, der magnetische Vektor in der Polarisationsebene. Es ist im allgemeinen üblich, dem Lichtvektor die Richtung des magnetischen Vektors zuzuordnen.

454. **Doppelbrechung.** Betrachtet man einen Gegenstand, z. B. Schrift, durch ein Spaltstück eines Kalkspatkristalls, so erscheint der Gegenstand doppelt. Die von den einzelnen Punkten des Gegenstandes kommenden Strahlen werden also beim Durchgang durch den Kristall in zwei Strahlen zerlegt, welche eine verschiedene Brechung erleiden (Abb. 436). Diese zuerst von HUYGENS (1690) beobachtete Erscheinung heißt Doppelbrechung. Das Wesen der Doppelbrechung wird durch folgenden Versuch deutlich.



Abb. 436. Doppelbrechung im Kalkspat.

Auf einem Schirm sei eine von hinten beleuchtete kreisförmige Blende mittels einer Linse abgebildet. Bringt man zwischen Linse und Schirm in den Weg des Lichts ein Spaltstück eines Kalkspatkristalls, so entsteht an Stelle des einen ein doppeltes Bild, und zwar steht das eine Bild, wenn die Spaltflächen des Kristalls senkrecht zu den Lichtstrahlen sind, an alter Stelle, das andere ist seitlich verschoben. Dreht man den Kristall um den Lichtstrahl als Achse, so bleibt das erste Bild stehen, das zweite dreht sich um das erste. Verwendet man linear polarisiertes Licht, indem man z. B. in den Strahlengang noch eine unter dem Polarisationswinkel gegen das Licht geneigte Glasplatte als Polarisator einschaltet, so haben die beiden Bilder im allgemeinen verschiedene Helligkeit. Bei zwei um 180° auseinanderliegenden Stellungen des Kristalls ist nur das eine, bei den beiden um 90° dagegen verdrehten Stellungen nur das andere Bild vorhanden, dazwischen liegen alle möglichen Übergänge von hell zu dunkel (Abb. 437).

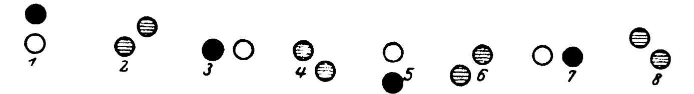


Abb. 437. Zur Brechung in Kalkspat.

Dieser Versuch beweist, daß die beiden Bilder, die mit Hilfe des Kalkspatkristalls entstehen, linear polarisiertem Lichte ihren Ursprung verdanken, derart, daß das Licht, welches das eine Bild erzeugt, senkrecht zu dem das andere Bild erzeugenden Lichte polarisiert ist. Er zeigt ferner, daß das natürliche Licht, welches von der Lichtquelle kommt, im Kalkspat in zwei senkrecht zueinander linear polarisierte Komponenten zerspalten wird, welche in verschiedener Weise gebrochen werden.

455. **Erklärung der Doppelbrechung.** Isotrope amorphe Körper, wie Glas, sowie die Kristalle des regulären Systems, wie das Steinsalz, zeigen keine Doppelbrechung. Bei allen anderen Kristallen ist sie vorhanden. Sie erklärt sich daraus, daß die Lichtgeschwindigkeit in diesen anisotropen Körpern

erstens von der Richtung des Lichts im Kristall und zweitens von der Polarisationsebene des einfallenden Lichts abhängt. Es sei O (Abb. 438) ein Punkt im Innern eines doppeltbrechenden Kristalls, von dem Licht ausgeht. Es zeigt sich, daß sich dieses Licht in zwei senkrecht zueinander linear polarisierte Komponenten spaltet. Bei den sog. einachsigen Kristallen (trigonales, tetragonales und hexagonales System) pflanzt sich die eine dieser Komponenten nach allen Richtungen hin gleich schnell fort, bildet also im Kristall eine Kugelwelle. Bei der andern aber ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in verschiedenen Richtungen verschieden. Ihre Wellenfläche ist ein Rotationsellipsoid. Die Kugelfläche und das Rotationsellipsoid berühren sich in den Endpunkten entweder der großen (positiv einachsig) oder der kleinen Achse (negativ einachsig) der letzteren (Abb. 439a u. b). Die Richtung der Geraden AA', also die Richtung, in der sich beide Komponenten des Lichts gleich schnell fortpflanzen, heißt die optische Achse des Kristalls. (Man beachte, daß die optische Achse keine bestimmte Gerade im Kristall ist, sondern nur eine bestimmte Richtung im Kristall festlegt.) Der Strahl, welcher sich nach allen Richtungen gleich schnell ausbreitet, heißt der ordentliche Strahl, der andere der außerordentliche Strahl. Wegen des Zusammenhangs zwischen Lichtgeschwindigkeit und Brechungsindex (§ 409) hat also ein doppeltbrechender Kristall für den ordentlichen und außerordentlichen Strahl einen verschiedenen Brechungsindex n_o und n_a.

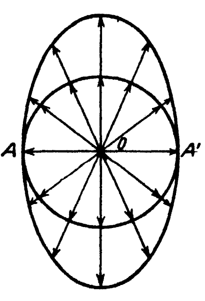


Abb. 438. Zur Erklärung der Doppelbrechung.

Ersterer ist konstant, letzterer hängt von der Richtung im Kristall ab. In Richtung der optischen Achse ist $n_o = n_a$. Für den ordentlichen Strahl gilt das SNELLIUSsche Brechungsgesetz, für den außerordentlichen nicht. Insbesondere liegt bei ihm der gebrochene Strahl nur in Ausnahmefällen in der durch einfallenden Strahl und Einfallslot gebildeten Ebene. Für Strahlen, welche im Kristall in Richtung der optischen Achse verlaufen, ist die Lichtgeschwindigkeit beider Komponenten die gleiche. Schleift man eine Kristallplatte so, daß ihre Begrenzungsflächen senkrecht zur optischen Achse liegen, und läßt Licht senkrecht auf den Kristall fallen, so findet keine Doppelbrechung statt, denn beide Komponenten pflanzen sich gleich schnell durch den Kristall fort. Sind dagegen zwei Begrenzungsflächen parallel zur optischen Achse geschliffen, so findet bei senkrechtem Einfall des Lichts zwar ebenfalls keine Doppelbrechung statt, aber die beiden Komponenten pflanzen sich verschieden schnell durch den Kristall fort, es treten also Gangunterschiede zwischen ihnen auf. Denn wegen des Unterschiedes von n_o und n_a sind ihre optischen Weglängen (§ 409) im Kristall verschieden groß.

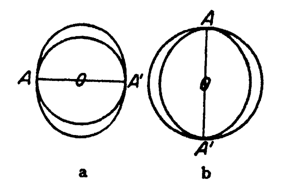


Abb. 439. Wellenflächen im einachsigen Kristall.

Diese Tatsache kann dazu dienen, um aus linear polarisiertem Lichte zirkular polarisiertes Licht herzustellen. Man benutzt dazu eine parallel zur optischen Achse geschnittene, doppeltbrechende Kristallplatte. Ihre Dicke wird so bemessen, daß die Zeiten, die der ordentliche und der außerordentliche Strahl bei senkrechtem Durchtritt zum Durchlaufen der Platte benötigen, sich um die Dauer einer Viertellichtschwingung unterscheiden. Man läßt senkrecht auf die Platte linear polarisiertes Licht fallen, dessen Polarisationsebene unter 45° gegen die Polarisationsebenen des ordentlichen und des außerordentlichen Strahls im Kristall geneigt ist. Der einfallende Strahl zerfällt dann in zwei gleich starke Komponenten, welche beim Eintritt in gleicher Phase sind. Beim Austritt vereinigen sie sich wieder, haben aber nicht mehr gleiche Phase. Der Verzögerung des

einen gegen den andern um die Dauer einer Viertelschwingung bewirkt, daß sie nunmehr eine Phasendifferenz $\pi/2$ haben. Sie bilden, da ihre Amplituden gleich groß sind, nach dem Austritt eine zirkular polarisierte Welle. Bei anderer Orientierung der Polarisationsebene des einfallenden Lichts sind die Amplituden nicht gleich, die austretende Welle ist elliptisch polarisiert. Man benutzt zu diesem Zweck meist Glimmerblättchen von geeigneter Dicke (sog. Viertelwellenlängenblättchen).

Bei den Kristallen des rhombischen, monoklinen und triklinen Systems ist die Lichtgeschwindigkeit für beide senkrecht zueinander polarisierten Komponenten von der Richtung abhängig. Es gibt in ihnen zwei Richtungen, in denen sich die beiden Komponenten gleich schnell fortpflanzen. Diese Kristalle haben also zwei optische Achsen; man nennt sie zweiachsige Kristalle.

Manche doppeltbrechenden Kristalle haben die Eigenschaft, daß sie die eine der beiden linear polarisierten Komponenten stärker absorbieren als die andere. Diese Erscheinung heißt Dichroismus. Sie ist z. B. beim Turmalin sehr stark ausgeprägt. In nicht zu dünnen Schichten läßt er von der einen Komponente so gut wie nichts hindurch, während die andere weit weniger geschwächt wird. Eine parallel zur optischen Achse geschnittene Turmalinplatte kann daher zur Herstellung linear polarisierten Lichts sowie als Analysator dienen und wird dazu insbesondere in der Mineralogie und Kristallographie viel benutzt.

456. FRESNELsche Konstruktion der Doppelbrechung. Die gebrochenen Strahlen können nach FRESNEL im Falle der Doppelbrechung in genau der gleichen Weise konstruiert werden wie bei der gewöhnlichen Brechung, jedoch muß man die beiden Komponenten, in die das Licht zerfällt, gesondert behandeln. Wir beschränken uns hier auf die einachsigen Kristalle und auf zwei besonders einfache Fälle, nämlich auf diejenigen, in der auch der außerordentliche Strahl in der Einfallsebene verbleibt. Wegen des Grundgedankens der Konstruktion sei auf § 133 verwiesen.

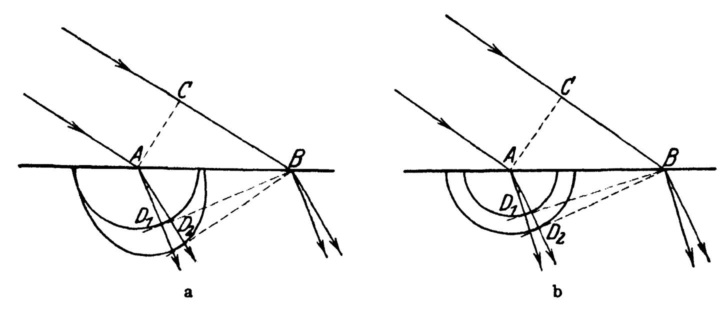


Abb. 440. FRESNELsche Konstruktion der Doppelbrechung.

1. Die optische Achse liegt in der Einfallsebene (Zeichnungsebene, Abb. 440 a). Der Querschnitt der einen Wellenfläche ist ein Kreis, der der andern eine den Kreis in der optischen Achse berührenden Ellipse. Von B aus werden die Tangenten BD_1 und BD_2 an Kreis und Ellipse gelegt. AD_1 ist der ordentliche, AD_2 der außerordentliche Strahl. Je nachdem die Ellipse außerhalb, wie in der Abb. 440a, oder innerhalb des Kreises liegt, ist der außerordentliche Strahl schwächer oder stärker gebrochen als der ordentliche.

2. Die optische Achse liegt senkrecht zur Einfallsebene (Zeichnungsebene, Abb. 440 b). In diesem Falle sind die Querschnitte der beiden Wellenflächen Kreise. Die Konstruktion bedarf keiner weiteren Erklärung.

457. **Das NICOLsche Prisma.** Das NICOLsche Prisma dient zur Herstellung von linear polarisiertem Licht. Ein Spaltstück eines Kalkspatkristalls wird unter einem bestimmten Winkel in zwei gleiche Teile zerschnitten (Abb. 441) und dann durch Kanadabalsam wieder zusammengekittet. Außerdem werden seine beiden Endflächen angeschliffen, so daß sie mit den Seitenflächen einen Winkel von 68° bilden. Fällt natürliches Licht in der aus Abb. 441 ersichtlichen Weise in das Prisma, so wird es in einen ordentlichen, in diesem Fall stärker gebrochenen, und einen schwächer gebrochenen außerordentlichen Strahl zerlegt. Beide treffen auf die Schicht von Kanadabalsam. Für den ordentlichen Strahl ist der Brechungsindex des Kalkspats ($n = 1{,}66$) größer als der des Kanadabalsams ($n = 1{,}54$), und da er unter einem Winkel einfällt, der größer als der Grenzwinkel der Totalreflexion ist, so wird er seitlich reflektiert und tritt nicht durch das Prisma hindurch. Für den außerordentlichen Strahl hingegen ist der Brechungsindex des Kalkspats ($n = 1{,}49$) kleiner als der des Kanadabalsams, es findet keine Totalreflexion statt, und der außerordentliche Strahl tritt auf der andern Seite des Prismas als linear polarisiertes Licht aus. Das NICOLsche Prisma wirkt also, genau wie eine unter 57° gestellte Glasplatte, als Polarisator.

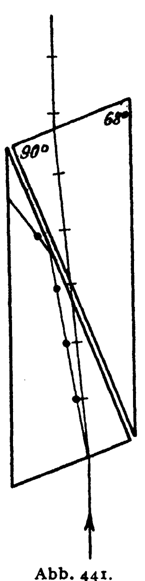


Abb. 441. NICOLsches Prisma.

Es kann aber auch als Analysator, d. h. zum Nachweis linearer Polarisation, dienen. Läßt man Licht nacheinander durch zwei NICOLsche Prismen gehen, so wird das vom ersten, dem Polarisator, durchgelassene Licht vom zweiten, dem Analysator, nur dann ungeschwächt durchgelassen, wenn beide Prismen gleiche Orientierung im Raum haben oder um 180° gegen diese Lage gegeneinander gedreht sind (parallele Nicols). Sind sie um 90° gegeneinander verdreht (gekreuzte Nicols), so läßt das zweite Prisma nichts von dem Licht hindurch. Bei dazwischenliegenden Lagen findet eine mehr oder weniger starke Schwächung des durchgehenden Lichts durch das zweite Prisma statt.

458. **Farben bei gekreuzten NICOLschen Prismen.** Wie § 453 erwähnt, tritt linear polarisiertes Licht, welches durch einen doppeltbrechenden Kristall fällt, in der Regel als elliptisch polarisiertes Licht aus ihm wieder aus. Bringt man einen solchen Kristall zwischen gekreuzte Nicols, so tritt an Stelle der vorherigen Dunkelheit Aufhellung ein, weil ja das in den Analysator fallende Licht nicht mehr linear polarisiert ist. Benutzt man zu diesem Zwecke weißes Licht, so ist der Grad der Aufhellung wegen der Verschiedenheit des Brechungsindex des Kristalls für die einzelnen Spektralfarben verschieden. Dies hat das Auftreten von Farben zur Folge. Bildet man die zwischen gekreuzten Nicols befindliche Kristallplatte mittels einer Linse auf einen Schirm ab, so erscheint sie im allgemeinen in verschiedenen Farben und von dunklen Streifen durchzogen. Die Erscheinung ist von der Lage der optischen Achse zur Polarisationsebene des Lichts abhängig, ändert sich also bei Drehung des Kristalls um eine in der Lichtrichtung liegende Achse. Auf die genaue Theorie muß hier verzichtet werden.

Diese Erscheinungen können dazu dienen, die Lage der optischen Achsen von Kristallen festzustellen. Auch kann man auf diese Weise z. B. die Doppelbrechung in Gläsern nachweisen, welche infolge schneller Kühlung oder einseitigen Drucks innere Spannungen haben und daher nicht mehr isotrop sind.

Zur unmittelbaren Betrachtung der geschilderten Erscheinungen, die z. B. für die kristallographische Forschung von großer Bedeutung sind, bedient man

sich des NÖRRENBERGschen Polarisationsapparates, bei dem das Licht zunächst durch eine unter 57° gestellte Glasplatte linear polarisiert wird. Es tritt dann durch den zu untersuchenden Kristall hindurch und in ein NICOLsches Prisma, durch welches hindurch der Kristall betrachtet wird.

459. **Flüssige Kristalle. Elektrische Doppelbrechung.** Die Doppelbrechung der Kristalle hängt auf das engste mit der gleichartigen räumlichen Orientierung der atomistischen Bausteine der Kristalle (§ 528) zusammen. In den Flüssigkeiten und Gasen sind die Moleküle vollkommen regellos orientiert, können daher im allgemeinen keine Doppelbrechung hervorrufen. Eine Ausnahme bilden gewisse organische Flüssigkeiten, deren Moleküle einen sehr komplizierten Bau und vermutlich langgestreckte Form haben oder sich zu langgestreckten Komplexen aneinander legen. Diese haben, wenn sie sich zwischen zwei nahe benachbarten Begrenzungswänden befinden (z. B. in einer dünnen Schicht zwischen Objektträger und Deckglas, wie man sie beim Mikroskop verwendet), die Tendenz, sich senkrecht zur Begrenzung einzustellen und so auch eine gleichartige räumliche Orientierung anzunehmen. Bei solchen Flüssigkeiten tritt ebenfalls Doppelbrechung auf (sog. flüssige Kristalle).

Auch ein elektrisches Feld kann Moleküle, die elektrische Dipole sind, räumlich gleichartig orientieren, indem sich ihre elektrischen Achsen in die Feldrichtung einzustellen suchen. Solche Substanzen zeigen dann eine sog. elektrische Doppelbrechung (KERR-Effekt). Sie hat neuerdings als Hilfsmittel der elektrischen Fernübertragung von Bildern technische Bedeutung erlangt (KAROLUS-Zelle).

460. **Drehung der Polarisationsebene.** Manche Substanzen, z. B. Zuckerlösung, Quarz, haben die Eigenschaft, daß sie die Schwingungsebene linear polarisierten Lichts, welches durch sie hindurchtritt, drehen (optisch aktive Substanzen). Bringt man eine solche Substanz zwischen gekreuzte NICOLsche Prismen, so tritt eine Aufhellung des Gesichtsfeldes ein. Damit wieder Dunkelheit eintritt, muß der Analysator um einen bestimmten Winkel α gedreht werden. Jedoch darf man diesen Winkel nicht ohne weiteres mit dem Drehungswinkel in der Substanz identifizieren, denn eine Drehung um $n \cdot 180^0 + \alpha$ oder $-(n \cdot 180^0 - \alpha)$ würde durch eine Drehung des Analysators um den Winkel α ebenso kompensiert werden wie eine solche um den Winkel α selbst. Eine Entscheidung über die wirkliche Drehung kann nur durch Variation der Schichtdicke der Substanz getroffen werden.

Die einfallende, linear polarisierte Welle schwinge in der x-Richtung, ihre Amplitude sei also an der Eintrittsstelle etwa durch die Gleichung $x = a \sin \omega t$ dargestellt. Die gleiche Welle können wir uns aber auch durch Überlagerung einer rechts- und einer linkszirkular polarisierten Welle hervorgerufen denken:

$$x_1 = \frac{a}{2} \sin \omega t, \qquad y_1 = \frac{a}{2} \cos \omega t,$$

$$x_2 = \frac{a}{2} \sin \omega t, \qquad y_2 = -\frac{a}{2} \cos \omega t.$$

Bei Addition ergeben die beiden x-Komponenten der Schwingung gerade den obigen Wert, und die beiden y-Komponenten heben sich gegenseitig auf. Die neue Darstellung ist also nur eine andere Form für die vorausgesetzte linear polarisierte Welle $x = a \sin \omega t$. Die Drehung der Polarisationsebene kann nun so aufgefaßt werden, daß sich in den optisch drehenden Substanzen eine rechts- und eine linkszirkular polarisierte Welle verschieden schnell fortpflanzt. Die Geschwindigkeiten seien c_1 und c_2. Ist die Dicke der von den beiden Wellen durchsetzten drehenden Substanz d, so sind die an der Austrittsstelle zur Zeit

t vorhandenen Schwingungen nach § 123 dargestellt durch die Gleichungen

$$x'_1 = \frac{a}{2}\sin\omega\left(t - \frac{d}{c_1}\right), \qquad y'_1 = \frac{a}{2}\cos\omega\left(t - \frac{d}{c_1}\right),$$
$$x'_2 = \frac{a}{2}\sin\omega\left(t - \frac{d}{c_2}\right), \qquad y'_2 = \frac{a}{2}\cos\omega\left(t - \frac{d}{c_2}\right).$$

Die Komponenten der Gesamtschwingung ergeben sich durch Addition der Einzelschwingungen zu

$$x' = x'_1 + x'_2 = a\sin\omega\left[t - \frac{d}{2}\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}\right)\right]\cdot\cos\omega\frac{d}{2}\left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2}\right),$$

$$y' = y'_1 + y'_2 = -a\sin\omega\left[t - \frac{d}{2}\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}\right)\right]\cdot\sin\omega\frac{d}{2}\left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2}\right).$$

Dies ist wieder eine linear polarisierte Schwingung, welche nach der Gleichung

$$z = \sqrt{x'^2 + y'^2} = a\sin\omega\left[t - \frac{d}{2}\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}\right)\right]$$

verläuft. Der Winkel δ, um den die Polarisationsebene gegen ihre ursprüngliche Richtung gedreht ist, ergibt sich aus der Gleichung

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{y'}{x'} = \operatorname{tg}\omega\frac{d}{2}\left(\frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_1}\right) \quad \text{oder} \quad \delta = \omega\frac{d}{2}\left(\frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_1}\right). \tag{9}$$

Der Drehungssinn ist in verschiedenen Substanzen verschieden, je nach dem Vorzeichen von $1/c_2 - 1/c_1$ (Rechts- und Linksdrehung). Manche Substanzen kommen in einer rechts- und einer linksdrehenden Form vor, z. B. der Quarz und der Zucker.

Der Grad der Drehung hängt von $\omega = 2\pi\nu$, oder da $\nu = c/\lambda$, von der Wellenlänge λ des Lichts ab (Rotationsdispersion). Sie wächst im allgemeinen mit fallender Wellenlänge. Daher ist eine völlige Auslöschung des Lichts mittels zweier Nicols nur bei monochromatischem Lichte möglich. Bei Verwendung weißen Lichts treten bei Drehung des Analysators infolge des Ausfalls der bei der jeweiligen Stellung ganz oder teilweise ausgelöschten Wellenlängen wechselnde Farben auf, aber nie vollständige Dunkelheit.

Die Drehung der Polarisationsebene findet Anwendung bei der Untersuchung von Lösungen auf Zuckergehalt und bei vielen andern chemischen Analysen. Die hierzu dienenden Apparate heißen Saccharimeter.

Substanzen, welche an sich die Polarisationsebene nicht drehen, tun dies, wenn sie in ein starkes Magnetfeld gebracht werden, dessen Kraftlinien in der gleichen Richtung verlaufen wie das Licht (magnetische Drehung der Polarisationsebene, Rotationspolarisation, Magnetorotation, FARADAY-Effekt). Der Winkel, um den das Licht der gelben Linie des Natriums (D-Linie) auf 1 cm Weg durch ein Feld von der Stärke 1 Gauß in einer Substanz gedreht wird, heißt die VERDETsche Konstante der Substanz.

461. Die elektromagnetische Theorie des Lichts. Wie bereits mehrfach erwähnt, stellte MAXWELL (1871) die Theorie auf, daß das Licht ein elektromagnetischer Schwingungsvorgang sei, daß sich also die optischen Erscheinungen auf Grund der Gesetze des elektromagnetischen Feldes (§ 397) deuten lassen müßten. H. HERTZ hat diese Theorie erweitert und durch Versuche (1888) den Nachweis geliefert, daß sich elektrische Wellen in allen Haupteigenschaften wie die Lichtwellen verhalten (§§ 388 und 474). Nach MAXWELL besteht eine linear polarisierte Lichtschwingung im Vakuum aus einem periodisch veränderlichen elektrischen Feld $\mathfrak{E}$ und einem dazu senkrechten ebenfalls periodisch veränderlichen

magnetischen Feld $\mathfrak{H}$, welche durch die Gleichungen

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 \sin 2\pi\nu t, \qquad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 \sin 2\pi\nu t \qquad (10)$$

dargestellt werden. In materiellen Körpern spielt noch die elektrische Leitfähigkeit, die Dielektrizitätskonstante (§ 234) und die Permeabilität (§ 337) eine Rolle. Auf Grund dieser Theorie lassen sich alle bisher besprochenen Erscheinungen quantitativ erklären.

Daß das Licht ein elektromagnetischer Vorgang ist, hängt damit zusammen, daß es seinen Ursprung in Änderungen der Bewegung der Elektronen hat, die die Atome des lichtaussendenden Körpers umkreisen. (Näheres s. § 456ff.)

462. Magnetooptik. ZEEMAN-Effekt. Da ein magnetisches Feld auf jeden bewegten Ladungsträger eine Kraft ausübt (§ 306), so geschieht das auch bei den einen Atomkern umkreisenden Elektronen. Einen Fall dieser Art haben wir bereits bei der Erklärung des Diamagnetismus (§ 338) behandelt. Ein zweiter von uns nicht näher erörterter Fall ist die Magnetorotation (§ 460).

Eine ganz besonders wichtige unter diesen sog. magnetooptischen Erscheinungen ist der ZEEMAN-Effekt (ZEEMAN 1896). Wir geben hier die elementare Theorie des Effektes, die von H. A. LORENTZ aufgestellt worden ist. Ihre Voraussetzungen entsprechen zwar nicht ganz den heutigen Vorstellungen vom Verhalten lichtaussendender Atome, ergeben aber für die einfacheren Fälle ein mit der Beobachtung übereinstimmendes Resultat. Wir betrachten ein Atom mit einem an dieses gebundenen Elektron, das sich in einem magnetischen Felde $\mathfrak{H}$ befindet. LORENTZ nimmt an, daß das Elektron durch eine elastische Kraft (d. h. durch eine radial nach einem Punkt gerichtete, dem Abstand des Elektrons von diesem Punkt proportionale Kraft) an eine Ruhelage gebunden sei und eine lineare Schwingung um diese ausführe. Man kann diese Schwingung zunächst in zwei lineare Komponenten zerlegt denken, deren eine parallel, deren zweite senkrecht zu den Kraftlinien des herrschenden Magnetfeldes erfolgt. Die parallele Komponente wird durch das Magnetfeld nicht beeinflußt [§ 306, Gl. 13, $\sin(v, \mathfrak{H}) = 0$]. Die zum Magnetfeld senkrechte Komponente zerlegen wir weiter, genau wie die linear polarisierte Lichtschwingung in § 460, in zwei zirkular polarisierte Schwingungen (Abb. 442). Jede dieser beiden Kreisbewegungen wird durch das zu ihrer Bahnebene senkrecht stehende Magnetfeld beeinflußt, und zwar erfährt das kreisende Elektron nach Gl. 13, § 306, eine radial gerichtete Kraft von der Größe $\pm \varepsilon v \mathfrak{H}$, [$\sin(v, \mathfrak{H})$ ist hier $= 1$], positiv oder negativ, d. h. radial nach außen oder nach innen gerichtet, je nach dem Umlaufssinn des Elektrons.

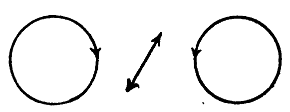


Abb. 442. Zur Theorie des ZEEMAN-Effekts. (Magnetfeld und mittlere Komponente senkrecht zur Zeichnungsebene.)

Es sei r der Radius der Kreisbahn ohne Magnetfeld, ω_0 die Kreisfrequenz der Bewegung. Dann ist die das Elektron radial nach innen ziehende elastische Kraft (Zentripetalkraft), da sie ja der Zentrifugalkraft das Gleichgewicht halten muß, $k = \mu r \omega_0^2$ (§ 37). Unter der Wirkung der von dem Magnetfeld herrührenden zusätzlichen radialen Kraft ändert sich sowohl der Bahnradius von r in r', wie die Frequenz von ω_0 in $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$. Dabei ändert sich die elastische Kraft wegen der Änderung des Bahnradius in $m r' \omega_0^2$. Insgesamt beträgt jetzt also die ganze auf das Elektron wirkende radiale Kraft, wenn wir noch $v = r'\omega$ setzen,

$$k' = \mu r' \omega_0^2 \pm \varepsilon r' \omega \mathfrak{H}.$$

Dies ist die jetzt auf das Elektron wirkende Zentripetalkraft. Sie muß der nunmehrigen Zentrifugalkraft $m r' \omega^2$ das Gleichgewicht halten, und wir erhalten so

$$\mu r' \omega^2 = \mu r' \omega_0^2 \pm \varepsilon r' \omega \mathfrak{H}.$$

Wir setzen jetzt $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ und nehmen an, daß es sich um ein schwaches Magnetfeld handelt, so daß das zweite Glied der rechten Seite an sich klein gegen das erste ist. Dann können wir in diesem Glied ohne merklichen Fehler ω durch ω_0 ersetzen und erhalten, unter Vernachlässigung höherer Potenzen der gegen ω_0 kleinen Größe $\Delta\omega$,

$$(\omega_0 + \Delta\omega)^2 = \omega_0^2 + 2\,\omega_0\,\Delta\omega = \omega_0^2 \pm \frac{\varepsilon}{\mu}\,\omega_0 \mathfrak{H} \quad \text{bzw.} \quad \Delta\omega = \pm \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon}{\mu}\,\mathfrak{H}.$$

Ersetzen wir nun noch die Kreisfrequenz ω durch die Schwingungszahl $\nu = \omega/2\pi$, so ergibt sich die Änderung $\Delta\nu$ der Frequenz ν des Elektrons und damit auch der Schwingungszahl des von ihm ausgesandten Lichts

$$\Delta\nu = \pm \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{\mu} \cdot \mathfrak{H} \tag{11}$$

positiv oder negativ je nach dem Umlaufssinn des Elektrons um die Kraftlinien.

Das Magnetfeld bewirkt daher eine Aufspaltung einer Spektrallinie von der Schwingungszahl ν_0 in drei Komponenten von den Schwingungszahlen $\nu_0 - \Delta\nu, \nu_0$ und $\nu_0 + \Delta\nu$. Die eine (von der linearen Schwingung herrührend) hat die gleiche Schwingungszahl wie die betreffende Linie ohne Feld, die beiden anderen (von den beiden Kreisbewegungen herrührend) sind gegen diese nach rot bzw. violett verschoben.

Ein auf einer Geraden hin und her schwingendes Elektron sendet in Richtung dieser Geraden kein Licht aus. In allen anderen Richtungen ist das von ihm ausgesandte Licht linear polarisiert. Ein rotierendes Elektron sendet in der zu seiner Bahnebene senkrechten Richtung zirkular polarisiertes Licht aus, in den in seiner Bahnebene liegenden Richtungen aber linear polarisiertes Licht. Aus diesen Gründen bietet der ZEEMAN-Effekt ein verschiedenes Bild, je nachdem man eine in ein Magnetfeld gebrachte Lichtquelle in Richtung der magnetischen Kraftlinien (longitudinal) oder senkrecht zu ihnen (transversal) beobachtet. Beim longitudinalen ZEEMAN-Effekt ist die unverschobene Komponente nicht sichtbar. Rechts und links vom Ort der unverschobenen Linie erscheinen zwei etwas verschobene Linien, deren eine rechts- und deren andere linkszirkular polarisiert ist. Beim transversalen ZEEMAN-Effekt erscheinen drei Komponenten. Die eine ist unverschoben und parallel zur Feldrichtung linear polarisiert. Die beiden anderen sind wieder nach rot bzw. violett verschoben und senkrecht zur ersten linear polarisiert (Abb. 443).

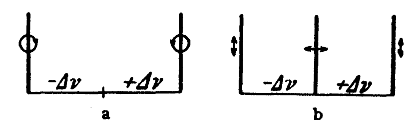


Abb. 443. Schema a des longitudinalen, b des transversalen normalen ZEEMAN-Effekts.

Ein der vorstehenden Theorie entsprechender Effekt (normaler ZEEMAN-Effekt), also das Auftreten eines normalen sog. LORENTZ-Tripletts, ist in der Tat bei den Atomen vieler Elemente beobachtet worden. Bei sehr zahlreichen Elementen aber ist die Aufspaltung eine andere, kompliziertere. Die Annahmen der LORENTZschen Theorie führen also nur in einfachen Fällen zum richtigen Ergebnis. Eine mit der gesamten Erfahrung übereinstimmende Theorie des ZEEMAN-Effekts kann nur auf dem Boden der Quantentheorie gegeben werden.

Aus der Größe von $\Delta\nu$ und $\mathfrak{H}$ kann man nach der obigen Gleichung die spezifische Ladung ε/μ (§ 307) der Ladungsträger berechnen, deren Bewegung die Lichtaussendung veranlaßt. Sie ergibt sich in der Tat gleich derjenigen der Elektronen. Es war dies der erste eindeutige Beweis der Tatsache, daß die Lichtaussendung ihren Ursprung in Bewegungen von an das Atom gebundenen Elektronen hat.

Die vorstehenden Überlegungen stehen im engsten Zusammenhange mit der Theorie des Diamagnetismus (§ 338).

HALE hat gefunden, daß das von den Sonnenflecken kommende Licht einen ZEEMAN-Effekt zeigt, dessen Vorhandensein das Auftreten starker magnetischer Felder in den Flecken beweist. Diese dürften ihren Ursprung darin haben, daß die Sonnenflecken Wirbel von Materie bilden, die eine starke elektrische Ladung mitführen (Kreisströme).

463. **Elektrooptik. STARK-Effekt.** Unter elektrooptischen Erscheinungen versteht man Wirkungen elektrischer Felder auf optische Erscheinungen. Wir haben im KERR-Effekt (§ 458) bereits eine derartige Erscheinung erwähnt.

Sendet ein in einem elektrischen Felde befindliches Atom Lichtschwingungen aus, so tritt eine dem ZEEMAN-Effekt ähnliche Aufspaltung der Spektrallinien ein. Man kann diesen sog. STARK-Effekt (J. STARK 1913, LO SURDO) an Kanalstrahlen (§ 291) beobachten, welche in einem starken elektrischen Felde verlaufen. Die Theorie dieser Erscheinung kann nur mit Hilfe der Quantentheorie gegeben werden. Hier kann nur so viel gesagt werden, daß die Bahnen der um ein Atom kreisenden Elektronen durch die Kraftwirkung des elektrischen Feldes verzerrt werden. Dadurch wird, analog zu den Wirkungen eines magnetischen Feldes, die Frequenz der einzelnen Komponenten, in die man sich die Elektronenbewegung zerlegt denken kann, in verschiedener Weise beeinflußt.

464. **Strahlungsdruck.** Fällt Licht auf eine Fläche, so übt es auf diese eine Kraft, den sog. Lichtdruck oder Strahlungsdruck, aus. Man kann diesen Effekt an leichten, drehbar aufgehängten Körpern nachweisen. Die Kraft ist doppelt so groß, wenn das Licht an der Fläche regulär reflektiert wird, als wenn es in der Fläche vollkommen absorbiert wird. Auch die Oberfläche eines Körpers, der selbst Strahlung aussendet, erfährt hierdurch einen Druck, und der Körper wird, wenn er frei beweglich ist, in Bewegung gesetzt, wie ein Geschütz durch den Rückstoß (§ 33, vgl. ferner § 490).

LEBEDEW hat gezeigt, daß auch die Moleküle der Gase Lichtdruckkräfte erfahren. Nach SAHA und MILNE dürften derartige Wirkungen eine wesentliche Bedeutung für die Verteilung der einzelnen Elemente in der Sonnenatmosphäre haben, in der die Atome den sehr großen Druckkräften der Sonnenstrahlung ausgesetzt sind. Man kann aus dieser Tatsache u. a. erklären, weshalb gerade das Kalzium noch in den äußersten Schichten der Sonnenatmosphäre vorkommt.

Auch sonst spielt der Strahlungsdruck eine äußerst wichtige Rolle in den Gestirnen. In diesen strömt aus dem Innern, dessen Temperatur mehrere Millionen Grad beträgt, ein überaus intensiver Strom von Strahlungsenergie nach außen und wirkt durch den auf die Sternmaterie ausgeübten Strahlungsdruck der Schwerkraft entgegen. Diese Tatsache bildet die wichtigste Grundlage der Theorie der Fixsterne von EDDINGTON.

Die von der Sonne weg gekrümmte Form der Kometenschweife ist eine Folge des Drucks der Sonnenstrahlung auf die Schweifmaterie (ARRHENIUS).

31. Kapitel.

Das gesamte Spektrum.

465. **Übersicht über das gesamte Spektrum.** Bereits früher ist bemerkt worden, daß das Licht, welches unser Auge als solches wahrnimmt, nur ein sehr kleiner Ausschnitt aus dem gesamten Spektrum ist, und daß die Grenzen dieses Ausschnitts durch den engen Empfindlichkeitsbereich des Auges gegeben sind.

Mittels geeigneter Vorrichtungen ist es aber möglich, auch in die dem Auge verschlossenen Spektralgebiete vorzudringen, und es zeigt sich dann, daß sich das Spektrum sowohl über das rote wie über das violette Ende des sichtbaren Bereichs hinaus noch außerordentlich weit, ja genau genommen unendlich weit ausdehnt. Es liegt ja auch nach der Wellentheorie zunächst theoretisch kein Grund vor, daß nicht alle Lichtschwingungen zwischen den Grenzen $\nu = 0$ $(\lambda = \infty)$ und $\nu = \infty$ $(\lambda = 0)$ in der Natur vorkommen können sollten. Das langwelligere Gebiet, welches sich an das rote Ende des sichtbaren Spektrums anschließt, bezeichnet man als das ultrarote Spektrum. Es grenzt nach der Richtung der langen Wellen an das Gebiet der auf elektrischem Wege erzeugten elektromagnetischen Wellen. Jenseits des Violetten erstreckt sich das ultraviolette Spektrum, und an dieses wieder schließen sich die Röntgenstrahlen und die γ-Strahlen der radioaktiven Substanzen an. Noch bedeutend kurzwelliger ist vielleicht die sog. Höhenstrahlung (Hessche Strahlung, Ultrastrahlung), deren Erforschung noch in den Anfängen ist. Jedoch wird ihr Charakter als elektromagnetische Wellenstrahlung neuerdings von einzelnen Forschern angezweifelt. Tabelle 31 gibt eine Übersicht über die Ausdehnung der einzelnen Spektralbereiche, Abb. 444 eine entsprechende graphische Darstellung. Als Abszisse ist nicht die Wellenlänge selbst gewählt, sondern der $\log^{10}$ der in Ångström-Einheiten ausgedrückten Wellenlänge. Dies entspricht einer Einteilung des Spektrums, die der Darstellung der Tonleiter in Oktaven analog ist.

Wo sich die Bereiche zweier verschieden benannter Strahlenarten überschneiden, bedeutet dies keine physikalische Verschiedenheit derselben, sondern nur eine verschiedene Erzeugungsart gleichartiger Strahlung. Aus der Abb. 444 erkennt man deutlich, wie eng begrenzt der Wirkungsbereich des menschlichen Auges ist.

Tabelle 31. Das gesamte Spektrum.

Art der Strahlen	Wellenlänge in ÅE.
(Höhenstrahlung ?)	$(10^{-8} - 10^{-5})$
Kürzeste γ-Strahlen	$0{,}57 \cdot 10^{-2}$
Röntgenstrahlen	$1{,}58 \cdot 10^{-1} - 6{,}6 \cdot 10^{2}$
Ultraviolett	$1{,}36 \cdot 10^{2} - 3{,}6 \cdot 10^{3}$
Sichtbares Gebiet	$3{,}6 \cdot 10^{3} - 7{,}8 \cdot 10^{3}$
Ultrarot	$7{,}8 \cdot 10^{3} - 3{,}4 \cdot 10^{6}$
Elektrische Wellen	$2 \cdot 10^{6} - \infty$

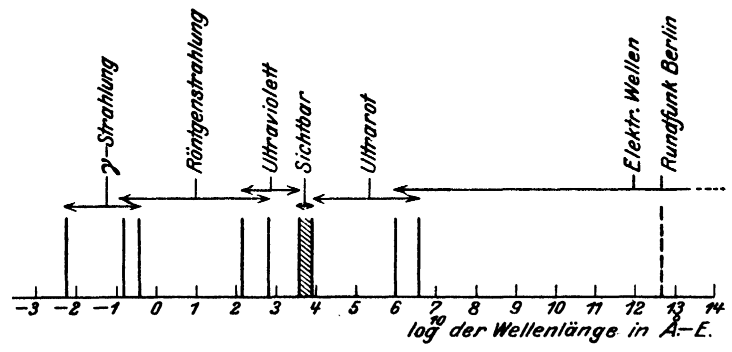


Abb. 444. Das gesamte Spektrum.

Grundsätzlich gelten die bisher besprochenen optischen Gesetze im ganzen Bereich des Spektrums. Die Auswirkung dieser Gesetze ist jedoch vielfach eine andere als im sichtbaren Gebiet, unter anderm deshalb, weil die schon im Bereiche des Sichtbaren mit der Wellenlänge veränderlichen optischen Eigenschaften der Körper (Reflexionsvermögen, Brechungsindex, Durchlässigkeit) sich mit größeren Änderungen der Wellenlänge durchweg außerordentlich stark ändern. Daher

ist es auch in der Regel notwendig, für die Untersuchung von Strahlung, die außerhalb des sichtbaren Gebietes liegt, Linsen, Prismen usw. aus anderen Substanzen als Glas zu gebrauchen. Je weiter man sich vom sichtbaren Gebiet entfernt, desto andersartiger werden auch die zur Untersuchung des Spektrums anzuwendenden Instrumente. Das Prinzip der Wellenlängenmessung ist jedoch durchweg das gleiche. Sie beruht stets unmittelbar oder mittelbar auf der Interferenz.

Da die Grenzen des sichtbaren Spektrums nur physiologisch bedingt sind, jedoch keine physikalische Bedeutung haben, so wird, um die einheitliche Natur des ganzen elektromagnetischen Spektrums zu betonen, häufig jede beliebige Strahlung (mit Ausnahme der elektrischen Wellen), ganz gleich ob sichtbar oder unsichtbar, als Licht bezeichnet, und man spricht von ultrarotem und ultraviolettem Licht, Röntgenlicht usw.

466. **Dispersion, Absorption und Reflexion im gesamten Spektrum.** Wie im § 432 auseinandergesetzt wurde, steigt im sichtbaren Gebiet im allgemeinen der Brechungsexponent n einer Substanz beim Übergang von längeren zu kürzeren Wellen (von Rot nach Violett). Es war aber erwähnt, daß es Fälle sog. anomaler Dispersion gibt, die dieser Regel widersprechen. Jeder materielle Körper hat mindestens ein, meistens mehrere Gebiete anomaler Dispersion, die aber, wegen der Schmalheit des sichtbaren Spektralgebietes, in der Mehrzahl der Fälle außerhalb desselben, meist im Ultrarot oder Ultraviolett liegen. Auf Grund der älteren Lichttheorie lassen sich diese Tatsachen als eine Resonanzerscheinung an den Atomen oder Molekülen deuten. Resonanz eines schwingungsfähigen Gebildes erfolgt dann, wenn es von einer Schwingung getroffen wird, die seiner Eigenschwingung gleich oder von ihr nicht allzu weit entfernt ist (§ 121, siehe dort auch über den Einfluß der Dämpfung). Die Gebiete anomaler Dispersion sind danach die Gebiete, in denen eine Eigenschwingung der Atome oder Moleküle des betreffenden Stoffes liegt. Läßt man die Dämpfung dieser Gebilde außer Betracht, so führen Überlegungen auf Grund der MAXWELLschen Theorie zu dem Ergebnis, daß sich der Brechungsindex n einer Substanz, deren Permeabilität μ gleich oder nahe an 1 ist, für alle Wellenlängen λ durch die Formel von KETTELER-HELMHOLTZ,

$$n^2 = \varepsilon + \frac{M_1}{\lambda^2 - \lambda_1^2} + \frac{M_2}{\lambda^2 - \lambda_2^2} + \frac{M_3}{\lambda^2 - \lambda_3^2} + \cdots, \quad (1)$$

ausdrücken läßt. Hierin bedeutet ε die Dielektrizitätskonstante der Substanz, λ_1, λ_2, λ_3 usw. sind die Wellenlängen der Eigenschwingungen an den Atomen oder Molekülen der Substanz, und die Größen M_1, M_2 usw. sind für jede Substanz bestimmte Konstanten, die u. a. von der Zahl der schwingungsfähigen Gebilde im Kubikzentimeter abhängen.

Die Gl. 1 führt zunächst zu dem wichtigen Ergebnis, daß für $\lambda = \infty$ die sog. MAXWELLsche Beziehung $n^2 = \varepsilon$ gelten muß. Diese Beziehung hat sich tatsächlich in vielen Fällen als im Bereich langer Wellen gültig nachweisen lassen und bildet eine der Hauptstützen der elektromagnetischen Lichttheorie.

Nach Gl. 1 müßte der Brechungsindex n für $\lambda = \lambda_1$, λ_2, λ_3 usw. jedesmal auf $+\infty$ steigen, beim Durchgang durch diese Werte auf $-\infty$ fallen, dann zunächst anwachsen, um mit weiter steigender Wellenlänge bis zur nächsten Resonanzstelle wieder langsam zu fallen. Infolge der Dämpfung verläuft jedoch n etwa so, wie es in Abb. 445 schematisch dargestellt ist. Die Resonanzgebiete bei λ_1, λ_2 und λ_3 sind die Gebiete anomaler Dispersion, die dazwischenliegenden Gebiete, in denen n mit steigender Wellenlänge abnimmt, diejenigen normaler Dispersion.

Für sehr kurze Wellen nähert sich der Brechungsindex aller Substanzen dem Wert 1. Es folgt daher aus Gl. 1, indem man $\lambda = 0$ setzt, daß die Dielektrizitätskonstante $\varepsilon = 1 + M_1/\lambda_1^2 + M_2/\lambda_2^2 + M_3/\lambda_3^2 \cdots$.

In den Resonanzgebieten zeigen die Substanzen auch jedesmal ein Maximum der Absorption und der Reflexion (Abb. 446). Bei geringer Dämpfung kann das Reflexionsvermögen hier bei einer sonst durchlässigen Substanz so groß werden, wie es sonst nur bei den Metallen ist (metallische Reflexion),

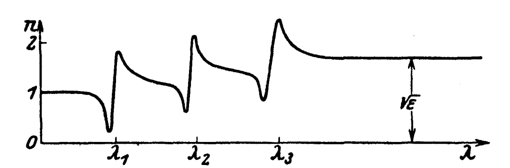


Abb. 445. Schema der Abhängigkeit des Brechungsindex von der Wellenlänge für den Fall dreier Eigenschwingungen λ_1, λ_2, λ_3.

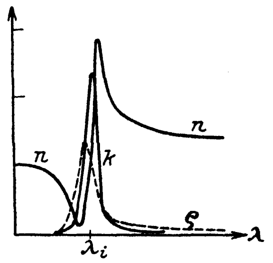


Abb. 446. Verlauf des Brechungsindex n, der Absorption k und des Reflexionsvermögens ϱ in einem Resonanzgebiet.

während es in den unmittelbar benachbarten Gebieten sehr viel kleiner ist (vgl. § 468, Reststrahlen).

Eine Substanz ist innerhalb des Bereichs merklicher Absorption für Licht nicht durchlässig. Ein für weißes Licht, also im sichtbaren Gebiet, durchsichtiger Körper, wie Glas, Wasser, die meisten Gase usw., besitzt also in diesem Gebiet keine Bereiche merklicher Absorption.

In den Gebieten anomaler Dispersion sinkt der Brechungsindex n unter den Wert 1. Das bedeutet nach § 409, daß die Lichtgeschwindigkeit in der Substanz größer wird als die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum. Das ist jedoch nicht so zu verstehen, daß sich die Lichtenergie mit einer Geschwindigkeit fortpflanzt, die größer ist als $3 \cdot 10^{10}$ cm/sec. Wie aus der Relativitätstheorie folgt, kann sich weder ein materieller Körper noch Energie mit einer die Lichtgeschwindigkeit übersteigenden Geschwindigkeit fortpflanzen. Das, was sich im vorliegenden Fall mit größerer Geschwindigkeit fortpflanzt, ist die Phase der Lichtschwingungen. Daß sich die Phase einer Schwingung längs einer Strecke mit jeder beliebigen Geschwindigkeit fortpflanzen kann, möge folgendes mechanische Beispiel erläutern. Wir betrachten Wasserwellen, die sich mit der Geschwindigkeit v fortpflanzen und die unter dem Winkel φ das Ufer treffen. Dann ist die Geschwindigkeit u, mit der sich eine bestimmte Phase, etwa die Wellenmaxima, längs der Uferlinie AB (Abb. 447) fortpflanzen, $u = v/\sin\varphi$. Sie kann also beliebig große Werte annehmen. Eine Energiefortpflanzung findet aber längs der Uferlinie nicht statt, sondern nur in Richtung der Wellengeschwindigkeit v.

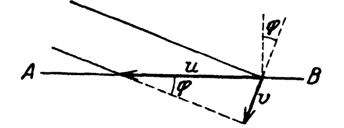


Abb. 447. Zur Phasengeschwindigkeit.

467. **Strahlungsmeßinstrumente.** Das wichtigste Instrument zur Messung der Intensität (Energie) einer Strahlung ist die Thermosäule (Abb. 448). Sie beruht auf dem thermoelektrischen Effekt (§ 263) und besteht aus einer größeren Zahl von hintereinander geschalteten Thermoelementen aus feinem Draht, die derart angeordnet sind, daß die 1., 3., 5. usw. Lötstelle von der Strahlung getroffen wird, während die dazwischen liegenden Lötstellen gegen die Strahlung geschützt sind. Die bestrahlten Lötstellen sind berußt und werden von der Strahlung erwärmt, so daß ein Thermostrom entsteht, dessen Stärke mit einem Galvanometer gemessen wird und als Maß der Strahlungsintensität dient.

Ein weiteres Strahlungsmeßinstrument ist das Bolometer. Es besteht aus einer dünnen, einseitig berußten Metallfolie, auf deren berußte Seite die zu messende Strahlung fällt. Diese erwärmt den Streifen und erhöht dadurch seinen Widerstand (§ 255). Die Widerstandsänderung wird in der WHEATSTONEschen Brückenschaltung (§ 252) gemessen. Sie ist bei nicht zu großer Intensität der Strahlung dieser proportional.

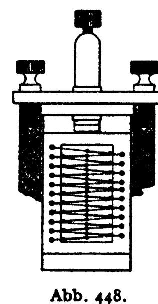


Abb. 448. Thermosäule für Strahlungsmessungen.

Eine besonders bequeme und deshalb für Strahlungsmessungen viel verwandte Form des Thermoelements ist das Mikroradiometer (Abb. 449). Es ist dies ein Drehspulgalvanometer, dessen Spule aus einer einzigen Drahtwindung W besteht, in die ein Thermoelement, welches aus zwei verschiedenen Wismutlegierungen besteht, unmittelbar eingefügt ist. Die eine Lötstelle T_1 ist berußt und wird der zu messenden Strahlung ausgesetzt, die anderen, T_2, T_3, sind vor ihr geschützt. Infolge der dadurch erzeugten Temperaturdifferenz zwischen den Lötstellen entsteht in der Spulenwindung ein Strom, der eine Drehung der Spule hervorruft, deren Größe ein Maß für die Intensität der auffallenden Strahlung ist.

Auch das Radiometer (Abb. 450) wird zur Strahlungsmessung benutzt. Es besteht aus zwei an einem dünnen Quarz- oder Kokonfaden aufgehängten dünnen Metallflügeln, deren einer einseitig berußt ist und der zu messenden Strahlung ausgesetzt wird. Das Ganze befindet sich in einem Glasgefäß, in dem ein Luftdruck von $^1/_{10}$ bis $^1/_{100}$ mm Hg herrscht. Fällt Strahlung auf den berußten Flügel, so erwärmt er sich, und die dadurch hervorgerufene Störung des Temperaturgleichgewichts zwischen dem Flügel und dem Gase hat eine Drehung des Flügels zur Folge, die mit Hilfe eines Spiegelchens abgelesen werden kann. (Auf der gleichen Radiometerwirkung beruhen die sich im Sonnenlicht fortgesetzt drehenden sog. Lichtmühlen, die man gelegentlich in den Schaufenstern optischer Geschäfte sieht.) Die Theorie dieser Erscheinung ist sehr verwickelt.

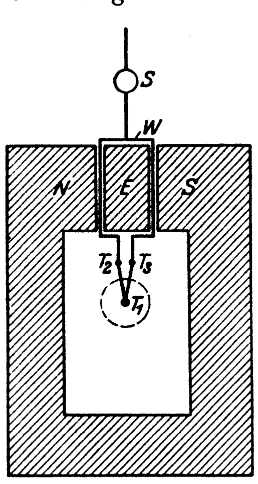


Abb. 449. Schema des Mikroradiometers. N, S Pole des Elektromagneten, E Eisenkern, W Spule, S Spiegel, T_1, T_2, T_3 Lötstellen.

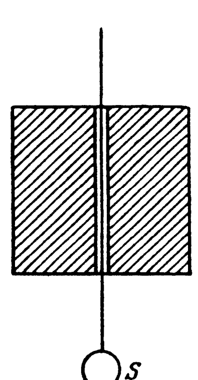


Abb. 450. Radiometer. S Spiegel.

Bei sehr starker Strahlung kann man auch schon ein empfindliches Thermometer als Meßinstrument benutzen, auf dessen mit Ruß geschwärzte Kugel man die Strahlung fallen läßt.

468. Das ultrarote Spektralgebiet. Man entwerfe auf einen Schirm ein Spektrum einer Bogenlampe, oder noch besser der Sonne, und bringe in dieses Spektrum eine mit einem Galvanometer verbundene Thermosäule. Führt man die Thermosäule vom violetten Ende her allmählich durch das Spektrum bis zum roten Ende hin, so bemerkt man, daß der im Violetten sehr kleine Galvanometerausschlag bei Annäherung an das rote Ende immer größer wird. Die auf das Thermoelement fallende Energie ist also im Rot größer als im Violett. (Zum Teil hat dies seinen Grund auch darin, daß bei Benutzung eines Prismas das Spektrum im Rot zusammengedrängt, im Violett auseinandergezogen ist, vgl. § 447.) Geht man nun über das rote Ende hinaus, so ver-

schwindet der Ausschlag nicht etwa, sondern steigt zunächst noch an, um erst in einiger Entfernung vom roten Ende zu verschwinden. Durch diesen Versuch ist der Nachweis erbracht, daß sich das Spektrum über das Rot hinaus erstreckt, daß also ein ultrarotes Spektralgebiet existiert. Die Abnahme der Wirkung in Richtung längerer Wellen rührt nicht etwa daher, daß die Energie dort allmählich abnimmt, sondern vor allem daher, daß die im Strahlengang befindlichen Linsen und Prismen aus Glas die langwelligere ultrarote Strahlung nicht mehr durchlassen. Man benutzt daher zur Untersuchung des ultraroten Spektralgebietes Linsen und Prismen aus anderen Stoffen, nämlich bis zur Wellenlänge 4 μ Quarz, bis 8,5 μ Flußspat, bis 14 μ Steinsalz, bis 20, höchstens 23 μ Sylvin. Bis zu dieser Wellenlänge kann noch eine Zerlegung des ultraroten Spektrums durch Spektrometer von besonderer Konstruktion erfolgen. Zur Aufnahme der Spektren kann man im ganz kurzwelligen Ultrarot noch besonders sensibilisierte photographische Platten benutzen, darüber hinaus ist man auf die oben erwähnten Meßinstrumente angewiesen.

Das ultrarote Licht wird häufig als Wärmestrahlung bezeichnet. Es senden aber erwärmte Körper nicht nur ultrarote, sondern auch sichtbare und ultraviolette Strahlung aus. Nur bei tieferer Temperatur, wenn ein Körper

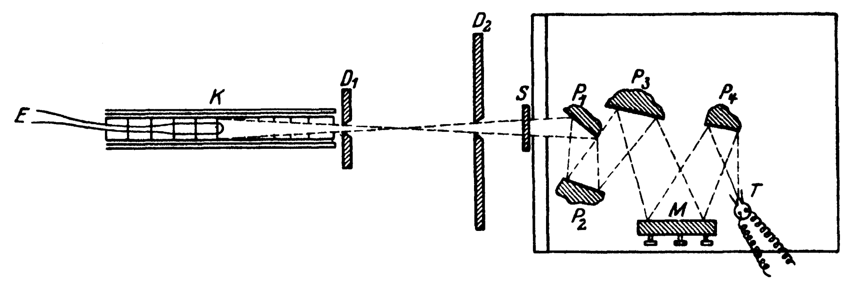


Abb. 451. Reststrahlenmethode nach Rubens.

T Thermosäule, *M* Metallhohlspiegel, P_1—P_4 Platten, an denen die Reststrahlen isoliert werden, *S* Schirm, D_1, D_2 Blenden, *K* schwarzer Körper als Strahlungsquelle, *E* Thermoelement zur Messung der Temperatur des schwarzen Körpers.

noch nicht sichtbar glüht, besteht seine Strahlung so gut wie ausschließlich aus ultrarotem Licht. Unter Wärmestrahlung (oder Temperaturstrahlung) ist jede Strahlung zu verstehen, welche ihre Ursache in der Temperatur eines Körpers hat.

Für die Aussonderung und Untersuchung enger begrenzter Spektralbereiche jenseits von 23 μ ist man auf die Reststrahlenmethode von Rubens angewiesen. Sie benutzt die Tatsache, daß viele Substanzen im Ultrarot Gebiete sog. metallischer Reflexion haben, d. h. daß sie ziemlich schmale Gebiete des Spektrums sehr stark reflektieren, die benachbarten Gebiete aber viel weniger (§ 466). Die Strahlung einer Lichtquelle, etwa eines sog. schwarzen Körpers (§ 481), wird in der aus Abb. 451 ersichtlichen Weise mehrfach an Flächen aus der betreffenden Substanz reflektiert. Von einer Strahlung, welche an einer der Flächen z. B. zu 95 % reflektiert wird, ist nach viermaliger Reflexion noch der Bruchteil $0{,}95^4$ oder 82 % enthalten. Eine Strahlung aber, die etwa nur zu 50 % reflektiert wird, ist dann auf 6,25 % geschwächt. Während sich die beiden Strahlungen vorher etwa wie 2 : 1 verhielten, verhalten sie sich nach vier Reflexionen wie 13 : 1. Das aus der ursprünglichen Strahlung ausgesonderte Spektralgebiet wird bei jeder Reflexion schmaler, also einer scharfen Spektrallinie immer ähnlicher. Die so ausgesonderte Strahlung kann nun dazu dienen, um die optischen Eigenschaften der Körper, z. B. ihre Durchlässigkeit,

in diesem Spektralgebiet zu untersuchen. Tabelle 32 gibt eine Übersicht über die hauptsächlich für die Herstellung von Reststrahlen in Betracht kommenden Substanzen.

Tabelle 32. Die wichtigsten Reststrahlen (Lage der Energiemaxima).

Kalkspat	$CaCO_3$	6,65 μ
Flußspat	CaF_2	22 und 32 μ
Aragonit	$CaCO_3$	39 μ
Steinsalz	NaCl	52,8 μ
Sylvin	KCl	63 μ
Bromkalium . .	KBr	83 μ
Thalliumchlorür .	TlCl	92 μ
Jodkalium . . .	KJ	94 μ
Thalliumbromür .	TlBr	117 μ
Thalliumjodür. .	TlJ	152 μ

Zur Messung der Wellenlänge im langwelligen Ultrarot bedient man sich eines Interferometers (§ 443) von besonderer Konstruktion.

Je weiter man zu längeren Wellen vorrückt, desto schwieriger wird die Aussonderung und Untersuchung eng begrenzter Spektralbereiche, schon wegen der geringen Energie der langwelligen Strahlung in den verfügbaren Strahlungsquellen. Zur Trennung langwelliger und kurzwelliger ultraroter Strahlung bediente RUBENS sich folgender Eigenschaft des Quarzes. Quarz ist im kurzwelligsten Ultrarot durchlässig, dann folgt bei längeren Wellen ein breites Gebiet anomaler Dispersion (§ 466), in dem er sehr stark absorbiert, um schließlich

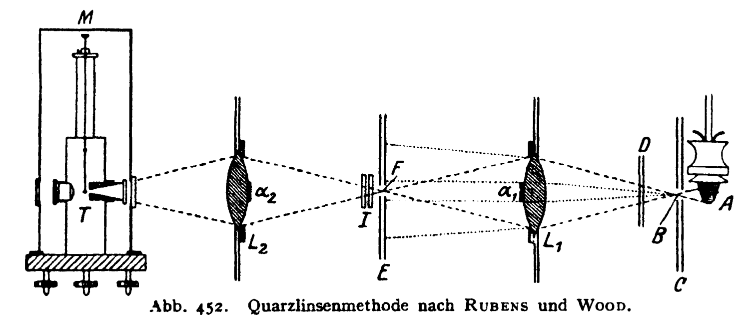


Abb. 452. Quarzlinsenmethode nach RUBENS und WOOD.
A Auerbrenner, *B*, *F* Blendenöffnungen in den Diaphragmen *C* und *E*, L_1, L_2 Quarzlinsen. *D*, *J* Schirme zum Abblenden der Strahlung, α_1, α_2 Papierblättchen, *M* Mikroradiometer als Meßinstrument.

für ganz langwellige Strahlung wieder durchlässig zu werden. In diesem langwelligen Gebiet hat er einen viel höheren Brechungsindex als im kurzwelligen Ultrarot (vgl. Abb. 445). Hierauf beruht die sog. Quarzlinsenmethode (Abb. 452). Die von einer Strahlungsquelle, z. B. einem Auer-Glühstrumpf *A*, kommende Strahlung fällt durch eine enge Blende *B* auf eine Quarzlinse L_1, welche die stark brechbare langwellige Strahlung auf eine zweite Blende *F* konzentriert, durch welche sie hindurchtritt, während die schwach brechbare kurzwellige Strahlung zum größten Teil auf die Wand der Blende fällt. Um auch die auf die Öffnung fallende kurzwellige Strahlung auszusondern, wird sie durch ein auf der Linse angebrachtes Stück schwarzen Papiers α, welches für die langwellige Strahlung fast völlig durchlässig ist, absorbiert. Mittels einer zweiten Linse L_2 wird der Reinigungsprozeß der Strahlung noch einmal wiederholt, so daß nur noch langwellige Strahlung übrigbleibt. Diese Methode ist eine ausgezeichnete Illustration für die Änderung der optischen Eigenschaften (Brechung, Absorption) bei großen Änderungen der Wellenlänge.

Die langwelligste bisher beobachtete ultrarote Strahlung ist von RUBENS und von BAEYER in der Strahlung der Quarzquecksilberlampe (§ 293) entdeckt worden. Diese Strahlung umfaßt ein breites Spektralgebiet und hat zwei Energiemaxima, eines bei 218 μ, das andere bei 343 μ. Diese Strahlung fällt also bereits mit den kürzesten elektrischen Wellen zusammen. Tatsächlich zeigen diese langwelligen Strahlen schon alle Eigenschaften der elektrischen Wellen. So kann

man sie z. B. durch feine Drahtgitter in gleicher Weise linear polarisieren, wie das HERTZ für elektrische Wellen nachgewiesen hat.

469. Das ultraviolette Spektralgebiet. Hält man in das Spektrum einer Bogenlampe einen mit Zinkblende bedeckten Schirm derart, daß er über das violette Ende hinausragt, so bemerkt man, daß der Schirm ein beträchtliches Stück jenseits dieses Endes grünlich leuchtet (phosphoresziert, § 487). Es ist dies eine Wirkung des für das Auge nicht mehr sichtbaren ultravioletten Lichtes. Daß das auf diese Weise beobachtbare ultraviolette Gebiet nicht weiter ausgedehnt ist und in der Regel sogar nur aus einer oder wenigen Linien zu bestehen scheint, liegt lediglich an der Verwendung von Glas im Strahlengange, welches unmittelbar hinter dem violetten Ende des Spektrums undurchlässig zu werden beginnt. Zur Untersuchung ultravioletter Spektren muß man daher eine andere Substanz für Prismen und Linsen verwenden. In der Regel benutzt man Steinsalz, Quarz oder Flußspat. Die meisten Substanzen sind im kurzwelligen Ultraviolett undurchlässig, auch die Gase, die hier ihre Bereiche anomaler Dispersion haben. Zur Untersuchung kurzwelligster, ultravioletter Strahlung muß daher die ganze benutzte Apparatur luftleer gemacht werden (Vakuumspektrograph). Zur Aufnahme der Spektren dienen photographische Platten. Die photographische Wirkung des ultravioletten Lichts ist sehr stark, wie ihre chemischen Wirkungen überhaupt (§ 510).

In der Sonnenstrahlung ist ultraviolettes Licht in großen Mengen enthalten. Es gelangt aber wegen der Absorption in der Atmosphäre nur äußerst geschwächt bis zur Erdoberfläche, während es in größeren Höhen sehr intensiv ist. Daher rührt zum großen Teil die biologische Wirkung des Hochgebirges und die starken dort häufig eintretenden Hautverbrennungen (Gletscherbrand). Die Beobachtung des Sonnenspektrums jenseits der Grenzen des sichtbaren Gebietes ist durch die Absorption begrenzt, die kurzwelligeres ultraviolettes und langwelligeres ultrarotes Licht in der Erdatmosphäre erfährt. Infolgedessen bricht das ultraviolette Sonnenspektrum bei 2900 ÅE ab. Im Ultraroten ist es LANGLEY gelungen, noch eine Wellenlänge von 53000 ÅE (rund $^1/_{200}$ mm) zu beobachten. Für die Absorption im Ultraviolett ist hauptsächlich das in der Atmosphäre vorhandene Ozon, für diejenige im Ultrarot der Wasserdampf verantwortlich (vgl. § 204).

Starke ultraviolette Strahlung liefert die Quarzquecksilberlampe (§ 293), desgleichen Quecksilberlampen aus Uviolglas, einer für ultraviolettes Licht weitgehend durchlässigen Glassorte. Auch eine Funkenstrecke zwischen Elektroden aus Zink und manchen anderen Metallen ist reich an ultravioletter Strahlung. Die Sehorgane mancher Tiere sind weiter hinein in das Ultraviolett empfindlich als das menschliche Auge. Insbesondere ist dies für die Bienen nachgewiesen worden.

Der kurzwellige Teil des ultravioletten Spektralgebietes ist insbesondere von SCHUMANN und MILLIKAN erforscht worden. Letzterem gelang es, die früher noch vorhandene Lücke zwischen dem Ultraviolett und den Röntgenstrahlen bis zur Wellenlänge von etwa 50 ÅE zu überbrücken.

470. Röntgenstrahlen. Die nach RÖNTGEN benannten Strahlen sind von diesem im Jahre 1895 bei Gelegenheit von Versuchen mit dem LENARD-Rohr (§ 291) entdeckt und von ihm selbst X-Strahlen genannt worden. Es war dies eine der wichtigsten physikalischen Entdeckungen. Sie bezeichnet den eigentlichen Beginn des Überganges von der sog. klassischen Physik des 19. Jahrhunderts zur Physik der Jetztzeit.

Röntgenstrahlen vermögen bekanntlich alle Substanzen mehr oder weniger stark zu durchdringen, und zwar im allgemeinen um so leichter, je geringer die Dichte der Substanz ist. Im großen und ganzen steigt das Durchdringungsvermögen der Strahlen mit fallender Wellenlänge. Doch zeigen alle Stoffe an

gewissen Stellen des Röntgenspektrums selektive Eigenschaften, insbesondere haben sie bestimmte Gebiete besonders starker Absorption.

Auf diesem starken, aber für verschiedene Substanzen (Knochen, Muskelgewebe usw.) verschieden großen Durchdringungsvermögen beruht auch die Möglichkeit der „Durchleuchtung" des menschlichen Körpers, bei der dessen einzelne Bestandteile sich wegen ihrer verschiedenen Durchlässigkeit schattenartig voneinander abheben, und bei der insbesondere die Knochen, aber auch einzelne innere Organe, besonders deutlich hervortreten (Röntgendiagnostik). Die Sichtbarmachung der Schattenbilder erfolgt dadurch, daß man die Strahlen nach dem Durchgang durch den Körper auf einen mit Bariumplatinzyanür oder dergleichen bedeckten Schirm (Leuchtschirm) fallen läßt. Diese Substanz fluoresziert unter der Wirkung der Röntgenstrahlen. Zur Fixierung des Schattenbildes (Röntgenaufnahme) läßt man die Strahlen nach dem Durchgang durch den Körper auf eine photographische Platte fallen. Die Röntgenstrahlen haben starke chemische Wirkung. Gase werden durch Röntgenstrahlen stark ionisiert.

Die biologischen Wirkungen der Röntgenstrahlen sind noch erheblich stärker als die des ultravioletten Lichts. Auch erstrecken sie sich bis in die Tiefe des Körpers. Sie finden eine ausgedehnte Anwendung zur Erzielung von Heilwirkungen der verschiedensten Art, z. B. zur Bekämpfung von bösartigen Geschwülsten (Röntgentherapie). Andererseits aber bilden sie bei unvorsichtigem Verhalten eine große Gefahr für den Menschen und bewirken die in schweren Fällen tödlichen sog. Röntgenverbrennungen.

Der Brechungsindex aller Stoffe liegt für Röntgenstrahlen fast genau bei $n = 1$. Die Brechung der Röntgenstrahlen ist daher eine überaus geringe und konnte erst vor kurzem überhaupt nachgewiesen werden.

Röntgenstrahlen entstehen immer dann, wenn Kathodenstrahlen, also sehr schnell bewegte Elektronen, auf ein Hindernis fallen. Da jede bewegte elektrische Ladung einen elektrischen Strom darstellt, so entspricht der Bremsung ihrer Bewegung eine sehr plötzliche Änderung der Stromstärke. Das hat das Auftreten einer nicht periodischen elektromagnetischen Welle (etwa einem Knall vergleichbar) zur Folge, eben der ausgesandten Röntgenstrahlung (Bremsstrahlung). Daneben entsteht aber noch eine weitere, periodische Strahlung, deren Wellenlängen für das Material charakteristisch sind, auf die die Elektronen auftreffen (§ 504).

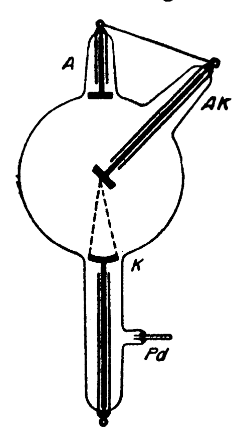


Abb. 453. Ältere (gasgefüllte) Röntgenröhre. (Aus POHL, Elektrizitätslehre.)

Ursprünglich benutzte man zur Erzeugung von Röntgenstrahlen Röhren von der in Abb. 453 dargestellten Form. Es sind dies Glasgefäße, die noch so viel Luft enthalten, daß in ihnen Kathodenstrahlen durch selbstständige Entladung entstehen können. Diese gehen von der Kathode K aus, welche hohlspiegelartig gekrümmt ist, so daß sich die Kathodenstrahlen auf dem heute stets aus Wolfram bestehenden Hindernis, der Antikathode AK, konzentrieren. Diese ist mit der Anode A verbunden. Pd ist ein in die Glaswand eingeschmolzenes Palladiumrohr, welches zur Regulierung der Gasfüllung dient. Von der Antikathode gehen die Röntgenstrahlen aus, die zum größten Teil durch die Glaswand nach außen treten. Diese sog. Ionenröhren sind nur unvollkommen regulierbar und haben viele Nachteile. Daher benutzt man heute meist Röntgenröhren, in denen ein möglichst vollkommenes Vakuum hergestellt ist, und bei denen die zur Erzeugung der Röntgenstrahlen dienenden Kathodenstrahlen (Elektronen) aus einer Kathode stammen, die aus einem elektrisch

geglühten Wolframdraht besteht (§ 284). Abb. 454 zeigt das Schema einer derartigen Röhre nach der Konstruktion von Coolidge. Mittels dieser Röhren ist man in der Lage, die Menge der ausgesandten Kathodenstrahlen durch den Heizstrom der Kathode, ihre Geschwindigkeit durch die angelegte Spannung mit großer Genauigkeit zu regulieren, und dadurch Art und Stärke der erzeugten Röntgenstrahlen in der jeweils gewünschten Weise zu beeinflussen. Das hat nicht nur für die physikalische Forschung, sondern vor allem auch für die Medizin entscheidende Bedeutung. Eine sachgemäße und für den Patienten gefahrlose Anwendung der Röntgenstrahlen in der medizinischen Therapie und Diagnostik ist erst durch diese modernen Röhren möglich geworden.

Zur Erzeugung der zum Betriebe notwendigen hohen Spannung benutzt man meist einen Funkeninduktor, neuerdings auch eine Reihe von anderen Einrichtungen.

Man bezeichnet eine Röntgenstrahlung als „hart“ oder „weich“, je nachdem sie mehr oder weniger durchdringend ist, d. h. je nachdem in ihr vorwiegend kurzwellige oder langwellige Strahlung enthalten ist.

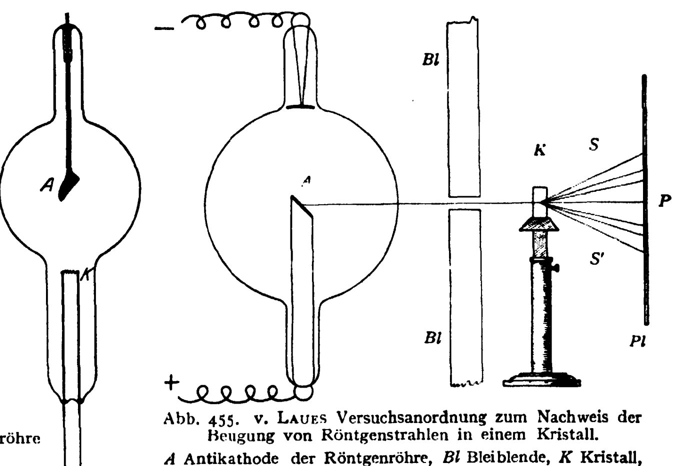


Abb. 454. Schema einer Röntgenröhre nach Coolidge.
K Kathode, *A* Antikathode, zugleich Anode, *E* Heizbatterie für die Kathode.

Abb. 455. v. Laues Versuchsanordnung zum Nachweis der Beugung von Röntgenstrahlen in einem Kristall.
A Antikathode der Röntgenröhre, *Bl* Bleiblende, *K* Kristall, *P* ungebeugter Strahl, *S* abgebeugte Strahlen, *Pl* photographische Platte.

471. **Die Wellennatur der Röntgenstrahlen.** Daß die Röntgenstrahlen noch kurzwelligeres Licht sind als das Ultraviolett, war bereits lange vermutet worden. Im Jahre 1912 wurde es durch v. Laue bewiesen, dem es gelang, Röntgenstrahlen zur Interferenz zu bringen. Dadurch wurde nicht nur ihre Wellennatur bewiesen, sondern es gelang auch, die Wellenlängen zu messen. Wegen der kleinen Wellenlänge der Röntgenstrahlen konnte man damals zur Erzeugung von Gitterspektren (§ 447) bei ihnen keine mechanisch hergestellten Gitter benutzen. v. Laue kam daher auf den Gedanken, als Beugungsgitter Kristalle zu benutzen. Die Kristalle bilden sog. Raumgitter, d. h. ihre atomistischen Bausteine sind in ihnen ganz regelmäßig räumlich angeordnet (Näheres s. § 528). Fällt Röntgenlicht durch einen solchen Kristall, so findet an jedem atomaren Baustein (Atom, Ion) eine Beugung statt. Die abgebeugten Strahlen interferieren miteinander. Das führt ähnlich wie beim Strichgitter dazu, daß Röntgenlicht nur in ganz bestimmten Richtungen aus dem Kristall austritt. Eine zweidimensionale Analogie zu diesen Erscheinungen sind die farbigen Beugungsbilder, die man z. B. beobachtet, wenn man eine nahezu punktförmige Lichtquelle durch einen Webstoff (Kreuzgitter) hindurch betrachtet (§ 447).

Abb. 455 zeigt die von v. Laue zum Nachweis der Beugung der Röntgenstrahlen benutzte Versuchsanordnung. Ein feines Bündel von Röntgenstrahlen tritt durch einen Kristall und fällt hinter diesem auf eine photographische Platte, die überall dort geschwärzt wird, wo Strahlen auftreffen. Abb. 456 zeigt ein auf diese Weise gewonnenes sog. Laue-Diagramm.

Durch diese Versuche wurde nicht nur die Wellennatur der Röntgenstrahlen bewiesen, sondern auch die Richtigkeit der Vorstellung vom Bau der Kristalle. In ihrer weiteren Entwicklung führte die LAUEsche Idee einerseits zur Ausarbeitung einer Spektrometrie der Röntgenstrahlen (§ 472) durch W. L. und W. H. BRAGG, andererseits zu einem außerordentlichen Aufschwung der Kristallographie und unserer Kenntnis vom Bau der Materie überhaupt.

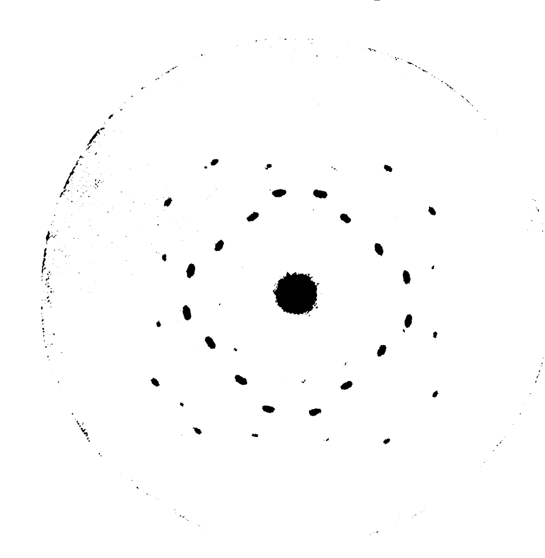


Abb. 456. LAUE-Diagramm der Zinkblende.

472. Spektrometrie der Röntgenstrahlen. Strukturanalyse. Das LAUEsche Verfahren kann zur Wellenlängenmessung, also zu einer Spektrometrie der Röntgenstrahlen, verwendet werden, sofern man die Struktur des benutzten Kristalls kennt. Jedoch sind die dabei auftretenden Beugungserscheinungen ziemlich kompliziert. Die von W. L. und W. H. BRAGG erdachte Methode bedient sich der bei der Reflexion an einer Kristallgitterebene auftretenden Interferenzerscheinungen, welche viel einfacher sind.

Wir wählen als Beispiel das besonders einfache kubische Raumgitter des Kochsalzes, NaCl, bei dem positive Na-Ionen und negative Cl-Ionen regelmäßig abwechselnd in den Ecken von Würfeln angeordnet sind. (Näheres über Raumgitter s. § 528.) Abb. 457 zeigt einen schematischen Querschnitt durch einen solchen Kristall. Die Kantenlänge der Elementarwürfel sei d. Die schwarzen Kreise seien Na-Ionen, die weißen Cl-Ionen (D, E, F). Die Ebenen aa', bb' usw. heißen Netzebenen. Auf die durch eine solche Netzebene gebildete Oberfläche aa' des Kristalls falle ein mit ihr den Winkel α bildendes Bündel paralleler, kohärenter (§ 483) Röntgenstrahlen R_1, R_2 usw. Wir greifen die beiden Strahlen R_1 und R_2 heraus, welche gerade auf die Ionen A und B fallen. An diesen werden sie nach allen Richtungen abgebeugt. Unter diesen abgebeugten Strahlen betrachten wir die beiden Strahlen R_1' und R_2', welche so verlaufen, als seien die Strahlen R_1 und R_2 regulär am Kristall reflektiert worden. Die einfallenden Strahlen sind in A und B', weil kohärent, in gleicher Phase, in A und B'' aber nur dann, wenn der Weg $B'B + BB''$ gleich der Wellenlänge λ oder einem ganzzahligen Vielfachen derselben ist. Es ergibt sich leicht, daß dann

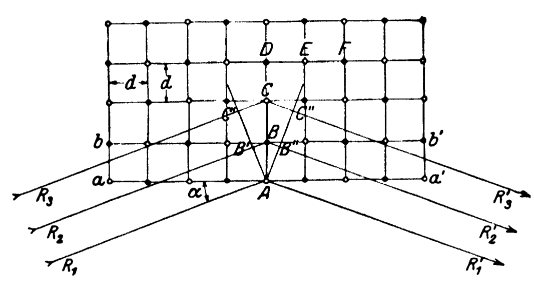


Abb. 457. Zur Reflexion der Röntgenstrahlen an einem Kristall.

$$2d \sin\alpha = z\lambda, \qquad (2)$$

wenn z irgendeine ganze Zahl bedeutet (vgl. die ganz ähnlichen Betrachtungen in § 439). In diesem Falle findet also keine Schwächung oder Auslöschung durch Interferenz statt. Die gleiche Überlegung gilt für die Strahlen R_2 und R_3.

Nun findet aber auch an allen anderen Gitterpunkten Beugung statt. Es läßt sich zeigen, daß, wenn man die Gesamtheit der Gitterpunkte und alle an ihnen gebeugten Strahlen in Betracht zieht, eine merkliche Intensität der austretenden Röntgenstrahlen nur bei denjenigen Einfallswinkeln und in denjenigen Richtungen auftritt, die der Gl. 2 entsprechen. Je nachdem $z = 1, 2, 3$ usw. ist, spricht man von Reflexion erster, zweiter, dritter Ordnung.

Auf die Oberfläche eines Kristalls K falle ein Kegel von Röntgenstrahlen, der Strahlen verschiedener Wellenlänge enthält (Abb. 458). Wir wollen beispielsweise annehmen, es seien drei verschiedene Wellenlängen vorhanden (in Abb. 458 durch die Zahl der Pfeilspitzen angedeutet). Reflexion findet nur in den der Gl. 2 entsprechenden Richtungen statt, und daher verläuft das den verschiedenen Wellenlängen angehörende Röntgenlicht nach der Reflexion in verschiedenen Richtungen. Stellt man einen kreisförmig gebogenen photographischen Film PP in den Weg der reflektierten Strahlen, so erhält man auf ihm ein nach Wellenlängen geordnetes Spektrum des Röntgenlichts.

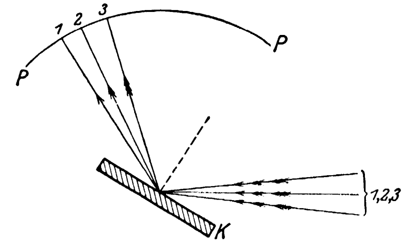


Abb. 458. Zur Reflexion der Röntgenstrahlen an einem Kristall.

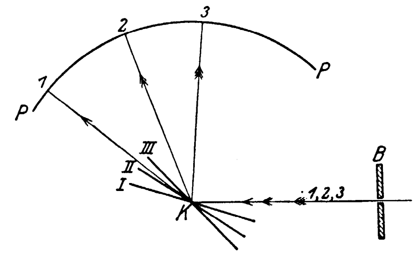


Abb. 459. Zur Drehkristallmethode.

Es gibt heute zahlreiche diesem Zweck dienende technische Varianten Als Beispiel sei die Drehkristallmethode angeführt (Abb. 459). Durch eine Bleiblende B fällt ein feines Bündel Röntgenlicht auf einen Kristall K, der um den Auftreffpunkt der Strahlen gedreht werden kann. Reflexion findet nur bei denjenigen Stellungen des Kristalls statt, bei denen für einen der in der einfallenden Strahlung enthaltenen Anteile die Gl. 2 erfüllt ist. So wird etwa der eine Anteil bei der Stellung I des Kristalls in die Richtung 1 reflektiert, ein zweiter bei der Stellung II in die Richtung 2 usw. Auf einem kreisförmig gebogenen Film PP entsteht daher bei allmählicher Drehung des Kristalls ein Spektrum, welches, wenn B ein schmaler, zur Zeichnungsebene senkrechter Spalt ist, aus feinen Linien besteht, genau wie die gewöhnlichen optischen Spektren (z. B. in Abb. 462, § 475).

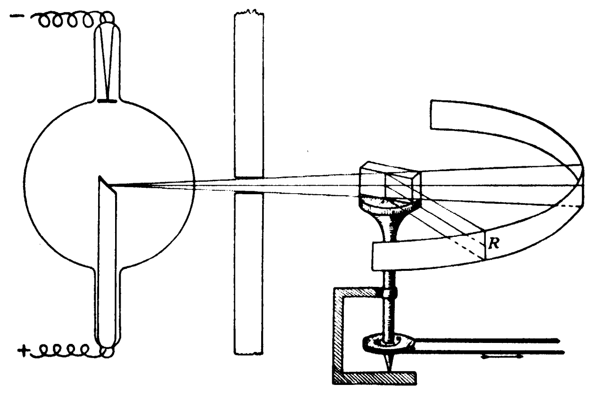


Abb. 460. Spektroskopie der Röntgenstrahlen nach Bragg.

Abb. 460 zeigt das Schema der Braggschen Anordnung. Die Genauigkeit der Wellenlängenmessung der Röntgenstrahlen erreicht zwar diejenige im optischen Spektrum nicht, ist aber doch schon sehr beträchtlich.

Bei Verwendung von Röntgenstrahlen bekannter Wellenlänge können natürlich die an Kristallen auftretenden Interferenzen auch zur Untersuchung der Gitterstruktur der Kristalle dienen. Auch lassen sich bei nichtkristallinischen, also amorphen Körpern gewisse Schlüsse auf den molekularen Bau ziehen. Für diese Untersuchungen kommt neben dem LAUE-Verfahren insbesondere das Verfahren von DEBYE und SCHERRER in Frage, bei dem keine großen, gut ausgebildeten Kristalle benötigt werden, sondern das zu untersuchende Material in Pulver-



Abb. 461. DEBYE-SCHERRER-Diagramm am festen N_2O_4.

form verwendet wird. Dieses Verfahren ist im Prinzip mit der Drehkristallmethode identisch. Während bei dieser aber eine größere Kristallfläche allmählich in verschiedene Orientierungen zu einem Bündel von Röntgenstrahlen gebracht wird, enthält das Pulver Kristallflächen mit allen möglichen Orientierungen, so daß an ihm alle Arten von Reflexionen gleichzeitig stattfinden, die am Drehkristall zeitlich nacheinander eintreten. Wird das Pulver in ein Röhrchen gebracht, so ergeben sich bei der Bestrahlung mit Röntgenstrahlen Interferenzerscheinungen, wie sie als Beispiel Abb. 461 zeigt, aus denen die Struktur der im Pulver enthaltenen Kriställchen berechnet werden kann. Die Strukturuntersuchung mit Röntgenstrahlen bildet heute schon ein wichtiges Hilfsmittel der Technik.

Neuerdings ist es auch gelungen, die Wellenlänge von Röntgenstrahlen mit den gleichen Gittern zu messen, die für optische Zwecke gebraucht werden (§ 447). Dabei wird der Kunstgriff benutzt, daß die Röntgenstrahlen nahezu streifend auf das Gitter fallen. Die beugende Wirkung ist dann ebenso groß wie bei senkrechtem Einfall auf ein Gitter, dessen Gitterkonstante gleich der Projektion der wirklichen Gitterkonstante auf die Wellenebene der Röntgenstrahlen ist. Infolge des streifenden Einfalls ist diese Projektion sehr klein und fällt in die Größenordnung der Wellenlänge der Röntgenstrahlen. Beobachtet wird die vom Gitter reflektierte Röntgenstrahlung. Die Ergebnisse der Messungen stimmen mit denen, die an Kristallen gewonnen wurden, gut überein.

473. **γ-Strahlen und Höhenstrahlung.** Von den radioaktiven Substanzen (§ 519) geht u. a. eine Strahlung aus, welche mit den Röntgenstrahlen in allen Eigenschaften übereinstimmt, aber im allgemeinen noch durchdringender ist, die sog. γ-Strahlung. Ihre Untersuchung nach der im § 472 beschriebenen Methode hat ergeben, daß es sich um eine Strahlung handelt, die bis zu viel kürzeren Wellenlängen reicht als die Röntgenstrahlen (Tab. 31, § 465).

Die neuerdings entdeckte Höhenstrahlung (HESSsche Strahlung, Ultrastrahlung) ist noch erheblich durchdringender als die kurzwelligste γ-Strahlung, man muß ihr daher, falls sie überhaupt eine elektromagnetische Wellenstrahlung ist, eine noch viel kleinere Wellenlänge zuschreiben (Tab. 31). Es liegen heute gewisse Gründe für die Annahme vor, daß sie aus Korpuskeln (Elektronen, Protonen oder Neutronen) von außerordentlich großer Geschwindigkeit besteht. Die Höhenstrahlung wird in der freien Natur beobachtet, und zwar wächst ihre Stärke beträchtlich, je höher man sich über dem Meeresspiegel befindet. Man schließt aus diesem Verhalten, daß es sich um eine aus dem Weltraum, also wohl von anderen Gestirnen kommende Strahlung handelt, welche beim Durchlaufen der Atmosphäre allmählich absorbiert wird. Man weist sie durch die Ionisation

nach, die sich in einem geschlossenen Gefäß noch zeigt, wenn man alle anderen Ionisationsquellen soweit wie möglich beseitigt hat. Unter der Voraussetzung, daß die Höhenstrahlung doch eine elektromagnetische Wellenstrahlung ist, kann man ihre Wellenlänge auf Grund ihrer Durchdringungsfähigkeit schätzen und kommt dabei auf Wellenlängen von 10^{-3} bis 10^{-5} ÅE.

474. **Optik der elektrischen Wellen.** Die auf elektrischem Wege erzeugten elektrischen Wellen zeigen in optischer Beziehung grundsätzlich das gleiche Verhalten wie die übrigen Gebiete des gesamten Spektrums und schließen sich auf Seite der kürzesten elektrischen Wellen glatt an die längsten ultraroten Wellen an. Sie zeigen also Reflexion, Brechung, Totalreflexion, Dispersion, Absorption, Interferenz, Polarisation und Beugung. Natürlich sind in Anbetracht der großen Wellenlänge zum Nachweis dieser Erscheinungen Apparaturen erforderlich, welche von den in der gewöhnlichen Optik gebräuchlichen weitgehend abweichen. HEINRICH HERTZ zeigte die Brechung kurzer elektrischer Wellen mittels großer Prismen und Linsen aus Paraffin oder Pech, ihre Beugung und Polarisation mittels Drahtgittern. Näheres über elektrische Wellen s. § 385 ff.

Im völlig freien Raume breiten sich die elektrischen Wellen wie das Licht geradlinig aus. Die für die Möglichkeit eines drahtlosen Verkehrs über die ganze Erde entscheidend wichtige Tatsache, daß sich elektrische Wellen von nicht zu kleiner Wellenlänge der Erdoberfläche anschmiegen, also um die Erde herumlaufen, beruht auf Wechselwirkungen zwischen den elektromagnetischen Feldern in der Welle und der elektrisch leitenden Erdoberfläche. Auch spielt dabei die sog. Heaviside-Schicht eine Rolle. Es scheint, daß sich in etwa 300 km Höhe in der Atmosphäre eine Schicht mit beträchtlicher elektrischer Ladung befindet. An einer solchen müssen elektrische Wellen reflektiert werden. Dadurch werden sie an der freien Ausbreitung in den Raum gehindert und immer wieder auf die Erde zurückgeworfen. Die Interferenz elektrischer Wellen wird bei der Richtungstelegraphie ausgenutzt, welche darauf beruht, daß man durch Anwendung geeignet angebrachter und geformter Antennen die Wellen in einer Richtung sich gegenseitig durch Interferenz schwächen, in einer andern verstärken läßt.

475. **Emissions- und Absorptionsspektren.** Das Spektrum selbstleuchtender Körper nennt man ihr Emissionsspektrum. Es hat je nach der Art des lichtaussendenden Körpers ein sehr verschiedenartiges Aussehen.

Glühende feste und flüssige Körper senden ein kontinuierliches Spektrum aus, d. h. ihr Spektrum enthält die ununterbrochene Folge aller Wellenlängen, also im sichtbaren Gebiet von Rot bis Violett, aber darüber hinaus auch im Ultrarot und Ultraviolett. Dagegen zeigen lumineszierende feste und flüssige Körper (§ 487) Spektren, welche aus einzelnen Linien oder Liniengruppen oder mehr oder weniger ausgedehnten, verwaschenen Wellenlängenbereichen bestehen.

Bei den leuchtenden Gasen, z. B. in der Glimmentladung, gibt es zwei verschiedene Typen von Spektren, die Linienspektren und die Bandenspektren. Die Linienspektren (ein Beispiel im Mittelstreifen der Abb. 462) bestehen aus einer oft sehr großen Zahl einzelner feiner Linien, die deutlich voneinander getrennt sind, wenn sie sich auch an einzelnen Stellen häufen können. Auch die Bandenspektren bestehen aus einzelnen Linien. Aber sie sind stets sehr dicht gehäuft und bilden deutlich einzelne, aus sehr vielen Linien bestehende Gruppen, die sog. Banden, an deren einem Ende, dem Bandenkopf, sie besonders dicht gedrängt liegen. Die Linienspektren werden von leuchtenden Atomen, die Bandenspektren von leuchtenden Molekülen ausgesandt. Man spricht deshalb auch von Atomspektren und Molekülspektren. Die Gesetzmäßigkeiten der Spektren werden im 33. Kapitel eingehend besprochen werden. Dort findet sich auch eine Anzahl von Abbildungen charakteristischer Spektren (§ 496 u. 499).

Das Licht einer Lichtquelle, die ein kontinuierliches Spektrum aussendet — z. B. einer Bogenlampe — wird beim Durchgang durch eine Substanz in einer für diese charakteristischen Weise verändert. Es erscheinen in dem kontinuierlichen Spektrum dunkle Linien oder Streifen, nämlich bei denjenigen Wellenlängen, deren Licht von der Substanz absorbiert, d. h. nicht durchgelassen wird. Ein solches Spektrum heißt das Absorptionsspektrum der Substanz. Die Absorptionsgebiete sind bei den festen Körpern meist ziemlich breite, verwaschene Gebiete, bei den Gasen feine Linien (Abb. 462 oben und unten). Substanzen, die im sichtbaren Bereich keine oder nur sehr schmale Absorptionsgebiete haben, sind durchsichtig, wie Glas oder Wasser.



Abb. 462. Ausschnitt aus dem Sonnenspektrum mit FRAUNHOFERschen Linien. In der Mitte das Emissionsspektrum des Eisens im gleichen Spektralbereich[1]).

Das Spektrum des Sonnenlichts ist an sich kontinuierlich, zeigt sich aber von sehr vielen feinen dunklen Linien, den (zuerst 1802 von WOLLASTON beobachteten) sog. FRAUNHOFERschen Linien durchzogen (Abb. 462). Die stärksten von ihnen werden mit den Buchstaben A, B usw. bezeichnet und dienen oft zur Orientierung im Spektrum. Die FRAUNHOFERschen Linien rühren von der Absorption des von der Oberfläche des glühenden Sonnenkerns (Photosphäre) ausgesandten Lichts in der Atmosphäre der Sonne (Chromosphäre) her, einzelne von ihnen auch von einer Absorption in der Erdatmosphäre (tellurische Linien). Das Sonnenspektrum mit den FRAUNHOFERschen Linien ist also das Absorptionsspektrum der in der Chromosphäre enthaltenen Substanzen. Abb. 462 zeigt durch Vergleich mit dem Eisenspektrum das Auftreten von Absorptionslinien des Eisens im Sonnenspektrum.

476. Spektralanalyse. Das Spektrum — Emissions- oder Absorptionsspektrum — eines Elements ist für dieses absolut charakteristisch. Es kann also zum Nachweis des Vorhandenseins eines Elements dienen. Hierauf gründeten BUNSEN und KIRCHHOFF (1859) die Spektralanalyse, welche ein wichtiges Hilfsmittel der chemischen und metallographischen Forschung bildet. Neu und von großer Wichtigkeit ist die Spektralanalyse durch Untersuchung der Röntgenspektren. Mittels dieser ist es in letzter Zeit gelungen, das Vorhandensein der bis dahin noch nicht entdeckten Elemente mit den Ordnungszahlen 43 (Masurium), 72 (Hafnium) und 75 (Rhenium) nachzuweisen, die sich wegen ihrer sehr geringen Konzentration in den Mineralien bisher dem chemischen Nachweis entzogen.

Von größter Bedeutung ist auch die Anwendung der Spektralanalyse auf die Fixsterne. Die Untersuchung der Fixsternspektren hat ergeben, daß sich auf ihnen durchweg die gleichen chemischen Elemente befinden wie auf der Erde. Darüber hinaus geben die Fixsternspektren wichtige Aufschlüsse über den Zustand der Fixsterne überhaupt.

477. Reine Spektralfarben und Mischfarben. Die reinen Spektralfarben sind solche, wie sie durch spektrale Zerlegung des Lichtes mit einem Prisma oder Gitter entstehen. Es ist nun eine bemerkenswerte Tatsache, daß man den Farbton jeder Spektralfarbe auch auf unendlich viele verschiedene Arten durch Mischung

[1]) Das Original von Abb. 462 wurde mir von Herrn E. FREUNDLICH (Potsdam) zur Verfügung gestellt.

mehrerer reiner Spektralfarben hervorrufen kann. Zur Untersuchung dieser Verhältnisse konstruierte HELMHOLTZ nach dem Prinzip des Spektrometers einen Lichtmischapparat, mittels dessen der Farbeindruck zweier Lichtgemische bzw. die Farbe eines Gemisches mit einer reinen Spektralfarbe verglichen werden kann. Mischt man zwei verschiedene reine Spektralfarben, so ergibt sich, je nach dem Mischungsverhältnis, eine Folge von Farbtönen, die einen lückenlosen Übergang von der einen zur anderen reinen Spektralfarbe darstellen. Dabei aber zeigt sich ein erheblicher Unterschied, je nachdem ob die beiden reinen Farben einander im Spektrum nahe liegen oder ob sie weit voneinander entfernt sind. Bei der Mischung eines reinen Rot und Gelb z. B. erscheinen die Mischfarben den Farben des dazwischen liegenden spektral reinen Gelbrot vollkommen gleich. Sie zeigen die gleiche charakteristische Sättigung, die bei der Betrachtung reiner Spektralfarben auch ästhetisch so sehr befriedigt. Mischt man jedoch zwei im Spektrum weiter auseinanderliegende reine Farben, so ist die lückenlose Folge der Zwischenfarben zwar auch vorhanden, aber im mittleren Teil der Folge erscheint die Mischfarbe weißlicher, weniger gesättigt, als die im Farbton gleiche reine Spektralfarbe. Und es gibt zu jeder reinen Spektralfarbe — den Bereich zwischen etwa 492 mμ bis 570 mμ (Gelbgrün bis Grünblau) ausgenommen — stets eine bestimmte zweite reine Spektralfarbe, mit der zusammen sie, in einem bestimmten Intensitätsverhältnis gemischt, ein reines Weiß ergibt. Ein solches Farbenpaar bezeichnet man als Komplementärfarben. Zwei Komplementärfarben zeichnen sich auch dadurch aus, daß sie nebeneinander den Eindruck einer besonders befriedigenden Farbenharmonie erzeugen. Diese Tatsache ist von großer Wichtigkeit in der Malerei. (Man vergleiche z. B. die Wirkung des Blau und Gelb am Mantel der Madonna unter den Felsen von Leonardo da Vinci). Zu den Farben des oben ausgenommenen Bereichs gibt es keine spektral reinen Komplementärfarben, wohl aber solche, die Mischfarben reiner Spektralfarben sind. Es sind dies die im Spektrum nicht enthaltenen Purpurfarben, welche durch Mischung von spektral reinem Rot und Violett entstehen.

Die verschiedenen Purpurtöne bilden, je nach dem Mischungsverhältnis aus Rot und Violett, eine stetige Farbfolge vom reinen Rot bis zum reinen Violett. Der Übergang von dem einen Ende des Spektrums zum anderen kann daher auf zwei Wegen erfolgen, entweder über die Folge der reinen Spektralfarben: Rot, Gelb, Grün, Blau, Violett, oder über die Purpurtöne: Rot, Purpur, Violett. Das sichtbare Spektrum, das physikalisch bei Rot und Violett abreißt, wird also physiologisch durch die Purpurfarben zu einem Farbenkreise geschlossen.

Außer dem Purpur scheinen in der Folge der reinen Spektralfarben noch gewisse Farben zu fehlen, unter denen besonders das Braun und Olivgrün zu nennen sind. Tatsächlich aber handelt es sich hier nicht wie beim Purpur um wirkliche neue Farbtöne. Vielmehr zeigt z. B. die Untersuchung des Spektrums eines braunen Körpers mit dem Farbenmischapparat, daß seine Farbe in Wahrheit Gelbrot ist. Braune, in Wirklichkeit also gelbrote Körper verdanken ihren besonderen Farbeneindruck der Tatsache, daß sie nur einen verhältnismäßig geringen Teil des auffallenden Lichtes reflektieren. Sie haben neben ihrer Farbe noch die Eigenschaft der Schwärzlichkeit, und diese wird unbewußt in den Farbeindruck mit einbezogen. Man kann ein braunes und ein gelbrotes Täfelchen vollkommen farbgleich erscheinen lassen, wenn man das braune stärker mit weißem Licht beleuchtet als das gelbrote. Wenn wir das Farburteil Braun fällen, so ist dabei stets ein Vergleich mit der Schwärzlichkeit der umgebenden, gleich hell beleuchteten Objekte mit im Spiel, und der Farbeindruck hängt entscheidend von der Helligkeit der Umgebung ab. Projiziert man mittels eines gelbroten

Glases ein gelbrotes Feld auf eine weiße Wand, so erscheint das Feld gelbrot, wenn die Umgebung dunkel ist, aber braun, wenn die Umgebung weiß ist. Weitere typische schwärzliche Farben sind das Olivgrün und das Grau, dieses ein schwärzliches Weiß. Hiernach ist jeder Farbeindruck durch drei Bestimmungsstücke eindeutig festgelegt: durch Farbton, Sättigung und Helligkeit.

Unter den um die Farbenlehre verdienten Forschern ist in neuerer Zeit insbesondere OSTWALD zu nennen. Bekanntlich hat auch GOETHE der Farbenlehre ein sehr intensives Studium gewidmet und die NEWTONsche Theorie der bei der Brechung entstehenden Farben leidenschaftlich bekämpft. Ihm schloß sich später, wenn auch bedingt, SCHOPENHAUER an. Während GOETHES Beobachtungen durchweg völlig zutreffend waren, irrt er — durch künstlerisch-intuitive Motive allzu stark beeinflußt — entscheidend in ihrer physikalischen Deutung. Seine Farbenlehre muß daher vom physikalischen Standpunkt aus abgelehnt werden. Hingegen enthält sie eine große Zahl wichtiger und neuer physiologischer Erkenntnisse.

478. **Die Dreifarbentheorie von YOUNG-HELMHOLTZ.** Zur physiologischen Deutung der vorstehend beschriebenen Erscheinungen ist die Dreifarbentheorie des Sehens aufgestellt worden, deren Hauptvertreter YOUNG und HELMHOLTZ waren. Nach dieser Theorie beruht ein Farbeindruck auf drei verschiedenen Einzelprozessen in der Netzhaut des Auges, und es wird in der Regel angenommen, daß das Auge drei verschiedene Arten von farbentüchtigen Gebilden (Zäpfchen, § 430) enthält, und das jede Art auf eine bestimmte reine Spektralfarbe maximal reagiert, aber in abgestuftem Maße auch auf die benachbarten Bereiche, in Analogie zu einem stark gedämpften, schwingungsfähigen Gebilde (§ 121). Bei einem beliebigen Farbeneindruck werden im allgemeinen alle drei Gruppen von Zäpfchen, aber in verschiedener Intensität, erregt, und je nach dem Grade der Intensitätsverteilung auf die drei Gruppen entsteht im Gehirn der Farbeindruck nach Farbton, Sättigung und Helligkeit.

Eine wichtige Stütze dieser Theorie bilden die Untersuchungen an Farbenblinden. Diese sehen das Spektrum nicht als lückenlose Farbfolge, sondern etwa wie ein gesundes Auge diejenige Farbfolge sieht, die bei der Mischung von Gelb mit dem dazu komplementären Blau entsteht. Die beiden Enden des Spektrums erscheinen gelb bzw. blau, und in der Gegend von etwa 500 mμ erscheint reines Weiß. Bei sonst gesunden Menschen gibt es zwei Typen von Farbenblinden, die Rotblinden und die Grünblinden. Den letzteren erscheint auch ein gewisses Purpur als weiß. Beide stimmen darin überein, daß sie Rot und Grün verwechseln. Außerdem gibt es noch, aber nur als Folge gewisser Erkrankungen, eine Violett- oder Blaublindheit mit anderen Ausfallserscheinungen. Man deutet die Farbenblindheit als Folge des Ausfalls einer der drei Arten von Zäpfchen.

479. **Körperfarben.** Die Farben, die die Körper im auffallenden Licht zeigen, beruhen darauf, daß sie nicht alle Farben in gleichem Maße reflektieren. Ein Körper, der nur rotes Licht reflektiert, erscheint bei Beleuchtung mit weißem Licht rot. Enthält aber das auffallende Licht die von ihm reflektierte Farbe nicht, z. B. bei einem rein roten Körper in blauem Licht, so erscheint er schwarz. Enthält das auffallende Licht nur einen Teil der von dem Körper reflektierten Farben, so entsteht der Farbeindruck, der der Mischung der übrigbleibenden Farben, je nach ihrem Intensitätsverhältnis, entspricht. Da wir als Farbe eines Körpers schlechthin seine Farbe im Sonnenlicht verstehen, so erscheint er — uns in der Regel unbewußt — bei dem im kurzwelligen Spektrum viel schwächeren künstlichen Licht dem Auge oft schon in veränderter Farbe. Die Schwierigkeit der Auswahl eines Stoffes bei künstlichem Licht ist bekannt.

Eine praktisch besonders wichtige Rolle spielen unter den Körperfarben die der Farbstoffe oder Pigmente. Die Mischung von reinen Spektralfarben, die

man auch als eine Addition von Lichtern bezeichnen kann, folgt ganz anderen Gesetzen, als die Mischung von Farbstoffen, wie sie etwa der Maler zur Erzielung eines bestimmten Farbtons vornimmt. Die Mischung eines blauen und eines gelben Farbstoffes ergibt bekanntlich keineswegs Weiß, sondern Grün. Es hängt das damit zusammen, daß das Gemisch Eigenschaften der beiden Komponenten sowohl bezüglich der Reflexion als auch der Absorption besitzt.

Die Farben der Körper im durchgehenden Licht sind hauptsächlich durch die Absorption bestimmter Farbbereiche beim Durchgang durch den Körper gegeben. Dabei kann die gleiche Farbe, wie bei den Oberflächenfarben, auf unendlich viele verschiedene Arten durch Mischung reiner Spektralfarben entstehen.

32. Kapitel.

Temperaturstrahlung und Lumineszenzerscheinungen.

480. **Temperaturstrahlung.** Unter Temperaturstrahlung oder Wärmestrahlung versteht man jede Strahlung, die ihre Entstehung der Temperatur eines Körpers verdankt und in ihrer Intensität und spektralen Energieverteilung von dieser Temperatur abhängt.

Stehen sich zwei Körper von verschiedener Temperatur gegenüber, ohne daß Wärmeleitung (§ 198) zwischen ihnen stattfindet, so gleichen sich doch ihre Temperaturen im Laufe der Zeit durch Wärmestrahlung aus. Diese geht so vor sich, daß nicht nur der wärmere Körper dem kälteren Wärme zustrahlt, sondern auch der kältere dem wärmeren. Die erste Wirkung überwiegt jedoch die letztere um so mehr, je größer der Temperaturunterschied der Körper ist (Satz von PREVOST).

Die Erwärmung eines Körpers durch Strahlung beruht darauf, daß die auf ihn fallende Strahlung in ihm absorbiert und in Molekularbewegung, also in Wärme, umgesetzt wird. Umgekehrt kühlt sich ein Körper durch Ausstrahlung deshalb ab, weil dabei ein Teil seiner Molekularenergie in Strahlungsenergie verwandelt wird.

481. **KIRCHHOFFsches Gesetz. Schwarzer Körper.** Das KIRCHHOFFsche Gesetz (1859) besagt, daß die Strahlungsemission E eines Körpers zu seiner Strahlungsabsorption A stets in einem ganz bestimmten, konstanten Verhältnis steht. Also

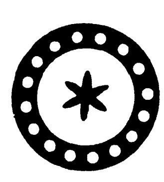
$$\frac{E}{A} = C. \qquad (1)$$

Die Größe C ist lediglich von der Temperatur und der Wellenlänge abhängig, im übrigen für alle Körper die gleiche. Unter der Strahlungsemission E verstehen wir die in 1 Sekunde von 1 cm² der Oberfläche eines Körpers ausgesandte Strahlungsenergie. Die Absorption A ist definiert als der Bruchteil der auf einen Körper fallenden Strahlung, der von dem Körper absorbiert, also nicht durchgelassen oder reflektiert, wird. Absorbiert ein Körper die gesamte auf ihn fallende Strahlung, so ist $A = 1$. Einen solchen Körper bezeichnet man, sofern es sich zunächst um das sichtbare Spektralgebiet handelt, im täglichen Leben als schwarz. In der Physik aber versteht man unter einem „schwarzen Körper“ einen solchen, welcher jegliche Strahlung, ganz gleich welcher Wellenlänge, vollkommen absorbiert. Keine Substanz erfüllt diese Bedingung vollständig. Trotzdem ist ein schwarzer Körper physikalisch weitestgehend realisierbar, und zwar durch eine nicht zu große Öffnung in der Wand eines geschlossenen Hohlraums, insbesondere, wenn dessen Innenwände geschwärzt sind. Ein in eine solche Öffnung fallender Strahl wird im Innern des

Hohlraums praktisch vollkommen absorbiert, ehe er nach mehrfachen Reflexionen zufällig wieder aus der Öffnung austritt. Wird z. B., was durch Berußung leicht erreicht wird, jeweils nur 5 % der Strahlung an der Wandung reflektiert, so ist nach der zweiten Reflexion nur noch 0,25 %, nach der dritten nur noch 0,0125 % usw. übrig. Ein solches Loch ist also ein praktisch vollkommen schwarzer Körper. Macht man in die Wand eines geschlossenen Kastens mit berußten Innenwänden ein kleines Loch und berußt auch dessen Umgebung, so sieht man, daß das Loch noch erheblich dunkler ist als der Ruß, welcher bereits etwa 95 % der auffallenden Strahlung absorbiert.

Hat ein Körper aber die größte mögliche Absorption A, so ist nach Gl. 1 auch seine Emission größer als die eines jeden andern Körpers unter gleichen Bedingungen. Es ist daher die Strahlung eines erwärmten schwarzen Körpers, die sog. „schwarze Strahlung", in jedem Spektralbereich stärker als diejenige irgendeines andern Körpers von gleicher Temperatur. Er bildet einen Grenzfall aller in der Natur vorkommenden strahlenden Körper. Die Strahlung anderer Körper bleibt stets — und zwar in den verschiedenen Spektralgebieten meist in verschiedenem Grade — hinter derjenigen des schwarzen Körpers zurück.

Daß ein Körper um so stärker strahlt, je schwärzer er aussieht, zeigt folgender Versuch. Man bringe auf einem Stück Platinblech einen Fleck aus Tusche an, welcher sich in kaltem Zustande schwarz (A groß) von seiner spiegelnden Umgebung (A klein) abhebt. Erwärmt man jetzt das Blech in einer Bunsenflamme zum Glühen, so leuchtet der Tuschefleck erheblich heller als seine Umgebung (Abb. 463).


a

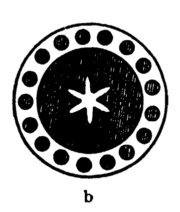

b

Abb. 463. Schwarz-weißer Körper, a bei tiefer Temperatur im reflektierten Licht, b bei hoher Temperatur selbstleuchtend.

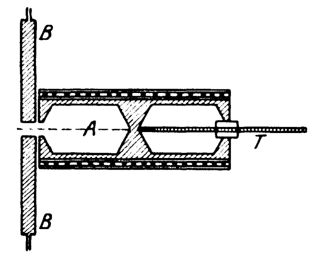


Abb. 464. Beispiel eines schwarzen Körpers für Strahlungsmessungen nach RUBENS.

Ein Loch in der Wand eines erwärmten Hohlraums ist demnach auch der stärkste, bei einer bestimmten Temperatur der Hohlraumwandung denkbare Strahler (schwarzer Strahler). Da die Strahlung des schwarzen Körpers den idealen Grenzfall aller sonstigen Strahler darstellt, so ist ihre Untersuchung von großem theoretischen und praktischen Interesse. Abb. 464 zeigt als Beispiel einen „schwarzen Körper", der für Strahlungsmessungen bis etwa 600° dienen kann. Er besteht aus einem mit zwei ausgebohrten Hohlräumen versehenen Kupferblock, der von einer zur elektrischen Heizung dienenden Drahtspirale umgeben ist. Als strahlender Hohlraum dient der Teil A, der vorn mit einer Blende versehen ist, vor der sich noch eine mit Wasser gekühlte Blende B befindet, damit nur Strahlung, die aus dem Innern des Hohlraums kommt, zur Beobachtung gelangen kann. Der zweite Hohlraum dient in der Hauptsache zur Einführung eines Thermometers T, mittels dessen die Temperatur der Wand des strahlenden Hohlraums gemessen werden kann. (Eine Ausführung für höhere Temperaturen s. Abb. 451, § 468.) Man nennt die schwarze Strahlung wegen der Art ihrer Erzeugung, und weil sie sich in einem geschlossenen Hohlraum, der anfänglich mit einer Strahlung von beliebiger Energieverteilung erfüllt war, durch Wechselwirkung mit den Wänden stets von selbst herstellt, auch wohl Hohlraumstrahlung.

Ein Körper, bei dem die Strahlung zwar der des schwarzen Körpers nicht gleich ist, bei dem aber alle Spektralgebiete in ihrer Energie um den gleichen Bruchteil schwächer sind als beim schwarzen Körper, heißt grau. Denn ein solcher Körper erscheint im reflektierten Lichte grau. Das rührt daher, daß er nach dem KIRCHHOFFschen Gesetz auch von allen Spektralfarben den gleichen Bruchteil absorbiert. Fällt auf ihn weißes Licht, so wird dieses in allen Spektralbereichen im gleichen Grade geschwächt, und im reflektierten Lichte erscheint keine Farbe bevorzugt.

482. **Selbstumkehr der Spektrallinien.** Eine Konsequenz aus dem KIRCHHOFFschen Gesetz ist auch die Selbstumkehr der Spektrallinien (FOUCAULT 1849). Man entwerfe auf einem Schirm ein Spektrum einer Bogenlampe. Vor den Spalt setze man eine Bunsenflamme, über der sich ein Eisenlöffel mit metallischem Natrium befindet, so daß das Natrium mit gelber Flamme verbrennt, und zwar so, daß das durch den Spalt tretende Licht die Natriumflamme passiert. Dann erscheint im Gelben eine dunkle Linie im Spektrum (Abb. 465 b), die sich bei größerer Auflösung als eine Doppellinie erweist. Löscht man die Bogenlampe aus, während das Natrium noch brennt, so sieht man jetzt an der gleichen Stelle eine vorher nicht erkennbare schwache, von der Natriumflamme herrührende gelbe Linie.

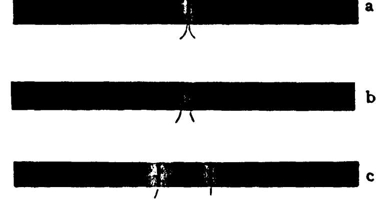


Abb. 465. Selbstumkehr der Spektrallinien im Dampf von Lithium (a), Natrium (b) und Kalium (c). (Erstes Linienpaar der Hauptserien in gleicher Wellenlängenskala.)

Diese Selbstumkehr erklärt sich auf folgende Weise. Nach dem KIRCHHOFFschen Gesetz absorbieren die Atome des Natriumdampfes Licht an den gleichen Stellen des Spektrums, an denen sie Licht emittieren, da ja Emission und Absorption stets parallel gehen. (Es gilt dies allerdings nur für diejenigen Spektrallinien, die die Atome in ihrem jeweiligen Zustande emittieren können. Der Dampf absorbiert daher keineswegs alle Spektrallinien, die die Atome überhaupt emittieren können, sondern nur diejenigen, welche dem sog. Grundzustand des Atoms angehören, vgl. § 496.) Der in der Flamme befindliche Natriumdampf absorbiert also Licht der gleichen Wellenlänge, wie er es selbst aussendet. Die eigene Lichtemission der Flamme ist aber nicht entfernt stark genug, um das Licht, welches der Dampf dem Licht der Bogenlampe entzieht, im Spektrum zu ersetzen. Die betreffende Stelle im Spektrum, obgleich ganz schwach erhellt, erscheint daher durch Kontrast mit der viel helleren Umgebung dunkel. Zum Gelingen des Versuchs ist es an sich nicht nötig, daß der Natriumdampf selber leuchtet, man kann ihn auch mit einem mit Natriumdampf gefüllten Glasgefäß anstellen. Andere Gase zeigen die gleiche Erscheinung, z. B. Lithium- und Kaliumdampf (Abb. 465 a u. c).

483. **Das PLANCKsche Strahlungsgesetz des schwarzen Körpers.** PLANCK (1900) hat auf theoretischem Wege ein Gesetz für die Verteilung der Energie auf die einzelnen Bereiche des Spektrums eines schwarzen Körpers abgeleitet, welches mit der Erfahrung in völliger Übereinstimmung ist. Je nachdem man das Spektrum nach Wellenlängen λ oder nach Schwingungszahlen ν einteilt, bedeute $E_\lambda d\lambda$ bzw. $\mathfrak{K}_\nu d\nu$ die Energie, welche in linear polarisierter schwarzer Strahlung in einem Bereich zwischen den Wellenlängen λ und $\lambda + d\lambda$ bzw. den Schwingungszahlen ν und $\nu + d\nu$ in 1 sec durch jeden Querschnitt eines Strahlungskegels vom Öffnungswinkel $\omega = 1$ geht. Dann ist nach PLANCK

$$E_\lambda = \frac{c^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{ch}{k\lambda T}} - 1} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{K}_\nu = \frac{h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \qquad (2a)$$

(Die eine dieser beiden Gleichungen folgt aus der andern, wie man leicht nachrechnen kann. Wenn $d\lambda$ bzw. $d\nu$ den gleichen Spektralbereich bezeichnen, so ist $\lambda\nu = c$ und daher $|d\lambda| = c\,|d\nu/\nu^2|$. Ferner muß $\mathfrak{K}_\nu d\nu = E_\lambda d\lambda$ sein. Setzt man den obigen Wert von E_λ ein und ersetzt überall λ durch ν, so folgt die Gleichung für $\mathfrak{K}_\nu$.) In Gl. 2a bedeutet T die absolute Temperatur, k ist die BOLTZMANNsche Konstante, die wir bereits in der mechanischen Wärmetheorie kennengelernt haben (§ 156), c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum und h ebenfalls eine Konstante, das sog. PLANCKsche Wirkungsquantum. Es ist $k = 1{,}37_2 \cdot 10^{-16}$ erg/grad und $h = 6{,}54_4 \cdot 10^{-27}$ erg·sec. Der Verlauf von E_λ ist in Abb. 466 für eine Anzahl von Temperaturen als Funktion der Wellenlänge dargestellt.

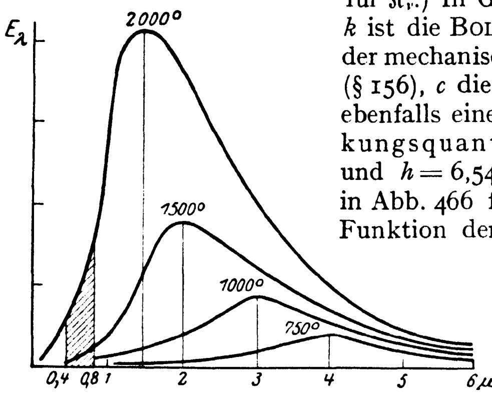


Abb. 466. Graphische Darstellung des PLANCKschen Strahlungsgesetzes. (Der schraffierte Teil bedeutet das sichtbare Gebiet.)

Für die Ausstrahlung von 1 cm² der Oberfläche eines schwarzen Körpers im Wellenlängenbereich $d\lambda$ bzw. im Schwingungszahlbereich $d\nu$ in 1 sec ergibt sich aus den Gl. 2a

$$\varepsilon_\lambda d\lambda = 2\pi E_\lambda d\lambda = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{ch}{k\lambda T}} - 1},$$

$$\text{bzw.} \quad \varkappa_\nu d\nu = 2\pi \mathfrak{K}_\nu d\nu = \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \tag{2b}$$

Die Herleitung des PLANCKschen Strahlungsgesetzes beruht auf der schon mehrfach erwähnten Quantentheorie, welche den Ausgangspunkt für die moderne Entwicklung der Physik gebildet hat (Näheres s. im 33. Kapitel). Hier sei nur so viel erwähnt, daß das wesentlich Neue in dieser Ableitung in der Einführung der Größe h und in der Tatsache liegt, daß ihr ein bestimmter, endlicher Betrag zukommt. Die ältere sog. klassische Physik führt nämlich unweigerlich zu einem Strahlungsgesetz, das aus Gl. 2 entsteht, wenn man die Konstante h gegen Null konvergieren läßt, also das wesentliche Merkmal der PLANCKschen Theorie, die endliche Größe von h, beseitigt. Für verschwindend kleines $ch/k\lambda T$ findet man durch Reihenentwicklung

$$E_\lambda = \frac{c k T}{\lambda^4}. \tag{3}$$

Die Konstante h tritt hier nicht mehr auf. Das durch Gl. 3 dargestellte Gesetz ist tatsächlich bereits früher auf der Grundlage der klassischen Physik — insbesondere des Äquipartitionsgesetzes (§ 156) — von RAYLEIGH und JEANS abgeleitet worden. Es kann aber unmöglich der Wirklichkeit entsprechen, schon deshalb nicht, weil nach Gl. 3 die Funktion E_λ kein Maximum bei einer endlichen Wellenlänge hätte, was erfahrungsgemäß der Fall ist. Jedoch kann man, auf dem Boden des PLANCKschen Gesetzes bleibend, das RAYLEIGH-JEANSsche Gesetz als dessen Grenzfall für sehr große Werte des Produkts λT ($\lambda T \gg ch/k$) ansehen. Es muß also bei hohen Temperaturen für den Bereich langer Wellen (Ultrarot) mit gewisser Annäherung gelten. Das ist auch tatsächlich der Fall.

Auf Grund gewisser heute nicht mehr haltbarer Hypothesen, die sich allerdings auch schon vom Boden der klassischen Physik entfernten, hatte schon 1896 W. WIEN ein Strahlungsgesetz aufgestellt, welches lautet

$$E_\lambda = \frac{c_1}{\lambda^5} e^{-\frac{c_2}{\lambda T}}, \tag{4}$$

wobei c_1 und c_2 gewisse Konstanten bedeuten. Man sieht leicht, daß auch dieses Gesetz ein Grenzfall des PLANCKschen Gesetzes ist, nämlich für den Fall, daß man $c_1 = c^2 h$, $c_2 = ch/k$ setzt und die 1 im Nenner von Gl. 2 gegen $e^{\frac{ch}{k\lambda T}}$ vernachlässigt. Das ist dann zulässig, wenn $e^{\frac{ch}{k\lambda T}} \gg 1$, also $\lambda T \ll ch/k$ ist, d. h. unter Voraussetzungen, die denen für die Gültigkeit des RAYLEIGH-JEANSschen Gesetzes gerade entgegengesetzt sind. Es trifft tatsächlich zu, daß das WIENsche Strahlungsgesetz für den Bereich niedriger Temperaturen und kurzer Wellen in gewissen Grenzen mit ausreichender Genauigkeit gilt. Seine Begründung für diesen Fall findet es als ein Grenzfall des allgemeineren PLANCKschen Gesetzes.

Es sei bei dieser Gelegenheit einmal auf das im § 4 Gesagte hingewiesen. Das RAYLEIGH-JEANSsche Gesetz und das WIENsche Gesetz sind nicht etwa durch die Aufstellung des allgemeineren PLANCKschen Gesetzes als falsch erwiesen. Sie sind lediglich in ihrem Geltungsbereich eingeschränkt und als innerhalb ihrer Geltungsbereiche mit sehr großer Näherung zutreffende Grenzgesetze erkannt worden.

484. Das WIENsche Verschiebungsgesetz. Das STEFAN-BOLTZMANNsche Gesetz. Aus dem PLANCKschen Strahlungsgesetz lassen sich noch mehrere andere, schon vor seiner Aufstellung bekannte Gesetze ableiten. Wie man aus Abb. 466 erkennt, hat die Energieverteilungskurve ein Maximum bei einer bestimmten von der Temperatur abhängigen Wellenlänge, und zwar verschiebt sich dieses Maximum mit steigender Temperatur zu kleineren Wellenlängen. Daß dem so ist, zeigt schon die Erfahrungstatsache, daß ein Körper bei niedrigerer Temperatur rot leuchtet, und daß sich die Farbe, d. h. die im Farbeindruck dominierende Wellenlänge, mit steigender Temperatur immer mehr nach kürzeren Wellenlängen verschiebt. Die Lage des Maximums ist aus der Gl. 2a für E_λ durch Differenzieren nach λ zu finden. Bezeichnen wir mit x die Größe $ch/kT\lambda_m$ (λ_m = Wellenlänge im Maximum), und setzen wir $dE_\lambda/d\lambda = 0$, so erhalten wir für x die transzendente Gleichung

$$x + 5e^{-x} = 5,$$

deren Lösung $x = 4{,}9651$ ist. Es ist daher die Wellenlänge im Maximum von E_λ gegeben durch

$$\lambda_m T = \frac{ch}{kx} = b. \tag{5}$$

Dies ist das WIENsche Verschiebungsgesetz (1893). Der Zahlenwert der Konstanten b beträgt $b = 0{,}288$ cm·grad mit einer Genauigkeit von etwa $^1/_2$ %. (Es sei nicht unterlassen, zu bemerken, daß das WIENsche Verschiebungsgesetz unabhängig von der Quantentheorie gilt.)

Die gesamte, von 1 qcm der Oberfläche eines schwarzen Körpers ausgestrahlte Energie E ergibt sich, indem man die Gl. 2b für $\varepsilon_\lambda d\lambda$ über alle Wellenlängen bzw. diejenige für $\varkappa_\nu d\nu$ über alle Schwingungszahlen von 0 bis ∞ integriert. Es ergibt sich dann die Gesamtstrahlung des schwarzen Körpers in 1 sec, bezogen auf die Flächeneinheit seiner Oberfläche

$$E = \sigma T^4, \quad \text{wobei} \quad \sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3} \text{ erg cm}^{-2} \text{ grad}^{-4} \text{ sec}^{-1}. \tag{6}$$

Die Strahlungsenergie eines schwarzen Körpers steigt also mit der 4. Potenz der absoluten Temperatur an. Dies ist das Gesetz von STEFAN (1879) und BOLTZMANN (1884). Die Konstante σ ist nach den besten Messungen $\sigma = 5{,}73 \cdot 10^{-12}$ Watt/cm²grad⁴ mit einer Genauigkeit von etwa 1 %.

485. Temperaturmessung durch Strahlung. Wegen des gesetzmäßigen Zusammenhanges zwischen der Temperatur eines schwarzen Körpers und der

von ihm ausgesandten Strahlung kann man die Temperatur eines schwarzen Körpers durch Untersuchung der von ihm ausgesandten Strahlung finden, und zwar entweder durch Aufsuchung von λ_m, also unter Benutzung des WIENschen Verschiebungsgesetzes oder durch Messung seiner Gesamtstrahlung aus dem STEFAN-BOLTZMANNschen Gesetz. Bei nicht schwarzen Körpern, z. B. den Fixsternen, ist dies nicht ohne weiteres möglich. Bestimmt man ihre Temperatur nach dem STEFAN-BOLTZMANNschen Gesetz, als ob sie schwarze Körper seien, so erhält man eine niedrigere Temperatur als sie sie tatsächlich haben, weil ihre Strahlung ja schwächer ist als die eines schwarzen Körpers von gleicher Temperatur. Ebenso wird im allgemeinen die Anwendung des WIENschen Verschiebungsgesetzes Fehler mit sich bringen. Viele Körper aber, insbesondere viele Fixsterne, sind bei hoher Temperatur von einem schwarzen Körper nicht allzu sehr verschieden, so daß man ihre Temperatur mit Hilfe dieser Gesetze zwar nicht streng, aber doch angenähert richtig erhält. Die Anwendung des STEFAN-BOLTZMANNschen Gesetzes gibt, da die Strahlung ja nur schwächer, nie stärker sein kann als die eines schwarzen Körpers, einen unteren Grenzwert für die Temperatur. Man bezeichnet sie, im Gegensatz zur wahren, durch die Energie der Molekularbewegung (§ 156) definierten Temperatur, als *effektive* oder *Strahlungstemperatur*.

Die Temperaturmessung mit Hilfe der Strahlung heißt *optische Pyrometrie*. Eine verhältnismäßig einfache Methode, die sich insbesondere für Laboratoriumszwecke und für die Technik eignet, ist die folgende. Man bildet die Fläche, deren Temperatur gemessen werden soll, in der Okularblende eines kleinen Fernrohrs ab, innerhalb derer der Glühfaden einer kleinen, regulierbaren Glühlampe angebracht ist. Man regelt die Temperatur des Glühfadens so, daß er die gleiche Flächenhelligkeit hat wie die zu untersuchende Fläche. Dann hebt er sich auf ihr nicht mehr ab und hat die gleiche Strahlungstemperatur wie sie. Aus dem hierzu notwendigen Heizstrom kann man, wenn die Lampe vorher mit Hilfe eines schwarzen Körpers bei bekannten Temperaturen geeicht wurde, die Temperatur der Fläche ermitteln. Voraussetzung für eine angenähert richtige Temperaturmessung ist, daß die strahlende Fläche sich wenigstens angenähert wie ein schwarzer Körper verhält.

486. Der optische Nutzeffekt. Im § 261 ist darauf hingewiesen worden, daß der optische Nutzeffekt einer Lichtquelle um so größer ist, je höher ihre Temperatur ist, d. h. daß der Anteil der ausgesandten Strahlung, der in das sichtbare Gebiet fällt, mit steigender Temperatur wächst. Wenn auch die gewöhnlichen Lichtquellen, z. B. die Drähte der elektrischen Glühlampen, keine vollkommenen schwarzen Körper sind, so weichen sie doch von einem solchen nicht allzusehr ab. Wir können sie daher näherungsweise als solche ansehen. Mit steigender Temperatur steigt die Strahlungsenergie der Lichtquelle nach dem STEFAN-BOLTZMANNschen Gesetz. Es kommt aber noch die Verschiebung des Maximums nach dem WIENschen Verschiebungsgesetz hinzu. In der Abb. 466 ist der sichtbare Spektralbereich durch Schraffierung angedeutet. Bei tieferen Temperaturen ist dieses Gebiet weit vom Maximum entfernt, welches hier im Ultraroten liegt. Es entfällt also nur ein kleiner Bruchteil der Gesamtstrahlung auf das sichtbare Gebiet. Die Verhältnisse bessern sich um so mehr, je mehr sich bei steigender Temperatur das Maximum dem sichtbaren Spektralbereich nähert. Dies gilt allerdings nur bis zu einer gewissen Temperatur. Denn man erkennt aus Abb. 466 leicht, daß der optische Nutzeffekt bei steigender Temperatur wieder sinken muß, wenn das Maximum der Energieverteilungskurven sich über das sichtbare Gebiet hinaus verschoben hat. Das Optimum des optischen Nutzeffekts liegt bei etwa 5500°. Das ist ziemlich genau die

Temperatur der Sonne. Das menschliche Auge ist daher gerade in demjenigen Spektralbereich empfindlich, in dem die Sonne ihr Intensitätsmaximum hat. Künstliche Lichtquellen von so hoher Temperatur können wir leider nicht herstellen. Die ganze Entwicklung der elektrischen Beleuchtungstechnik ist aber in den letzten Jahrzehnten dahin gerichtet gewesen, die Ökonomie der Lichtquellen zu verbessern, indem man zu immer höheren Temperaturen überging. Daher bedeutete der Übergang von den alten Kohlenfadenlampen zu den modernen Lampen mit Drähten aus dem hochschmelzenden und daher weit stärker erhitzbaren Wolfram einen ganz entscheidenden Fortschritt in dieser Richtung. Trotzdem bleibt der optische Nutzeffekt aller künstlichen Lichtquellen d. h. der Bruchteil der ihnen zugeführten Energie, der als sichtbares Licht wieder ausgestrahlt wird, in allen praktisch wichtigen Fällen äußerst gering. Er beträgt z. B. bei der Petroleumlampe und dem Gasglühlicht etwa 0,2 %, bei der Kohlefadenlampe 0,5 %, bei der luftleeren Wolframlampe 1,6 % und bei der gasgefüllten Wolframlampe 4 %. Und auch dies sind nur obere Grenzwerte bei günstigen Bedingungen.

487. **Lumineszenzerscheinungen.** Bei den bisher in diesem Kapitel behandelten Strahlungserscheinungen handelte es sich stets um Temperaturstrahlung, also um Strahlung, welche ihren Ursprung in der Temperatur des strahlenden Körpers hat. In allen anderen Fällen bezeichnet man das Auftreten von Lichtstrahlung als Lumineszenz. Von diesen Erscheinungen haben wir bereits die Elektrolumineszenz, d. h. das Leuchten verdünnter Gase unter der Wirkung einer elektrischen Entladung (§ 290) kennengelernt. Zu den Lumineszenzerscheinungen gehören ferner nachstehende Effekte:

Fluoreszenz. Viele Substanzen haben die Eigenschaft, daß sie einen Teil des auf sie fallenden Lichts absorbieren und als Licht der gleichen oder größerer Wellenlänge wieder aussenden. Die Lichtaussendung dauert (im Unterschied zu der gleich zu besprechenden Phosphoreszenz) nur so lange an, wie die äußere Lichtwirkung andauert. Diese Erscheinung, welche zuerst am Flußspat beobachtet wurde, heißt Fluoreszenz. Andere im sichtbaren Spektralbereich fluoreszierende Substanzen sind z. B. Lösungen von Fluoreszein, Äskulin und anderen Stoffen. Joddampf in einem sonst möglichst gasfrei gemachten Glasgefäß zeigt eine grüngelbliche Fluoreszenz. Das Fluoreszenzlicht geht von allen Stellen der Substanz aus, die von Licht getroffen werden. Daher wird die Bahn des Lichts in einer fluoreszierenden Substanz sichtbar, ähnlich wie in einem trüben Medium. Doch ist die Ursache eine völlig andere. Bei den trüben Medien handelt es sich um eine Zerstreuung des Lichts an kleinen Teilchen, bei der Fluoreszenz um eine Anregung der den Atomen oder Molekülen der fluoreszierenden Substanzen eigentümlichen Lichtschwingungen. Daher ist auch das Spektrum des Fluoreszenzlichts für die betreffende Substanz charakteristisch.

Für die Erregung von Fluoreszenz gilt, mit gewissen theoretisch begründeten Ausnahmen, das STOKESsche Gesetz: Die Fluoreszenzstrahlung ist in der Regel langwelliger als die erregende Strahlung. Die Erklärung für das Gesetz wie für seine Ausnahmen können wir erst später auf Grund der Quantentheorie geben (§ 508).

Die Fluoreszenz unter der Wirkung von Röntgenstrahlen haben wir bereits erwähnt. Auch Kathodenstrahlen und die Strahlen radioaktiver Substanzen sind imstande, Fluoreszenz zu erregen.

Phosphoreszenz. Die Phosphoreszenz ist der Fluoreszenz insofern ähnlich, als sie auch in der Erregung eines Leuchtens von Stoffen durch auf sie fallendes Licht besteht. Der am meisten in die Augen fallende Unterschied besteht darin, daß die Phosphoreszenz nach Aufhören der äußern Lichtwirkung noch eine mehr oder weniger lange Zeit andauert. Oft ist dieses Nachleuchten

allerdings von so kurzer Dauer, daß zum Nachweis besondere Hilfsmittel (Phosphoroskop) nötig sind. Beispiele von phosphoreszierenden Substanzen sind die Zinkblende und die sog. BALMAINsche Leuchtfarbe (CaS mit Bi).

Wie LENARD gezeigt hat, ist unter anderm das Vorhandensein gewisser Spuren von „wirksamen" Metallen in der Substanz für die Phosphoreszenzfähigkeit Vorbedingung. So besteht z. B. einer der von LENARD untersuchten „Phosphore" aus 1 g ZnS, 0,0001 g Cu und 0,01 g NaCl, welch letzteres hauptsächlich als Flußmittel dient.

Der Mechanismus der Phosphoreszenz kann wegen seiner Kompliziertheit hier nicht besprochen werden. Sie hängt mit dem lichtelektrischen Effekt (§ 489) zusammen.

Tribolumineszenz. Beim Reiben zweier Zuckerstücke aneinander oder beim Stoßen des Zuckers zeigt sich oft im Dunkeln eine schwache Lichterscheinung, die sog. Tribolumineszenz. Die gleiche Erscheinung zeigen eine ganze Reihe anderer Kristalle.

Chemolumineszenz. Biolumineszenz. Zahlreiche chemische Prozesse sind mit einem Leuchten der miteinander reagierenden Substanzen verbunden (Chemolumineszenz). In dieses Gebiet gehören jedenfalls auch die Erscheinungen des tierischen Leuchtens (Biolumineszenz), das man außer bei den Leuchtkäfern und Glühwürmchen bei sehr zahlreichen Meerestieren beobachtet (Meerleuchten). Die Fähigkeit zu leuchten kommt lediglich gewissen Mikroorganismen zu. Das Leuchten größerer Organismen beruht darauf, daß sie mit diesen in Symbiose leben, sie in ihrem Körper beherbergen. Das Leuchten der Mikroorganismen hängt von der Sauerstoffzufuhr ab. Die höheren Lebewesen, die derartige Organismen beherbergen, sind offenbar in der Lage, die Lichtaussendung durch Regelung der Sauerstoffzufuhr zu ihren Gästen spontan anzuregen oder zu drosseln.

VIII. Quantentheorie und Theorie der Materie.

33. Kapitel.

Quantentheorie. Bau der Atome und Moleküle.

488. Das PLANCKsche Gesetz und die Quantentheorie. Bei der Ableitung des Gesetzes der schwarzen Strahlung (§ 483) sah sich PLANCK (1900), um Übereinstimmung mit den Messungen zu erzielen, genötigt, eine Annahme zu machen, die mit den Vorstellungen der sog. klassischen Physik in vollkommenem Widerspruch steht. Aus diesen Vorstellungen folgt nämlich, daß die Aussendung jeglicher Strahlung, also auch der von den Atomen der Materie ausgehenden Lichtstrahlung, ein stetiger Vorgang sein müsse, und daß Strahlungsenergie in jeder beliebigen endlichen Menge auftreten könne, also auch beliebig teilbar sei. Man kann aber beweisen, daß diese Annahme zwingend zum Strahlungsgesetz von RAYLEIGH-JEANS führt, das, wie im § 483 ausgeführt wurde, tatsächlich nur einen Grenzfall des PLANCKschen Gesetzes für lange Wellen und hohe Temperaturen darstellt, aber nicht allgemein gültig ist. Das PLANCKsche Gesetz würde in dasjenige von RAYLEIGH-JEANS übergehen, wenn die Konstante h, das Wirkungsquantum, gegen Null konvergiert, während tatsächlich, wie Messungen verschiedenster Art übereinstimmend ergeben, $h = 6{,}54_4 \cdot 10^{-27}$ erg · sec ist. Es ist demnach die endliche Größe des Wirkungsquantums h das entscheidende Merkmal der neuen Theorie gegenüber der alten.

Die Annahme, die PLANCK zu machen genötigt war, besteht darin, daß die Atome Strahlungsenergie nicht in Energiequanten jeder beliebigen Größe aussenden, sondern immer nur in solchen, die der Gleichung

$$E = h\nu \text{ erg} \qquad (1)$$

entsprechen, wo E die Energie der ausgesandten Strahlung und ν ihre Schwingungszahl ist. Demnach hat jede Strahlungsenergie sozusagen eine atomistische Struktur. Nicht in dem Sinne, daß es unveränderliche Strahlungsatome gäbe. Jede Strahlungsenergie kann, wenn sie von Materie absorbiert wird, in andere Energieformen, z. B. in Wärme, also in Molekularenergie, umgewandelt werden und dabei ihren atomistischen Charakter verlieren, bzw. in Energiequanten von anderem Betrage verwandelt werden. Aber sofern Energie in Form einer Strahlung von der Schwingungszahl ν auftritt, tut sie dies nie anders als in Gestalt von Energiequanten der Größe $h\nu$.

Die auf dieser Grundlage aufgebaute Theorie trägt daher den Namen Quantentheorie. Während sie ursprünglich nur dazu geschaffen wurde, um Theorie und Experiment auf dem einen Gebiet der Wärmestrahlung miteinander in Einklang zu bringen, hat sie sich in ihrer weiteren Auswirkung als außerordentlich fruchtbar für die Weiterentwicklung der Physik überhaupt erwiesen und ihr seit Beginn des 20. Jahrhunderts geradezu ihren Stempel aufgedrückt. Es ist das große Verdienst EINSTEINS gewesen, daß er als erster entschlossen die

Konsequenzen aus der Quantenhypothese gezogen und die Behauptung ausgesprochen hat, daß überhaupt alle Wechselwirkungen zwischen Atomen und Strahlung von Quantengesetzen beherrscht werden. In Verfolg dieser Idee ist dann die Bedeutung der Konstanten h für die Gesamtheit der atomistischen Prozesse erkannt worden, auch für solche, die mit Strahlung unmittelbar nichts zu tun haben, und zwar zunächst für alle diejenigen Vorgänge, die einen irgendwie periodischen Charakter haben. So beherrscht die Quantentheorie heute die ganze Theorie der Materie, insbesondere seitdem BOHR auf sie die Theorie des Atombaus gegründet hat. Infolge der fast unbegrenzten Möglichkeiten ihrer Prüfung an atomaren Prozessen jeglicher Art hat die Quantentheorie einen Aufschwung der physikalischen Forschung eingeleitet, der in der Geschichte der Wissenschaft einzig dasteht.

489. Lichtelektrischer Effekt. Einen besonders einleuchtenden Beweis für den quantenhaften Charakter der Lichtstrahlung liefert der lichtelektrische Effekt. Fällt Licht auf eine blanke Metallfläche, so wird die Luft in der Umgebung leitend. Die nähere Untersuchung zeigt, daß das Licht aus den Metallen Elektronen frei macht, welche in die Umgebung austreten und als Ladungsträger wirken. Die Wellenlänge des Lichts darf dabei eine, je nach dem Metall verschiedene Grenze nicht überschreiten. Diese Erscheinung heißt lichtelektrischer Effekt, wohl auch Photoeffekt. Auch die Röntgenstrahlen haben eine starke lichtelektrische Wirkung. Dieser Effekt beruht auf einer Wechselwirkung der elektromagnetischen Felder im Licht mit den Elektronen in der Materie.

Da nach der Quantentheorie Licht nur in Quanten der Energie $h\nu$ auftritt, ist zu erwarten, daß nach dem Energieprinzip auch die kinetische Energie der beim lichtelektrischen Effekt durch Licht der Schwingungszahl ν ausgelösten Elektronen höchstens gleich $h\nu$ sein kann. Das trifft in der Tat zu. Allerdings geht ein Teil der Energie $h\nu$ dadurch verloren, daß die Elektronen beim Austritt aus dem Metall Arbeit gegen die Kräfte leisten müssen, die sie im Verband des Metalls festhalten, so daß im allgemeinen

$$\tfrac{1}{2} m v^2 = h\nu - A \qquad (2a)$$

(A = Austrittsarbeit). Je größer aber die Schwingungszahl ν des auftreffenden Lichts, je größer also auch die Energie jedes Lichtquants ist, desto weniger fällt diese Austrittsarbeit ins Gewicht. Bei den Röntgenstrahlen mit ihrer sehr großen Schwingungszahl spielt sie keine merkliche Rolle mehr, und hier ist tatsächlich die kinetische Energie der ausgelösten Elektronen

$$\tfrac{1}{2} m v^2 = h\nu\,. \qquad (2b)$$

Hier aber entstand ein neuer Konflikt mit der klassischen Physik. Auf Grund der alten Anschauungen mußte man annehmen, daß sich jedes einzelne von einem Atom ausgesandte Lichtquant als Kugelwelle ringsum gleichmäßig von dem Atom aus ausbreitet. Man kann nun bei gegebenen experimentellen Bedingungen die Zeit abschätzen, die unter dieser Annahme erforderlich wäre, um einem Elektron die Energie $h\nu$ zuzuführen. Man kommt dann zu dem Ergebnis, daß eine lichtelektrische Wirkung nicht sofort beim Einsetzen der Strahlung eintreten kann, sondern daß eine gut beobachtbare Zeit verstreichen müßte, ehe die ersten Elektronen die erforderliche Energie absorbiert haben, um aus dem Metall austreten zu können. Ein lichtelektrischer Effekt dürfte demnach erst einige Zeit nach Beginn der Bestrahlung einsetzen. In Wirklichkeit setzt er aber sofort ein. Das führt zwangläufig dazu, daß die Vorstellung der Kugelwelle für die einzelnen Lichtquanten aufgegeben werden muß. Man muß vielmehr annehmen, daß die Lichtquanten nur innerhalb eines zum mindesten überaus engen räumlichen Winkels einseitig von den Atomen ausgestrahlt wird. Denn nur so ist

es erklärlich, daß im Augenblick des Beginns der Bestrahlung bereits an vielen Stellen der Metalloberfläche die volle Energie $h\nu$ einzelner Lichtquanten verfügbar wird. Dies ist die von EINSTEIN aufgestellte und auch mit weiteren Gründen gestützte radikale Lichtquantentheorie, die die heutige Entwicklung der Physik entscheidend beeinflußt hat.

Der durch den lichtelektrischen Effekt ausgelöste Elektronenstrom ist bei gleicher Wellenlänge der Intensität des auffallenden Lichts proportional. Man kann daher die Stärke des von einer bestrahlten Metallfläche ausgehenden Elektronenstroms zur Messung von Lichtstärken benutzen (Photometrie, § 402). Diese lichtelektrische Photometrie findet heute vielfache Anwendung, u. a. auch in der Astrophysik zur Messung der Helligkeit von Sternen, insbesondere der Helligkeitsschwankungen veränderlicher Sterne.

Abb. 467 zeigt eine einfache Vorrichtung zum Nachweis der lichtelektrischen Wirkung. Ein möglichst hoch evakuiertes Glasgefäß G (Photozelle) ist mit einem Quarzfenster F (für Ultraviolett durchlässig) versehen, durch welches Licht auf eine blanke Metallelektrode A fällt. Von dieser gehen dann Elektronen aus. Legt man an die mit einer Blende versehene Elektrode B eine gegenüber A positive Spannung, so können die Elektronen, die nur eine kleine Anfangsgeschwindigkeit haben, beschleunigt werden und gelangen auf die Elektrode a, die mit einem Elektrometer verbunden ist, mittels dessen man die negative Ladung der Elektronen nachweisen kann. Lenkt man durch ein Magnetfeld geeigneter Stärke die Elektronen auf die Elektrode b ab (§ 307), so kann man ihre spezifische Ladung ε/μ bestimmen und so den Nachweis führen, daß es sich tatsächlich um Elektronen handelt.

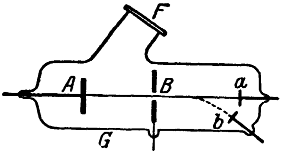


Abb. 467. Apparat zum Nachweis der äußeren lichtelektrischen Wirkung.

Zu photometrischen Zwecken benutzt man als Elektrode A meist eine Fläche aus Alkalimetall (Kalium, Rubidium), weil bei diesen Metallen die Austrittsarbeit A (Gl. 2a) besonders klein, und sie deshalb besonders weit ins sichtbare Gebiet hinein lichtelektrisch empfindlich sind, während die Hauptempfindlichkeit der anderen Metalle im Ultraviolett liegt.

Verbindet man einen Funkeninduktor mit einer Funkenstrecke aus zwei gut gereinigten Zinkkugeln, welche so weit auseinanderstehen, daß nur ganz gelegentlich ein Funke überspringt, und bestrahlt jetzt die Zinkkugeln mit ultraviolettem Licht, etwa mittels einer Quarzquecksilberlampe, so setzt eine heftige Funkenentladung ein, weil der Durchschlag jetzt durch die von den Kugeln ausgehenden Elektronen erleichtert wird. An dieser Wirkung ist der lichtelektrische Effekt von H. HERTZ zuerst erkannt worden (1887).

Neuerdings finden lichtelektrische Zellen auch Anwendung bei der elektrischen Fernübertragung von Bildern und beim Tonfilm.

Neben diesem äußeren, d. h. auf die Oberfläche beschränkten, lichtelektrischen Effekt gibt es auch eine entsprechende Wirkung im Innern gewisser Kristalle, in die Licht einzudringen vermag (innerer lichtelektrischer Effekt). In solchen löst das Licht Elektronen von den Atomen des Kristallgitters ab. Die so frei gewordenen Elektronen vermögen dann durch das Kristallgefüge hindurchzuwandern. Bringt man an zwei Begrenzungsflächen eines solchen belichteten Kristalls zwei Metallbelegungen an, zwischen denen eine hinreichend hohe Spannung liegt, so fließt durch den sonst vorzüglich isolierenden Kristall ein elektrischer Strom. Diese Erscheinung ist bei Diamant, Zinkblende und zahlreichen anderen Kristallen beobachtet worden.

Besonders ausgeprägt ist der innere lichtelektrische Effekt beim Selen. Er macht sich als eine beträchtliche Widerstandsverminderung bei Bestrahlung

bemerkbar und kann, ähnlich wie der äußere lichtelektrische Effekt, zur Messung von Lichtstärken verwandt werden. Doch haben die hierzu dienenden Selenzellen gegenüber den auf dem äußeren lichtelektrischen Effekt beruhenden Zellen den Nachteil, daß sie träge sind, d. h. daß die Wirkung nicht sofort nach dem Aufhören der Belichtung verschwindet.

Es besteht ein naher Zusammenhang zwischen der inneren lichtelektrischen Wirkung und der Phosphoreszenz.

490. **Bewegungsgröße und Masse der Lichtquanten.** Wir haben in § 464 den Druck besprochen, den eine von Strahlung getroffene Fläche erfährt und auch gesagt, daß ein Körper, der selbst Strahlung aussendet, einen Rückstoß erfährt. Fällt also Strahlung, die von einem Körper ausgeht, auf einen andern, so können wir sagen, daß von dem ersten Körper her auf den zweiten eine Kraft ausgeübt wird. Es wird also Bewegungsgröße von dem ersten Körper auf den zweiten übertragen. Nun braucht aber die Strahlung, um von dem einen Körper zu dem andern zu gelangen, eine gewisse Zeit, und der zweite Körper gewinnt die Bewegungsgröße erst nach dieser Zeit, während der erste Körper seine Bewegungsgröße infolge des Rückstoßes der von ihm ausgesandten Strahlung sofort erhält. Hierdurch scheint der Impulssatz (§ 33) verletzt, denn so lange der zweite Körper keinen Impuls erhalten hat, der demjenigen des ersten Körpers, entgegengesetzt gleich ist, wäre keine Kompensation für die Bewegungsgröße des ersten Körpers vorhanden. Man kann jedoch den Satz von der Erhaltung der Bewegungsgröße im vollen Umfange als ein allgemeines Naturgesetz aufrechterhalten, wenn man jeder Strahlungsenergie Bewegungsgröße zuschreibt. Es hat dann die von einem Körper ausgesandte Strahlung Bewegungsgröße von gleichem Betrage, aber von entgegengesetzter Richtung, wie die Bewegungsgröße, die der strahlende Körper durch den Rückstoß der Strahlung erfährt. Fällt die Strahlung dann auf einen zweiten Körper, so gibt sie ihre Bewegungsgröße an diesen ab. Wird sie vollständig von ihm absorbiert, so ist nunmehr die Bewegungsgröße des zweiten Körpers der Bewegungsgröße des ersten gleich und entgegengesetzt gerichtet. Wird jedoch die Strahlung vollständig reflektiert, so wirkt dies so, als sei sie zunächst vollständig absorbiert und alsdann wieder ausgestrahlt. Der Körper gewinnt dann durch Rückstoß weitere Bewegungsgröße und die Strahlung wegen Umkehrung ihrer Richtung solche entgegengesetzten Vorzeichens.

Die Theorie ergibt, daß man einer mit Lichtgeschwindigkeit c bewegten Strahlungsenergie von E erg die Bewegungsgröße $p = E/c$ g cm/sec zuschreiben muß (c = Lichtgeschwindigkeit). Ganz allgemein folgt dies für jede Form von Energie aus der Relativitätstheorie. Demnach besitzt ein Lichtquant von der Energie $h\nu$ die Bewegungsgröße

$$p = \frac{h\nu}{c}. \tag{3}$$

Der Strahlungsdruck, den eine von Strahlung getroffene Fläche erfährt, erklärt sich also durch den Aufprall der Lichtquanten in einer Weise, die der Erklärung des Gasdrucks (§ 97) völlig analog ist, nämlich durch die beim Aufprall der Lichtquanten umgesetzte Bewegungsgröße. Bei der Aussendung eines Lichtquants erfährt der strahlende Körper einen Rückstoß, wie ein Geschütz beim Abschuß.

In der Mechanik haben wir die Bewegungsgröße als das Produkt $p = mv$ definiert, so daß $m = p/v$. Analog haben wir dem mit Lichtgeschwindigkeit c bewegten Lichtquant $h\nu$ die Masse $m = p/c$ oder

$$m = \frac{h\nu}{c^2} \tag{4}$$

zuzuschreiben, eine Beziehung, die ganz allgemein auch aus der Relativitätstheorie folgt (§ 538).

Für die Lichtquanten ist neuerdings auch der Name Photon üblich geworden. Er soll die Lichtquanten in Parallele zu den Bausteinen der Materie, den Protonen und Elektronen, stellen und dadurch ihren korpuskularen Charakter bezeichnen. Denn wenn wir einem Lichtquant eine Masse, eine Geschwindigkeit in ganz bestimmter Richtung (im Gegensatz zur Kugelwelle) und eine Bewegungsgröße zuschreiben, so besitzt es alle diejenigen Eigenschaften, welche den Begriff Korpuskel definieren. Nichts kann den Unterschied zwischen der elektromagnetischen Lichttheorie MAXWELLS und der Lichtquantentheorie von PLANCK und EINSTEIN stärker beleuchten, als diese Tatsache.

Die Optik begegnet uns demnach in drei verschiedenen Gestalten, als geometrische Optik oder Strahlenoptik, als Wellenoptik und als Quantenoptik. Die Gesetze der geometrischen Optik lassen sich restlos auf diejenigen der Wellenoptik und der elektromagnetischen Lichttheorie zurückführen, und sie ist in allen Fällen anwendbar, wo die Dimensionen der Körper, mit denen das Licht in Wechselwirkung tritt, groß sind gegen die Wellenlänge des Lichtes. Die Wellenoptik trägt auch denjenigen Fällen Rechnung, in denen dies nicht mehr der Fall ist. Sie erklärt die Erscheinungen bei der räumlichen Ausbreitung des Lichtes und ist die einzig denkbare Erklärung für die Interferenzerscheinungen. Hingegen versagt sie in allen Fällen, wo es sich um optische Elementarprozesse, wie den lichtelektrischen Effekt und den COMPTON-Effekt (§ 491), handelt, überhaupt bei allen elementaren Wechselwirkungen zwischen dem Licht und atomaren Gebilden, insbesondere bei der Berechnung der energetischen Verhältnisse. Diesen Verhältnissen wird nur die Quantenoptik, also die korpuskulare Auffassung vom Wesen des Lichtes gerecht. Wir stehen hier also vor der überraschenden Tatsache, daß wir dem Licht, je nach Art des Vorganges, den wir an ihm betrachten, ein grundsätzlich verschiedenes Wesen zuschreiben müssen.

491. **Der COMPTON-Effekt.** Beim lichtelektrischen Effekt geht die Energie eines Lichtquants restlos in andere Energieformen, insbesondere in kinetische Energie eines Elektrons über. Es gibt aber auch Vorgänge, bei denen bei einer Wechselwirkung zwischen einem Lichtquant und einem Elektron oder Atom nur ein Teil der Energie $h\nu$ und des Impulses $h\nu/c$ an das Elektron oder Atom übergeht. Gewinnt dabei das Elektron die Energie ε auf Kosten des Lichtquants, so sinkt dessen Energie auf den Wert $h\nu - \varepsilon$. Nach dem PLANCKschen Gesetz (Gl. 1, § 488) muß dann aber die Schwingungszahl der Strahlung kleiner werden, und zwar ist die neue Schwingungszahl ν' durch die Gleichung

$$h\nu' = h\nu - \varepsilon \tag{3}$$

gegeben. Gleichzeitig muß auch der Impulssatz erfüllt sein. Ein Vorgang dieser Art ist die Zerstreuung von Licht durch die Atome oder Elektronen der Materie. Meßbare Veränderungen der Schwingungszahl sind nur zu erwarten, wenn die Masse des Lichtquants und des betreffenden atomistischen Gebildes von der gleichen Größenordnung sind, d. h. bei Licht sehr großer Schwingungszahl und Teilchen möglichst kleiner Masse. Es kommen daher zur Prüfung nur Wechselwirkungen zwischen freien (oder nahezu freien) Elektronen und Röntgenstrahlen in Betracht. Es ist A. H. COMPTON (1922) gelungen, diesen wichtigen, nach ihm benannten Effekt zu finden, und zwar so, daß er Röntgenstrahlen auf Substanzen fallen ließ, in denen die Elektronen verhältnismäßig lose gebunden, also weitgehend frei beweglich sind. Die Röntgenstrahlen werden an diesen Elektronen unter Verminderung ihrer Schwingungszahl

zerstreut, und die Elektronen gewinnen auf Kosten der Röntgenstrahlen Energie und Impuls, d. h. sie werden aus der Materie ausgeschleudert. Diese Wechselwirkung hat eine große äußere Ähnlichkeit mit einem elastischen Zusammenstoß, und ihre Theorie beruht auf den gleichen Grundlagen, nämlich auf den Sätzen von der Erhaltung der Bewegungsgröße und der Energie (§ 33 und 42).

Wir wollen die Berechnung hier andeuten, weil der COMPTON-Effekt vielleicht eindringlicher als irgendein anderer Vorgang die korpuskulare Natur der Lichtquanten illustriert. Das ankommende Lichtquant habe die Schwingungszahl ν_0, also die Energie $h\nu_0$, das gestreute Quant die Schwingungszahl ν und die Energie $h\nu$. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß das vom Lichtquant getroffene Elektron anfänglich ruhe. Nach dem Zerstreuungsakt habe es die Geschwindigkeit v, also die kinetische Energie $\mu v^2/2$ und die Bewegungsgröße μv. Das gestreute Quant bewege sich unter dem Winkel ϑ_1, das in Bewegung gesetzte Elektron unter dem Winkel ϑ_2 gegen die ursprüngliche Richtung des ankommenden Quants. Das Energieprinzip fordert die Erfüllung der Bedingung

$$h\nu_0 = h\nu + \tfrac{1}{2}\mu v^2 .$$

Der Satz von der Erhaltung der Bewegungsgröße liefert zwei Bedingungsgleichungen. Erstens muß die Summe der Komponenten der Bewegungsgrößen von Elektron und gestreutem Quant in Richtung der ursprünglichen Bewegung des ankommenden Quants gleich der ursprünglichen Bewegungsgröße $h\nu_0/c$ dieses Quants sein, und zweitens muß die Summe ihrer Komponenten senkrecht zu dieser Richtung gleich Null sein. Wir erhalten demnach

$$\frac{h\nu_0}{c} = \frac{h\nu}{c}\cos\vartheta_1 + \mu v\cos\vartheta_2 \qquad \text{und} \qquad 0 = \frac{h\nu}{c}\sin\vartheta_1 + \mu v\sin\vartheta_2 .$$

In diesen drei Gleichungen kommen vier Unbekannte vor, ν, v, ϑ_1 und ϑ_2. Der Vorgang ist also durch diese Gleichungen noch nicht vollständig bestimmt. Wir müssen deshalb eine dieser vier Größen, etwa die Richtung ϑ_1 des gestreuten Quants, vorgeben, um die drei anderen berechnen zu können. Wir übergehen hier die Einzelheiten der Berechnung, deren Ergebnis lautet:

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 + \frac{\nu_0}{N}(1 - \cos\vartheta_1)}, \qquad \operatorname{tg}\vartheta_2 = -\frac{\operatorname{cotg}\frac{\vartheta_1}{2}}{1 + \frac{\nu_0}{N}},$$
$$\frac{1}{2}\mu v^2 = E = h\nu_0 \frac{\frac{\nu_0}{N}(1 - \cos\vartheta_1)}{1 + \frac{\nu_0}{N}(1 - \cos\vartheta_1)}. \qquad (4)$$

Dabei ist zur Abkürzung die Größe $\mu c^2/h = 1{,}23 \cdot 10^{-23}\,\text{sec}^{-1} N$ gesetzt worden.

Wenn wir jetzt von der Beziehung $\lambda = c/\nu$ Gebrauch machen, erhalten wir für die Änderung der Wellenlänge, die das Lichtquant bei der Streuung erfährt, die Beziehung

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{c}{N}(1 - \cos\vartheta_1). \qquad (5)$$

An dieser Gleichung ist bemerkenswert, daß $\Delta\lambda$ nicht von λ_0, sondern nur von dem Streuwinkel ϑ_1 abhängt, was die experimentelle Prüfung sehr erleichtert. N hat die Dimension einer Schwingungszahl und entspricht einer Wellenlänge von $\Lambda = 0{,}0244$ ÅE, also einer solchen, die außerhalb des Bereichs der Röntgenstrahlen liegt. In Abb. 468 ist die Abhängigkeit des COMPTON-Effekts vom Streuwinkel für den Fall dargestellt, daß $\lambda_0 = \Lambda$ ist, also der

einfallende Primärstrahl die Wellenlänge 0,0244 ÅE hat. Im Ausgangspunkt der Pfeile befindet sich das Elektron, an dem ein einfallendes Quant $h\nu_0$ gestreut wird. Die Länge der Pfeile bedeutet in der oberen Hälfte die Größe der Energie $h\nu$, die dem Quant noch verbleibt, wenn es in die betreffende Richtung abgelenkt wird, in der unteren Hälfte die kinetische Energie, die das Elektron bei Ablenkung in die betreffende Richtung erhält. Die jeweils mit gleicher Ziffer bezeichneten Pfeile beider Hälften gehören zusammen. Die Messungsergebnisse sind in bester Übereinstimmung mit der Theorie und bilden eine der augenfälligsten Stützen des PLANCKschen Gesetzes.

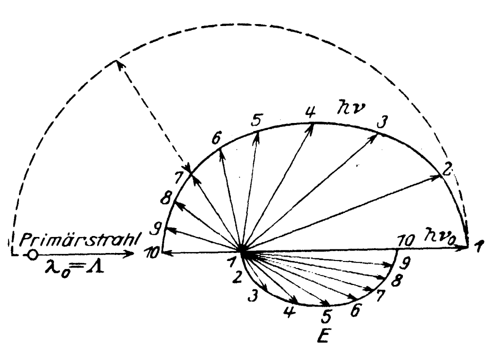


Abb. 468. Diagramm zum COMPTON-Effekt.

492. Das Elektron und das elektrische Elementarquantum. Wir kennen das Elektron bereits als Träger elektrischer Ströme, auch der molekularen Kreisströme, die die Ursache der magnetischen Eigenschaften der Stoffe sind, und wir haben auch bereits erwähnt, daß die Aussendung von Lichtstrahlen auf Elektronenbewegungen an den Atomen oder Molekülen beruht. Wir wissen auch schon, daß alle Elektronen unter sich völlig gleichartig sind und die gleiche negative Ladung tragen, die man als das elektrische Elementarquantum bezeichnet, und deren Größe nach den besten Messungen

$$\varepsilon = 4{,}77_0 \cdot 10^{-10} \text{ el. stat. Ladungseinheiten} = 1{,}59_1 \cdot 10^{-19} \text{ Coulomb}$$

beträgt.

Dieser zuverlässigste Wert des elektrischen Elementarquantums ist von MILLIKAN nach einer zuerst von EHRENHAFT verwendeten Methode gemessen worden. Er benutzte einen kleinen Plattenkondensator mit horizontalen Platten. In die Luft zwischen den Platten wurden mittels eines Zerstäubers kleine Öltröpfchen gebracht, die unter der Wirkung der Schwere ganz langsam fallen, und deren Bewegung mit einem Mikroskop mit Okularmikrometer beobachtet wurde. Wird die Luft ionisiert, z. B. mit Röntgenstrahlen, so lagern sich Ionen an die Tröpfchen, und diese erhalten eine Ladung, die nur gleich einem Elementarquantum ε oder einer kleinen Anzahl solcher sein kann. Angenommen, die Ladung eines Tröpfchens betrage $n\varepsilon$. Erzeugt man jetzt im Kondensator ein elektrisches Feld $\mathfrak{E}$, so wirkt auf das Tröpfchen die Kraft $k = n\varepsilon\mathfrak{E}$ dyn. Und zwar wird so geschaltet, daß diese Kraft der Schwerkraft mg entgegengerichtet ist (m = Masse des Tröpfchens). Die gesamte auf das Tröpfchen wirkende Kraft beträgt demnach $mg - n\varepsilon\mathfrak{E}$ dyn. Je nachdem ob $n\varepsilon\mathfrak{E}$ größer oder kleiner als mg ist, führt das Teilchen eine langsame Steig- oder Fallbewegung aus, aus deren Geschwindigkeit man auf Grund des STOKESschen Fallgesetzes (§ 116) die Kraft $n\varepsilon\mathfrak{E}$ und daraus die Ladung $n\varepsilon$ berechnen kann. Die Masse des Teilchens wird aus seinem spezifischen Gewicht und seinem Volumen (Messung des Durchmessers mit dem Mikroskop) berechnet.

Tatsächlich ergaben sich die Ladungen stets als kleine ganzzahlige Vielfache einer bestimmten Ladung ε, eben des elektrischen Elementarquantums, und zwar sowohl bei positiver, wie bei negativer Ladung. Das Elementarquantum ist demnach nicht nur das Atom der negativen, sondern auch der positiven Elektrizität.

493. Der Bau der Atome. Die Erforschung der Atome schien bis vor einigen Jahrzehnten ausschließlich Sache der Chemie zu sein. Die durch die

chemischen Methoden gebotenen Möglichkeiten haben sich aber in dieser Richtung als begrenzt erwiesen. Auf der andern Seite war es den Physikern bereits seit geraumer Zeit nicht zweifelhaft, daß uns in den Spektren unmittelbarste Lebensäußerungen der Atome und Moleküle vorliegen, und daß es grundsätzlich möglich sein müsse, aus der Struktur der Spektren weitgehende Schlüsse auf den Bau dieser Gebilde zu ziehen. Doch fehlte dazu vor Aufstellung der Quantentheorie und vor ihrer Anwendung auf die Atome jegliche Handhabe. Erst diese Theorie, im Verein mit den Entdeckungen auf dem Gebiet der Radioaktivität, haben die Physik in den Stand gesetzt, die Spektren zu einem der wichtigsten Hilfsmittel für die Erforschung des Atombaus zu machen.

Daß die Atome nicht grundsätzlich unteilbare Gebilde sind, wurde in dem Augenblick offenbar, als es gelang, sie zu ionisieren, d. h. Elektronen von ihnen abzuspalten. Es müssen also Elektronen Bestandteile der Atome sein. Daß aber ein statisches Modell, d. h. ein solches, bei dem die Elektronen in Gleichgewichtslagen in der Umgebung des Kerns ruhen, nicht möglich ist, läßt sich leicht nachweisen.

In Verfolg von Vorstellungen, die auf LENARD und J. J. THOMSON zurückgehen, hat RUTHERFORD zuerst den Gedanken ausgesprochen, daß die Atome aus einem Kern bestehen, der fast die ganze Masse des Atoms enthält und eine positive elektrische Ladung trägt. Dieser Kern wird von Elektronen umkreist, welche vermöge ihrer negativen Ladung am Atom festgehalten werden. Ein Atom ist ein Abbild einer Sonne mit einem Planetensystem im Kleinen. Die Zahl der den Atomkern umkreisenden Elektronen ist bei einem normalen, d. h. elektrisch neutralen Atom so groß, daß ihre negative Ladung die positive Ladung des Kerns gerade nach außen hin aufhebt. Der Kern ist also mit einer ganzen Zahl von positiven elektrischen Elementarquanten geladen, nämlich so vielen, wie die Zahl der ihn umkreisenden Elektronen beträgt, deren jedes ja ein negatives Elementarquantum besitzt.

Zu dieser Vorstellung wurde RUTHERFORD durch Versuche von GEIGER und MARSDEN (1909) geführt, bei denen sie α-Strahlen, d. h. äußerst schnell bewegte positiv elektrische Heliumatome (§ 519), durch dünne Metallfolien hindurchtreten ließen. Die α-Strahlteilchen erfahren dabei Ablenkungen, welche nur so zu deuten sind, daß die α-Teilchen gelegentlich bis in sehr kleine Entfernungen von elektrisch positiven Zentren gelangen, von denen sie wegen ihrer eigenen positiven Ladung abgestoßen werden. In der schematischen Abb. 469 ist K ein Atomkern. Die Kurven a bis f bedeuten die Bahnen, welche ein α-Teilchen beschreibt, das in den Abstoßungsbereich eines Kerns gerät. Die Ablenkung des Teilchens ist um so größer, je dichter es an dem Kern vorbeifliegen würde, wenn es nicht vom Kern abgestoßen würde. (Die Zahlen in Abb. 469 geben die kleinste Entfernung in der Einheit 10^{-12} cm an, auf die sich das α-Teilchen dem Kern nähern würde, wenn es nicht abgelenkt würde.) Die Verteilung der abgelenkten α-Teilchen auf die verschiedenen Richtungen, wenn sie z. B. auf eine sehr dünne Goldfolie fallen und durch sie hindurchdringen, läßt sich mit Hilfe des COULOMBschen Gesetzes und einfacher Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen berechnen. Die Versuche sind mit der Berechnung im Einklang. Es ergibt sich dabei weiter, daß sich die α-Teilchen dem Zentrum eines Atoms bis auf Ab-

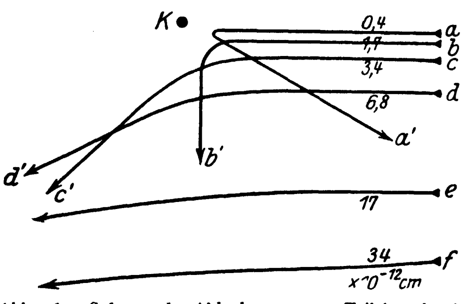


Abb. 469. Schema der Ablenkung von α-Teilchen durch einen Atomkern.

stände von der Größenordnung von mindestens 10^{-12} cm nähern können. Dieser Abstand ist viel kleiner als die Größenordnung der Durchmesser der Atome, 10^{-8} cm. Es folgt daraus, daß die Atome als Ganzes keine undurchdringlichen Gebilde sind, sondern daß sie so beschaffen sind, daß die α-Teilchen in ihr Gefüge eindringen können. Die Versuche führten weiter zu dem Ergebnis, daß die zwischen den Kernen und den α-Teilchen wirkende abstoßende Kraft dem COULOMBschen Gesetz (§ 211) wenigstens bis auf einen Abstand von 10^{-12} cm gehorcht. (Bei erheblich kleineren Abständen treten, wie man heute weiß, Abweichungen von diesem Gesetz ein.)

Wendet man nun das COULOMBsche Gesetz auf die Bewegungen eines einzelnen Elektrons um den Atomkern an, so ergeben sich diese, wegen der formalen mathematischen Analogie des COULOMBschen Gesetzes mit dem NEWTONschen Gravitationsgesetz (§ 63), als formal identisch mit den Gesetzen der Planetenbewegung. Es gelten also auch hier die KEPLERschen Gesetze (§ 66), und zwar auch das dritte, da für alle Elektronen das Verhältnis e/m das gleiche ist (vgl. § 211). Man hat nur das Wort „Sonne" durch „Kern", das Wort „Planet" durch „Elektron" zu ersetzen. Sobald allerdings nicht nur ein einzelnes, sondern mehrere Elektronen den Kern umkreisen, so beeinflussen sich diese auch gegenseitig, und es treten Abweichungen von den KEPLERschen Gesetzen ein, analog zu den gegenseitigen Störungen der Planeten. Diese Störungen sind im vorliegenden Falle meist viel beträchtlicher als bei den Planeten und führen vielfach zu sehr komplizierten und im einzelnen nicht streng berechenbaren Bahnformen. Dies rührt daher, daß im Sonnensystem die Sonne eine Masse besitzt, die die der Planeten außerordentlich überwiegt, während das für die Ladungen der Atomkerne und der Elektronen in keinem Falle auch nur annähernd in dem gleichen Maße gilt.

Die Zahl der einen Atomkern umkreisenden Elektronen ist gleich der Ordnungszahl oder Atomnummer des betreffenden Elements im periodischen System (§ 501), von Wasserstoff 1 bis Uran 92. Ebenso groß ist also die jeweilige Zahl von positiven elektrischen Elementarquanten, die der Kern trägt.

Als Dimension der Atomkerne haben also die obenerwähnten Versuche einen Durchmesser ergeben, der jedenfalls nicht größer, wahrscheinlich erheblich kleiner als 10^{-12} cm ist, während die Größenordnung der Durchmesser der ganzen Atome, einschließlich der den Kern umkreisenden Elektronen von der Größenordnung 10^{-8} cm, also rund 10000 mal größer ist.

494. Die Anwendung der Quantentheorie auf den Atombau. Die Theorie von BOHR. Diese Vorstellung allein genügt aber noch nicht, um eine mit der Wirklichkeit, d. h. dem experimentellen Befund übereinstimmende Theorie des Atombaus zu liefern Wenn ein Elektron einen Atomkern umkreist, so muß es wegen seiner Ladung nach der klassischen Theorie wie eine elektrische Schwingung ein ständig wechselndes elektromagnetisches Feld im Raume erzeugen und elektrische Wellen, d. h. in diesem Fall Licht, ausstrahlen (§ 385). Dabei muß aber das rotierende Elektron zugunsten der ausgestrahlten Lichtenergie selbst Energie abgeben. Das kann nur auf Kosten seiner eigenen Energie geschehen und müßte zur Folge haben, daß es dem Kern immer näher kommt, wobei zwar seine kinetische Energie zu-, aber seine potentielle Energie um den doppelten Betrag abnimmt, so daß es schließlich in den Kern fällt. Daß das nicht der Fall ist, beweisen die am Schluß des vorigen Paragraphen gemachten, experimentell völlig sichergestellten Angaben über die Größenordnung der Dimensionen der Atome als Ganzes (also einschließlich der zu ihnen gehörenden Elektronen) einerseits, der Atomkerne andererseits. Als zweite Schwierigkeit kommt hinzu, daß nach der klassischen Theorie ein solches rotierendes und beständig an Energie abnehmendes Elektron

ein kontinuierliches Spektrum aussenden müßte, weil die Umlaufszeit, und damit die Periode der Schwingung, sich ständig ändert, während gerade die Gase, in denen die Atome sich am wenigsten gegenseitig beeinflussen, also die Elektronenbewegungen, am reinsten in Erscheinung treten, tatsächlich Linien- oder Bandenspektren aussenden.

Beide Schwierigkeiten gleichzeitig zu lösen gelang NIELS BOHR (1913), indem er die Grundgedanken der Quantentheorie auf die Elektronenbewegungen am Atom anwandte. Selbstverständlich müssen dabei gewisse mit der Quantentheorie unvereinbare Vorstellungen der klassischen Physik aufgegeben werden. Denn nicht sie, sondern eben die Gesetze der Quantentheorie beherrschen die atomistischen Vorgänge.

Der Grundgedanke BOHRS ist der folgende. Unter den unendlich vielen Bahnen von verschiedener Exzentrizität, die ein Elektron bei gegebener Energie auf Grund des COULOMBschen Gesetzes und der klassischen Theorie um einen Atomkern beschreiben könnte, sind einige wenige ausgezeichnet und kommen allein als länger dauernde Zustände, sog. stationäre Bahnen, vor. In diesen Bahnen strahlt das Elektron keine Energie aus. Diese stationären Bahnen sind, wenn es sich nur um ein einziges Elektron handelt, Kreise oder Ellipsen. Sie sind durch die sog. Quantenbedingung bestimmt, welche im Falle einer Kreisbahn aussagt, daß nur solche Bahnen vorkommen, für die der Drehimpuls (§ 46) des Elektrons

$$J \cdot \omega = \mu r^2 \omega = \frac{n h}{2 \pi} \tag{6}$$

(n = ganze Zahl, h = PLANCKsches Wirkungsquantum) ist, also gleich einem ganzzahligen Vielfachen der Größe $h/2\pi$. Dabei ist μ die Masse, J das Trägheitsmoment des Elektrons in seiner Bahn, r der Bahnradius, ω die Winkelgeschwindigkeit des Elektrons. Hierzu kommt nun weiter die Bedingung, daß die zwischen Kern und Elektron wirkende anziehende Kraft die für die krummlinige Bewegung des Elektrons nötige Zentripetalkraft $\mu r \omega^2$ liefern muß (vgl. die entsprechende Überlegung bei der Mondbewegung, § 65). So kann man den Bahnradius r und die Winkelgeschwindigkeit ω berechnen. Es ergibt sich eine Folge von sog. Quantenbahnen für die verschiedenen Werte der ganzen Zahl n (n = 1, 2, 3 usw.). Die Bahn, für die n = 1 ist, nennt man die Grundbahn. Sie ist die Bahn kleinster Energie.

Es kann nun vorkommen, daß ein Elektron von einer Quantenbahn auf eine andere springt. Springt es von einer dem Kern ferneren auf eine ihm nähere Bahn, so nimmt dabei seine Energie ab, und die Energiedifferenz wird in Form von Strahlung ausgesandt. Es sei E_1 die Energie des Elektrons vor, E_2 nach dem Sprung. Dann ist die Energie $E_1 - E_2$ für die Strahlung frei geworden. Nach dem PLANCKschen Gesetz (Gl. 1, § 488) muß daher die Schwingungszahl ν der ausgesandten Strahlung durch die Gleichung

$$h \nu = E_1 - E_2, \tag{7}$$

gegeben sein. Diese Gleichung bezeichnet man als die Frequenzbedingung.

Da ein Elektron demnach nur bestimmter stationärer Energiestufen fähig ist, und daher auch nur bestimmte, diskrete Energiedifferenzen $E_m - E_n$ in Form von Strahlung auftreten, so ergibt sich aus der Theorie, daß in der ausgesandten Strahlung nur einzelne diskrete Schwingungszahlen auftreten können. Das Auftreten von Linienspektren ist also grundsätzlich erklärt.

Es sei nicht unterlassen, zu bemerken, daß die letzte Entwicklung der Atomtheorie, wie sie sich in der sog. Wellenmechanik (§ 514) darstellt, dazu führt, daß die im folgenden dargestellte anschauliche Vorstellung der Wirk-

lichkeit nur sehr bedingt entspricht, so groß auch ihre Erfolge waren. Sie ist offenbar nichts anderes als eine, allerdings sehr weitgehende Analogie. Trotzdem wird eine solche anschauliche Vorstellung noch auf lange hinaus nicht zu entbehren sein, und daraus, sowie aus der Möglichkeit, mit ihrer Hilfe eine große Zahl von Erscheinungen verständlich zu machen, rechtfertigt sich ihre Darstellung in ihrer ursprünglichen einfachen Form. Wir werden es aber weiter unten in der Regel vorziehen, von Energieniveaus oder Energiestufen der Elektronen statt von Elektronenbahnen zu sprechen, denn die Energieverhältnisse am Atom werden durch die Bohrsche Theorie richtig wiedergegeben.

495. **Das Wasserstoffatom.** Wenn ein Atomkern mehr als ein Elektron besitzt, so liegt, wegen der auch zwischen den einzelnen Elektronen wirkenden Kräfte, ein sog. Mehrkörperproblem (§ 66) vor, dessen Lösung in geschlossener Form in fast allen Fällen sehr kompliziert und nur näherungsweise möglich ist. Es kommen auch noch andere Einflüsse hinzu, deren Erörterung an dieser Stelle zu weit führen würde. Eine strenge Berechnung der Energie und der Bahnformen kommt daher vorläufig nur in einfachsten Fällen in Frage.

Am einfachsten liegen die Verhältnisse beim Wasserstoffatom. Es hat die Ordnungszahl 1. Sein Kern trägt daher ein einziges positives Elementarquantum ε, und es besitzt nur ein einziges Elektron. Wir wollen uns hier auf den einfachen Fall kreisförmiger Bahnen beschränken, die alles Wesentliche erkennen lassen. Es sei wieder μ die Masse, r der Bahnradius und ω die Winkelgeschwindigkeit des Elektrons. Dann lautet die Bedingung für die Zentripetalkraft

$$\mu r \omega^2 = \frac{\varepsilon^2}{r^2}. \tag{8}$$

Nehmen wir noch die Quantenbedingung (Gl. 6)

$$\mu r^2 \omega = \frac{n h}{2\pi} \tag{9}$$

hinzu, so folgt

$$r = \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 \mu \varepsilon^2} \tag{10}$$

und

$$\omega = \frac{8\pi^3 \mu \varepsilon^4}{n^3 h^3}. \tag{11}$$

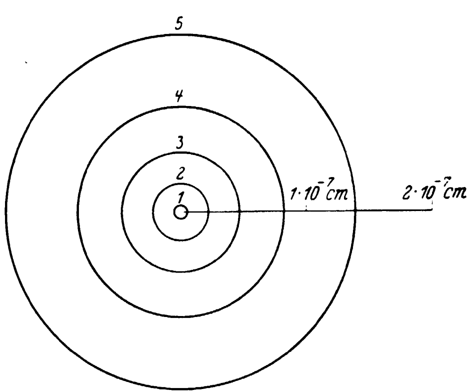


Abb. 470. Die innersten Quantenbahnen des Wasserstoffatoms.

Der Radius der innersten Quantenbahn (Grundbahn), welche als Bahn kleinster Energie dem normalen Zustand (Grundzustand) des Atoms entspricht, ergibt sich, wenn wir $n = 1$ setzen. Unter Einsetzung der Werte von μ, ε und h folgt dann $r_1 = 0{,}525 \cdot 10^{-8}$ cm, also von der richtigen Größenordnung der Atomdurchmesser. Abb. 470 zeigt die innersten Quantenbahnen des Wasserstoffatoms für $n = 1$ bis $n = 5$.

Die Energie E_n eines Elektrons auf der n^{ten} Quantenbahn ergibt sich als Summe seiner kinetischen Energie $\frac{1}{2}\mu v^2 = \frac{1}{2}\mu r^2 \omega^2$ und seiner potentiellen Energie $-\varepsilon^2/r$ (§ 223). Nach Einsetzung der Werte von r und ω aus den Gl. 10 und 11 erhalten wir

$$E_n = -\frac{2\pi^2 \mu \varepsilon^4}{n^2 h^2}. \tag{12}$$

496. **Das Spektrum des Wasserstoffatoms.** Mit Hilfe der vorstehend abgeleiteten Beziehungen sind wir jetzt in der Lage, auf Grund der Frequenzbedingung Gl. 7 die Schwingungszahlen der Linien im Spektrum des Wasserstoffatoms zu berechnen. Für dieses Spektrum, das in Entladungsröhren, die mit Wasserstoffgas gefüllt sind, leicht zu erhalten ist und das in den Spektren der

Fixsterne auch als Absorptionsspektrum auftritt, ist seit langem eine rein empirische Formel bekannt gewesen, deren Aufstellung BALMER (1885) gelang. Die BALMERsche Formel lautet:

$$\nu = C\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{m^2}\right) \qquad (m = 3, 4, 5 \ldots \infty). \tag{13}$$

C ist eine Konstante, deren Größe $3{,}2093 \cdot 10^{15}\,\mathrm{sec}^{-1}$ beträgt. Führen wir statt der Schwingungszahl $\nu = c/\lambda$ die Wellenzahl $N = 1/\lambda = \nu/c$ ein (§ 436), so lautet die Gl. 13:

$$N = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{m^2}\right). \tag{14}$$

Dabei ist $R = C/c$ die sog. RYDBERG-Konstante. Ihr Wert beträgt nach Messungen am Wasserstoff $R = 109677{,}691\,\mathrm{cm}^{-1}$. (Man beachte die durch die große Genauigkeit spektroskopischer Messungen gerechtfertigte Zahl der angegebenen Stellen.) Man erhält die einzelnen Spektrallinien des sichtbaren Wasserstoffspektrums (BALMER-Serie), wenn man in Gl. 13 oder 14 für m die Reihe der positiven ganzen Zahlen, von $m = 3$ aufwärts, einsetzt. Später wurde festgestellt, daß man auch das ultraviolette Wasserstoffspektrum (LYMAN-Serie) durch eine entsprechende Gleichung wiedergeben kann, indem man lediglich in Gl. 13 oder 14 die Größe $4 = 2^2$ durch $1^2 = 1$ ersetzt und für m die ganzen Zahlen von 2 aufwärts einsetzt. Weiter stellt eine gleiche Formel auch das ultrarote Wasserstoffspektrum (PASCHEN-Serie) dar, wenn man $4 = 2^2$ durch $3^2 = 9$ und für m die ganzen Zahlen von 4 aufwärts einsetzt. Analog ergibt sich eine weitere, die BRACKETT-Serie usw. Allgemein kann man diesen rein empirischen Befund durch die Gleichung

$$N = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) \qquad \begin{array}{lll} n = 1, & m = 2, 3, 4 \ldots, & \text{(LYMAN-Serie)} \\ n = 2, & m = 3, 4, 5 \ldots, & \text{(BALMER-Serie)} \\ n = 3, & m = 4, 5, 6 \ldots, & \text{(PASCHEN-Serie)} \\ n = 4, & m = 5, 6, 7 \ldots, & \text{(BRACKETT-Serie)} \end{array} \tag{15}$$

ausdrücken.

Es war nun ein erster großer Erfolg BOHRS, daß seine Theorie ohne weiteres die BALMERsche Formel, und zwar mit dem richtigen Zahlenwert der Konstanten, ergab. Springt ein Elektron von der m^{ten} auf die n^{te} Quantenbahn ($m > n$), so ergibt sich die Schwingungszahl der von ihm dabei ausgesandten Strahlung aus den Gl. 7 und 12 zu

$$\nu = \frac{E_m - E_n}{h} = \frac{2\pi^2 \mu \varepsilon^4}{h^3}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right), \tag{16}$$

bzw. in Wellenzahlen ausgedrückt,

$$N = \frac{2\pi^2 \mu \varepsilon^4}{c h^3}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) \tag{17}$$

Diese Gleichung ist aber mit der allgemeinen BALMERschen Formel, Gl. 15, identisch, und die Konstante erweist sich auch durch Einsetzen der Werte von c, h, μ und ε als mit R sehr nahezu übereinstimmend (vgl. § 498).

Abb. 471 zeigt das Schema, nach dem die ersten Linien der LYMAN-, BALMER- und PASCHEN-Serie entstehen. Die horizontalen Geraden bedeuten die zu den Quantenzahlen n gehörenden Energieniveaus E_n. Die Entstehung der ersten Linien und der letzten Linie jeder der drei Serien ist durch Pfeile angedeutet, die die Energieniveaus verbinden. Ihre Länge ist daher der Energiedifferenz je zweier Niveaus, also auch der Schwingungszahl der ausgesandten Linien, proportional. Die Linien der BALMER-Serie sind in üblicher Weise mit H_α, H_β, H_γ usw. bezeichnet. In Abb. 472 ist diese Serie schematisch dargestellt. Abb. 473 zeigt

eine Aufnahme der BALMER-Serie. Man erkennt deutlich die Häufung der Linien an der Seriengrenze ($n = \infty$; in den Abb. 471 und 472 ist zwischen m und n nicht mehr unterschieden; alle Quantenzahlen sind mit n bezeichnet).

Demnach rührt die LYMAN-Serie von Elektronensprüngen her, welche von einer der äußeren Quantenbahnen ($n = 2, 3, 4 \ldots$) auf die Grundbahn ($n = 1$) führen. Bei der BALMER-Serie endigen die Sprünge auf der zweiten ($n = 2$), bei der PASCHEN-Serie auf der dritten Quantenbahn ($n = 3$) usw.

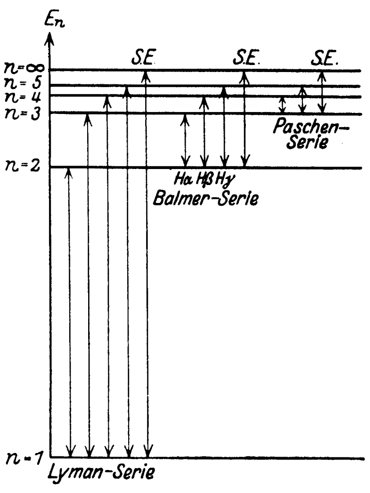


Abb. 471. Energieschema des Wasserstoffatoms.

Das Spektrum des Wasserstoffatoms zeigt bereits eine ganz charakteristische Eigentümlichkeit aller Serienspektren. Je größer die laufende Quantenzahl (in Gl. 16 und 17 mit m bezeichnet) wird, desto dichter liegen die aufeinanderfolgenden Schwingungszahlen beieinander. Sie häufen sich bei derjenigen Schwingungszahl ν_∞, für die die laufende Quantenzahl ∞ wird, der Seriengrenze (S. E., Abb. 471 u. 472). Diese entspricht einem Quantensprung, der von einer sehr weit entfernten Quantenbahn ausgeht (r praktisch $= \infty$, vgl. Gl. 10). Die der Seriengrenze zugehörige Schwingungszahl ν_∞ ergibt sich für jede Serie aus Gl. 16 zu

$$\nu_\infty = \frac{2\pi^2 \mu \varepsilon^4}{h^3} \cdot \frac{1}{n^2} \tag{18}$$

$n =$ Quantenzahl des Niveaus auf dem der Elektronensprung endet). Diesem

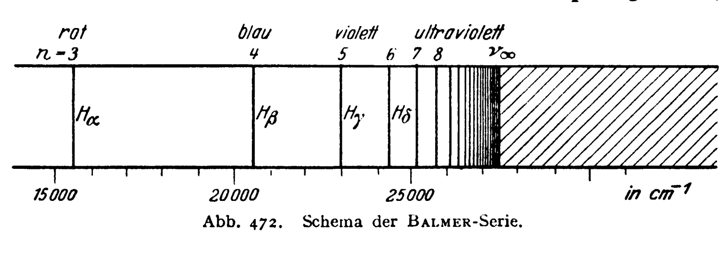


Abb. 472. Schema der BALMER-Serie.



Abb. 473. BALMER-Serie des Wasserstoffs.

Zustand entspricht beim Wasserstoff bei der Serie mit $n = 1$ (Grundserie) die Energiedifferenz gegen das Grundniveau

$$E_\infty = h\nu_\infty = \frac{2\pi^2 \mu \varepsilon^4}{h^2}. \tag{19}$$

Wir werden auf diese wichtige Beziehung noch zurückkommen.

Wir haben im vorstehenden nur die Grundzüge der ursprünglichen BOHRschen Theorie gegeben. Die genauere Theorie führt zu dem Ergebnis, daß der Zustand eines Elektrons an einem Atom nicht durch eine, sondern durch vier

Quantenzahlen festzulegen ist, deren Bedeutung hier nicht näher erörtert werden kann. Dies führt zu einer Aufspaltung der Spektrallinien des Wasserstoffs in mehrere Linien. Diese wird um so vielfältiger, je höher die Quantenzahlen sind, die an dem Zustandekommen der Linie beteiligt sind. Es kommen jedoch unter normalen Bedingungen nicht alle denkbaren Übergänge zwischen je zwei Energiestufen vor, ihre Möglichkeit ist vielmehr auf Grund gewisser theoretischer Überlegungen durch sog. Auswahlregeln beschränkt, auf die hier gleichfalls nicht näher eingegangen werden kann.

Nach der Quantentheorie ist die Umlaufsfrequenz eines Elektrons am Atom, die wir mit ν_u bezeichnen wollen, von der Frequenz ν des bei einem Quantensprung aus der betreffenden Quantenbahn ausgesandten Lichtes verschieden. Für letztere gilt Gl. 16, während sich erstere aus Gl. 11 zu

$$\nu_u = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{4\pi^2 \mu \varepsilon^4}{n^3 h^3} \qquad (20)$$

ergibt. Wir wollen jetzt einen Quantensprung betrachten, der von einer Bahn mit sehr großer Quantenzahl ($n \gg 1$) auf die nächstniedrigere mit der Quantenzahl $n - 1$ erfolgt. In diesem Fall ergibt sich, wie man durch eine einfache Reihenentwicklung feststellt, daß bei Vernachlässigung der Zahl 1 gegenüber der großen Zahl n die Gl. 16 mit der obigen Gleichung für ν_u identisch wird. Das aber ist das Ergebnis, das man nach der klassischen Lichttheorie ganz allgemein erwartet hätte. Dieser Fall liefert ein Beispiel für das sog. BOHRsche Korrespondenzprinzip, welches aussagt, daß die Quantentheorie bei sehr großer Quantenzahl das gleiche Ergebnis liefern muß, wie die klassische Lichttheorie, daß diese also als Grenzfall für sehr große Quantenzahlen betrachtet werden kann.

497. **Das kontinuierliche Spektrum des Wasserstoffs.** Bisher haben wir nur Elektronenübergänge am Wasserstoffatom betrachtet, die von einer Quantenbahn auf eine andere erfolgen. Die Grenze ν_∞ der einzelnen Serien war gegeben durch einen Sprung von einer unendlich entfernten Quantenbahn auf eine Bahn von kleinerer Quantenzahl. Für $r = \infty$, also $n = \infty$, wird nach Gl. 11 $\omega = 0$, d. h. das Elektron befindet sich auf Bahnen von sehr großer Quantenzahl praktisch in Ruhe. Nun kommt es aber auch vor, daß ein vorher gar nicht dem Atom angehörendes, freies Elektron von einem Wasserstoffkern, der gerade kein Elektron besitzt, eingefangen wird, also auf eine seiner Quantenbahnen springt. Das Elektron kann, solange es frei ist, alle möglichen Werte der kinetischen Energie $\mu v^2/2$ haben. Befindet es sich aber auf der n^{ten} Quantenbahn, so hat es nach Gl. 12 die Energie $-2\pi^2 \mu \varepsilon^4/n^2 h^2$. Es hat also bei dem Einfangprozeß die Energie $\mu v^2/2 + 2\pi^2 \mu \varepsilon^4/n^2 h^2$ verloren, und diese muß nunmehr in Form von Strahlung auftreten, für die die Gleichung

$$h\nu = \frac{\mu v^2}{2} + \frac{2\pi^2 \mu \varepsilon^4}{n^2 h^2} = \frac{\mu v^2}{2} + h\nu_\infty \qquad (21)$$

gelten muß. Die Schwingungszahlen, die sich hieraus ergeben, sind größer als die Schwingungszahlen ν_∞ der Seriengrenzen (Gl. 18), und der Überschuß über ν_∞ kann alle möglichen Werte von 0 aufwärts haben, je nach dem Betrage von $\mu v^2/2$. Daraus folgt, daß es prinzipiell möglich ist, daß sich an die Seriengrenzen ein kontinuierliches Spektrum anschließt, und das ist auch tatsächlich beobachtet worden. Es ist bei der BALMER-Serie in Abb. 472 durch Schraffierung angedeutet. Auch bei anderen Atomen sind solche an die Seriengrenzen anschließenden kontinuierlichen Spektren beobachtet worden.

498. **Wasserstoffähnliche Spektren.** Spektren, die denen des Wasserstoffatoms ähneln, treten bei anderen Atomen dann auf, wenn es sich darum handelt, daß ein einzelnes Elektron der Anziehung eines Atomkerns unterliegt, ohne daß

die übrigen Elektronen des Atoms wesentliche Störungen hervorrufen. Trägt der Kern nicht nur eine, sondern z Elementarquanten, so sind die Gl. 12 und 16, wie man durch Wiederholung der Rechnung leicht findet, zu ersetzen durch die Gleichungen

$$E_n = \frac{2\pi^2 \mu z^2 \varepsilon^4}{n^2 h^2} \qquad (22)$$

und

$$\nu = \frac{2\pi^2 \mu z^2 \varepsilon^4}{h^3}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right). \qquad (23)$$

Die Wirkung einer Erhöhung der Kernladung besteht also in einer Verschiebung des ganzen Spektrums zu größeren Schwingungszahlen, also kleineren Wellenlängen.

Der ausgeprägteste Fall von Wasserstoffähnlichkeit liegt bei einem einfach ionisierten Heliumatom (Ordnungszahl 2) vor, d. h. einem solchen, das eines seiner beiden Elektronen verloren hat, also deren nur noch eines besitzt. Der Fall unterscheidet sich von dem des Wasserstoffs nur dadurch, daß die Kraft, mit der das Elektron vom Kern (Ladung 2 Elementarquanten) angezogen wird, doppelt so groß ist. Infolgedessen gilt hier die Gl. 23 mit $z = 2$. Spektralserien des Heliums, die diesem Fall entsprechen, kann man in der Tat nicht nur in Entladungsröhren beobachten, sondern sie treten, ebenso wie die besprochenen Wasserstoffserien, auch an zahlreichen Fixsternen auf.

Die in den §§ 495 und 496 abgeleiteten Formeln enthalten noch eine Vernachlässigung, und zwar die gleiche, die man macht, wenn man im Sonnensystem die Sonne als vollkommen ruhend betrachtet, statt des gemeinsamen Schwerpunkts des ganzen Sonnensystems. In Wirklichkeit kreisen aber Elektron und Kern um den gemeinsamen Schwerpunkt beider (vgl. die Bewegung von Erde und Mond um ihren gemeinsamen Schwerpunkt, § 67). Man hat deshalb in Gl. 23 streng an Stelle der Elektronenmasse μ die Größe $M\mu/(M+\mu)$ zu setzen (M = Masse des Atomkerns), ein Ausdruck, der sich, weil $M \gg \mu$, nur äußerst wenig von μ unterscheidet. Die spektroskopischen Methoden sind aber so genau, daß sie den hierdurch hervorgerufenen Unterschied zu beobachten gestatten. Es hat dieser Unterschied nämlich, wie man ohne weiteres einsieht, zur Folge, daß die Rydberg-Konstante R für Helium ein wenig größer sein muß als für Wasserstoff. Tatsächlich ergeben die Messungen für Helium $R = 109722{,}144\ \mathrm{cm}^{-1}$ gegen 109677,691 beim Wasserstoff. Der Unterschied der Konstanten erlaubt, das Massenverhältnis M_H/μ des Wasserstoffkerns zum Elektron zu berechnen. Es ergibt sich, in vorzüglicher Übereinstimmung mit anderweitigen Bestimmungen, zu 1846. Der Grenzwert der Rydberg-Konstanten für sehr große Kernmasse beträgt $R = 109737{,}1\ \mathrm{cm}^{-1}$. Dies stimmt genau mit der Zahl überein, die man erhält, wenn man in Gl. 17 die Zahlenwerte von ε, μ, c und h einsetzt.

499. **Allgemeines über Spektralserien.** Bei den übrigen Atomen ist, wie bereits erwähnt, die genaue Berechnung der Energiestufen der Elektronen aus einer modellmäßigen Vorstellung im allgemeinen nicht möglich. Jedoch offenbaren sämtliche Linienspektren ihren quantenhaften Ursprung auf das deutlichste. Bei der Gl. 16 ist es charakteristisch, daß sich beim Wasserstoff *jede Schwingungszahl als die Differenz zweier Größen* — der durch h dividierten Energien im Anfangs- und im Endniveau — darstellt. Man nennt diese Größen *Terme*. Innerhalb einer Serie ist stets der erste Term konstant, der zweite entsteht durch Einsetzen der fortlaufenden Reihe der ganzen Zahlen, mit einer bestimmten beginnend, in einen einfachen Ausdruck. Schon früher hat Rydberg und später Ritz auf Grund des empirischen Befundes gezeigt, daß das gleiche wie beim Wasserstoffspektrum auch für andere, kompliziertere Spektren gilt. In stets fortschreitendem Maße ist es gelungen, die Linienspektren der Elemente

in Serien zu ordnen, derart, daß die Schwingungszahlen innerhalb jeder Serie sich als Differenzen zweier Terme — eines konstanten und eines durch Einsetzen der fortlaufenden Reihe der ganzen Zahlen veränderlichen — darstellen. Die RYDBERG-Konstante tritt auch hier als Faktor auf, aber die Nenner der Terme sind komplizierter gebaut als beim Wasserstoff. Auch dies hat die Theorie befriedigend deuten können. Die mit h multiplizierten Terme ergeben stets die Energie des Elektrons in seinen einzelnen Energieniveaus. Die Energie des Elektrons im Grundniveau einer Serie erhält man aus der mit h multiplizierten Schwingungszahl ν_∞ der Seriengrenze der Grundserie. So ist es möglich, auch bei den komplizierteren Atomen diese Energien auf rein spektroskopischem Wege zu bestimmen und damit einen tiefen Einblick in den Aufbau der Atome zu tun. Die Hoffnung, daß es gelingen werde, aus den Spektren den Aufbau der Atome abzulesen, hat sich also in geradezu überraschend weitgehender Weise erfüllt.

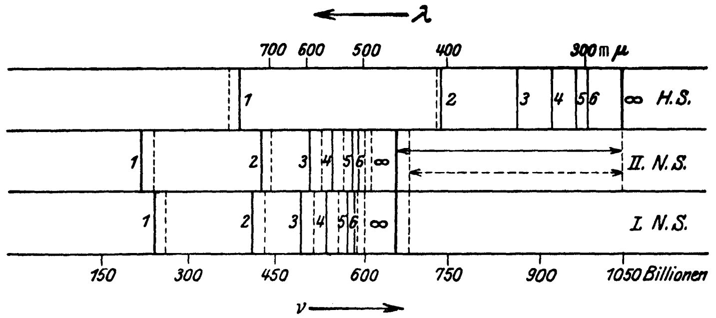


Abb. 474. Schema der Haupt- und Nebenserien des Kaliums.

Man teilt die Spektralserien eines Atoms nach KAYSER und RUNGE und RYDBERG (1889) ein in die Hauptserie, die erste und zweite Nebenserie, die BERGMANN-Serie und weitere Serien. Die genauen Termausdrücke sind bei den meisten Atomen ziemlich kompliziert, soweit sie bisher aus den Spektren haben ermittelt werden können. Am einfachsten liegen die Verhältnisse bei den Alkalimetallen. Bei diesen lauten die Serienformeln für die Wellenzahlen:

$$\begin{aligned}
&\text{Hauptserie:} & N &= \frac{R}{(1+s)^2} - \frac{R}{(m+p)^2}, & m &= 2,\ 3\ \ldots \\
&\text{1. Nebenserie:} & N &= \frac{R}{(2+p)^2} - \frac{R}{(m+d)^2}, & m &= 3,\ 4\ \ldots \\
&\text{2. Nebenserie:} & N &= \frac{R}{(2+p)^2} - \frac{R}{(m+s)^2}, & m &= (1),\ 2\ \ldots \\
&\text{BERGMANN-Serie:} & N &= \frac{R}{(3+d)^2} - \frac{R}{(m+f)^2}, & m &= 4,\ 5\ \ldots
\end{aligned} \tag{24}$$

Abb. 474 zeigt die Linien der Hauptserie ($H.S.$) und der ersten und zweiten Nebenserie ($N.S.$) beim Kalium. Die Linien sind doppelt (sog. Multiplizität). Diese Serienformeln unterscheiden sich von denen des Wasserstoffs durch das Hinzutreten gewisser Größen s, p, d, f zu den Quantenzahlen. Diese sog. RYDBERG-Korrektionen sind für jede Atomart verschieden. Sie liegen zwischen -1 und $+1$. Wie man durch Vergleich mit den Verhältnissen beim Wasserstoff erkennt, entspricht der erste Term der Hauptserie der Energie des Elektrons in seiner Grundbahn. Wichtig ist, daß alle Serien eine endliche Grenze haben, die durch ihren ersten, konstanten Term gegeben ist ($m = \infty$). Die Grenzen der beiden Nebenserien fallen also zusammen (Abb. 474). Auf weitere Einzelheiten kann hier nicht eingegangen werden.

Die Abb. 475—477 zeigen einige charakteristische Linienspektren. Man sieht die relative Einfachheit der noch einigermaßen wasserstoffähnlichen Spektren der Alkalimetalle K und Na, wohingegen das Spektrum des Eisens aus einer ungeheuer großen Zahl von Linien besteht und äußerst kompliziert ist[1]. Die Spektren des Kaliums und des Eisens sind Emissionsspektren, das des Natriums zeigt das Absorptionsspektrum des Natriumdampfes. Hier tritt nur die Hauptserie auf, weil sich alle Atome im Grundzustand (niedrigste Quantenzahl) befinden, von dem aus sie durch das absorbierte Licht auf höhere Energieniveaus gehoben werden.



Abb. 475. Emissionsspektrum des Kaliums (etwa zwischen 5000 und 3000 ÅE).



Abb. 476. Absorptionsspektrum des Natriumdampfs (Hauptserie etwa zwischen 2860 und 2400 ÅE).



Abb. 477. Emissionsspektrum des Eisens (etwa zwischen 5000 und 2200 ÅE).

Ritz hat bereits empirisch gefunden, daß in vielen Fällen die Differenz der Schwingungszahlen zweier Linien einer Serie gleich der Schwingungszahl einer Linie einer andern Serie des gleichen Atoms ist (Ritzsches **Kombinationsprinzip**). Diese Tatsache erklärt sich durch die Quantentheorie ohne weiteres. Es seien E_1, E_2, E_3 die Energien des Elektrons in irgendwelchen drei Quantenbahnen, wobei $E_1 < E_2 < E_3$. Dann sind zwischen diesen drei Quantenbahnen drei Arten von Übergängen möglich, zu denen nach Gl. 7, § 495, die Schwingungszahlen $\nu = (E_3 - E_1)/h$, $\nu' = (E_2 - E_1)/h$ und $\nu'' = (E_3 - E_2)/h$ gehören. Man sieht, daß $\nu - \nu' = \nu''$, womit das Kombinationsprinzip als eine notwendige Folge der Theorie bewiesen ist (ν und ν' gehören, weil sie dem gleichen Endzustand E_1 entsprechen, zur gleichen Serie). Daß im allgemeinen nicht alle hiernach möglichen Kombinationen wirklich auftreten, liegt daran, daß gewisse unter ihnen durch das obenerwähnte Auswahlprinzip ausgeschlossen sind (sog. verbotene Übergänge). In elektrischen Feldern können aber auch solche verbotenen Übergänge vorkommen.

Bei den komplizierten Atomen macht sich die Wirkung des Vorhandenseins mehrerer Quantenzahlen viel deutlicher bemerkbar als beim Wasserstoff. Die **Aufspaltung** ist viel stärker. Linien, die in eine, zwei usw. Einzellinien aufgespalten sind, heißen Dublets, Triplets usw., allgemein Multiplets.

Dasjenige Elektron, dessen Quantensprung zur Emission einer Spektrallinie Veranlassung gibt, pflegt man als **Leuchtelektron** zu bezeichnen.

Ein wertvolles Hilfsmittel für die Zuordnung der einzelnen Spektrallinien zu den verschiedenen Serien liefert die **Prestonsche Regel**, welche folgendes besagt: Alle Linien der gleichen Serie und homologe Linien aus verschiedenen

[1] Die Abb. 475 und 476 wurden mir von den Herren Foote und Mohler, die Abb. 477 von Herrn Grotrian zur Verfügung gestellt.

Spektren haben den gleichen ZEEMAN-Typus, d. h. ihre Aufspaltung im ZEEMAN-Effekt (§ 462) zeigt die gleichen Abweichungen vom normalen ZEEMAN-Effekt.

500. Anregung und Ionisierung von Atomen. Der Normalzustand eines Atoms, d. h. derjenige, in dem es sich bei Fehlen äußerer Einwirkungen befindet, ist derjenige kleinster Energie, also der, bei dem sich jedes Elektron auf seinem tiefsten Energieniveau, in seinem Grundzustand (kleinste Quantenzahl) befindet. Denn auf dieses fällt es stets schließlich von selbst wieder unter Ausstrahlung zurück. In diesem Grundzustande kann es kein Licht ausstrahlen. Damit es dazu befähigt wird, muß es zunächst durch Energiezufuhr auf eine höhere Energiestufe gehoben werden, aus der es unter Strahlungsemission auf eine tiefere zurückfallen kann. Eine solche Energiezufuhr (Anregung) kann auf rein mechanischem Wege erfolgen, z. B indem bei Zusammenstößen zwischen zwei Atomen ein Teil der kinetischen Energie der Atome auf ein Elektron übergeht und seine Hebung auf eine höhere Energiestufe bewirkt. Das tritt aber in merklichen Beträgen nur bei sehr hohen Temperaturen, wenn die kinetische Energie der Atome sehr groß ist, ein und führt dann zum thermischen Leuchten der erhitzten Körper. Die Anregung kann aber auch dadurch zustande kommen, daß ein durch elektrische Kräfte auf genügend hohe Geschwindigkeit gebrachtes freies Elektron gegen das Atom stößt und ihm die zur Anregung nötige Energie übermittelt. Und schließlich kann die Anregung auch durch den der Ausstrahlung entgegengesetzten Vorgang, nämlich durch Absorption von einfallendem Licht, erfolgen. Dies ist der Fall bei der Lichterregung durch Fluoreszenz (§ 508). In diesen Fällen verlaufen also die Quantensprünge der Elektronen in Richtung von kleinerer zu größerer Energie, d. h. sie werden auf ein höheres Energieniveau gehoben.

Da bei dem Sprung eines Elektrons von der höchsten quantenhaften Energiestufe ($n = \infty$) auf das Grundniveau ($n = 1$) die der betreffenden Seriengrenze ν_∞ entsprechende Energie $h\nu_\infty$ frei wird, so ist auch mindestens die Energie $h\nu_\infty$ aufzuwenden, wenn man ein Elektron aus seinem Grundzustand entfernen und es vom Atom abtrennen, das Atom ionisieren will. Bei Kenntnis der Terme und daher auch der Energiestufen des Elektrons kann man also aus der Seriengrenze ν_∞ der zum Grundniveau gehörigen Serie die Energie $h\nu_\infty$ berechnen, die mindestens dazu notwendig ist, um das Elektron aus dem Grundniveau bis außerhalb des Anziehungsbereichs des Kerns zu befördern, die sog. Ionisierungsarbeit. Auch diese Energiezufuhr kann man, ebenso wie die zur Anregung nötige, durch Elektronenstoß bewirken. Bei genügend hoher Temperatur kann sie auch auf Grund der Zusammenstöße der Atome erfolgen (Temperaturionisation).

Die kinetische Energie eines elektrisch beschleunigten Elektrons ist gleich $U\varepsilon$, wenn U die beschleunigende Spannung und ε die Ladung des Elektrons bedeutet. Läßt man derart beschleunigte Elektronen ein Gas durchlaufen, so wird, wenn man die Elektronengeschwindigkeit allmählich steigert, in einem ganz bestimmten Augenblick eine Lichtemission einsetzen, nämlich dann, wenn die kinetische Energie der Elektronen gerade so groß geworden ist, daß sie genügt, um ein Elektron der Atome des Gases aus dem Grundzustand auf die nächste Energiestufe zu heben, aus der es dann unter Ausstrahlung in den Grundzustand zurückfällt. Bei weiterer Steigerung der Geschwindigkeit treten weitere Spektrallinien auf, welche von Hebungen des Elektrons auf höhere Energiestufen und Zurückfallen aus diesen herrühren. Ist die Elektronengeschwindigkeit so groß geworden, daß die Energie ausreicht, um das Elektron ganz von dem Atom abzutrennen, so treten im Gase Ionen und freie Elektronen auf, was sich daran bemerkbar macht, daß das Gas leitend wird.

Diese Tatsachen sind von FRANCK und G. HERTZ (1914) in einer grundlegenden Arbeit zuerst am Quecksilberdampf nachgewiesen worden. Es gelang ihnen, zu zeigen, daß die Anregung von Quecksilberatomen tatsächlich in dem Augenblick eintritt, in dem ihnen durch Elektronenstoß diejenige Energie zugeführt wird, die man aus den Spektraltermen des Quecksilbers als zur Anregung erforderlich berechnet.

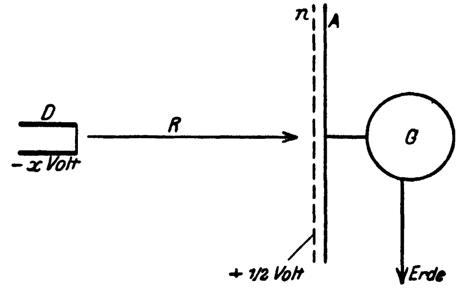


Abb. 478. Schema des Apparats von FRANCK und HERTZ zum Nachweis der Anregungs- und Ionisierungsspannung.

Abb. 478 zeigt die von FRANCK und HERTZ ursprünglich benutzte, seitdem vervollkommnete Apparatur. Von einer Glühkathode D, die eine veränderliche Spannung von — x Volt gegen Erde hat, gehen in der Richtung R Elektronen aus und bewegen sich auf ein Drahtnetz n, das auf einer Spannung von $^1/_2$ Volt gegen Erde gehalten wird. Durch das zwischen D und n herrschende Feld werden sie beschleunigt. Sie treten dann durch die Maschen des Drahtnetzes hindurch und bewegen sich auf die Metallelektrode A zu, die durch ein Galvanometer G mit der Erde verbunden ist, so daß zwischen n und A eine die Elektronen verzögernde Spannung von $^1/_2$ Volt herrscht. Solange die Spannung zwischen D und n größer ist als diejenige zwischen n und A, haben die Elektronen ausreichende Energie, um gegen die verzögernde Spannung zwischen n und A anzulaufen und die Elektrode A zu erreichen. Das Galvanometer zeigt einen Strom an, der mit steigender Spannung zwischen D und n allmählich ansteigt, weil um so mehr Elektronen durch die Maschen von n schlüpfen, je schneller sie sind. Die Zusammenstöße der Elektronen mit den Molekülen verlaufen zunächst noch vollständig elastisch, d. h. ohne Übergang von kinetischer Energie in andere Energieformen. In dem Augenblick aber, wo die Energie der Elektronen ausreicht, um bei Zusammenstößen mit den Molekülen des zwischen D und n befindlichen Gases Elektronen an den Atomen aus ihrem Grundniveau auf die nächsthöhere Energiestufe zu heben, verlieren sie ihre Energie und sind nicht mehr imstande, gegen die verzögernde Spannung anzulaufen; der Strom im Galvanometer G sinkt. Die Zusammenstöße der Elektronen mit den Molekülen sind jetzt unelastisch geworden. Wird die Spannung zwischen D und n weiter gesteigert, so wächst die Energie der Elektronen wieder, und zwar so lange, bis sie imstande sind, eine erneute Anregungs- oder Ionisierungsarbeit zu leisten. Dann sinkt der Strom in G wieder, und so wiederholt sich das gleiche Bild, so wie es Abb. 479 darstellt, welches die Abhängigkeit der Stromstärke von der angelegten Spannung in Quecksilberdampf darstellt. Man sieht, wie in Abständen von fast 5 Volt Maxima der Stromstärke aufeinanderfolgen, der Höhe der Anregungsspannung des Quecksilbers entsprechend.

Es ist üblich, nicht die zur Anregung bzw. Ionisierung nötige Arbeit anzugeben, sondern diejenige Spannung U, die ein Elektron durchlaufen haben muß, um die Energie zu besitzen, die es zur Leistung dieser Arbeit bei einem Zusammenstoß mit einem Atom befähigt. Man spricht in diesem Sinne von der Anregungs- bzw. Ionisierungsspannung. Aus ihr ergibt sich die zugehörige Energie durch Multiplikation mit der Elektronenladung ε. Denn $U\varepsilon$ ist die Energie, die ein freies Elektron beim Durchlaufen der Spannung U gewinnt. (Wenn man U in Volt und ε in Coulomb ausdrückt, so erhält man die Energie in der Einheit 1 Wattsec oder Joule $= 10^7$ erg). Die nachstehende

Tab. 33 mag einen Begriff von der Größenordnung der Ionisierungsspannungen geben.

(Es hat sich eingebürgert, nicht nur die kinetische Energie von Elektronen, sondern auch in gleicher Weise ihre Geschwindigkeit in Volt anzugeben. Elektronen mit einer „Geschwindigkeit von U Volt" sind also solche, welche ihre Geschwindigkeit dem Durchlaufen einer Spannung von U Volt verdanken. Dabei ist zu beachten, daß die wirkliche Geschwindigkeit der Wurzel aus der Spannung proportional ist. Eine „Voltgeschwindigkeit" von 1 Volt entspricht $5{,}93_5 \times 10^7$ cm/sec. Zur Erzielung der doppelten Geschwindigkeit sind 4 Volt erforderlich.)

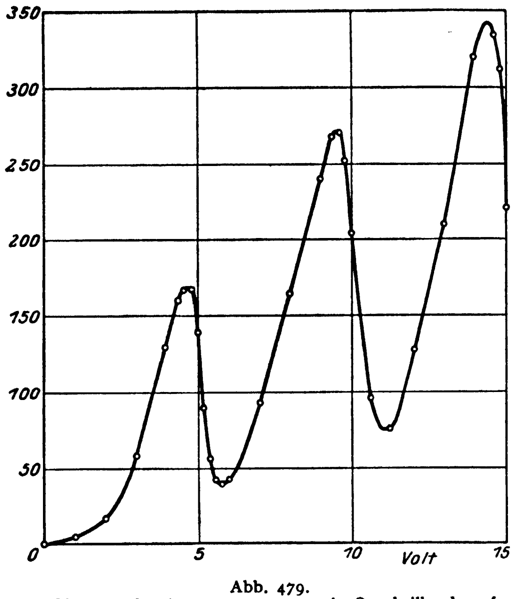


Abb. 479.
Messung der Anregungsspannung in Quecksilberdampf.

Tabelle 33. Ionisierungsspannungen einiger Atome.

Helium	24,5 Volt
Neon	21,5 „
Argon	15,4 „
Krypton . . .	13,3 „
Xenon	11,5 „
Wasserstoff . .	13,5 „
Quecksilber . .	10,39 „
Natrium . . .	5,13 „
Kalium	4,13 „
Caesium . . .	3,96 „

501. **Das periodische System der Elemente.** Im Jahre 1869 wiesen — gleichzeitig und unabhängig voneinander — MENDELEJEFF und LOTHAR MEYER auf die Periodizität der chemischen Eigenschaften der Elemente hin und stellten das bekannte periodische System auf, in dem die Elemente nach steigendem Atomgewicht in mehreren Horizontalreihen derart angeordnet sind, daß die vertikal untereinander stehenden Elemente (Vertikalreihen) ähnliche chemische Eigenschaften haben (Alkalien, Erdalkalien, Halogene, Edelgase usw., Tab. 34). Dieses zunächst rein empirische System findet durch die BOHRsche Theorie folgende physikalische Deutung.

Das einfachste Element ist der Wasserstoff mit der Ordnungszahl 1 und einem Elektron, ihm folgt das Helium mit zwei Elektronen, deren Abstände vom Kern nicht sehr verschieden groß sind. Das dann folgende Lithium hat drei Elektronen usw. Die positive Kernladung jeder Atomart ist, in elektrischen Elementarquanten als Einheit ausgedrückt, gleich der Elektronenzahl, also auch gleich der Ordnungszahl, d. i. die Nummer, die ein Element erhält, wenn man die einzelnen Elemente, mit Wasserstoff = 1 beginnend und unter Berücksichtigung der noch im System bestehenden Lücken, fortlaufend numeriert. Bezüglich des Aufbaues der Elektronensysteme der Atome hat BOHR folgende Vorstellung, das Aufbauprinzip, entwickelt. Er geht von der Annahme aus, daß zunächst die Atomkerne mit ihren positiven Ladungen $z\varepsilon$ (z = Ordnungszahl) und die Elektronen getrennt voneinander vorhanden waren, und daß von diesem Zustande aus ein schrittweiser Aufbau der einzelnen Atome stattfand. Infolge der anziehenden Kräfte fängt ein Atomkern ein Elektron nach dem andern ein, bis seine Kernladung $+z\varepsilon$ durch die negative Ladung $-z\varepsilon$ von z Elektronen

kompensiert und damit das elektrisch neutrale Atom fertig aufgebaut ist. Derartige Aufbauprozesse kommen auch zweifellos in der Natur in größtem Umfange fortgesetzt vor. Wir wissen, daß bei den ungeheuren Temperaturen im Innern der Fixsterne (mehrere Millionen Grad) die Materie weitgehend in Atomkerne und Elektronen zerlegt ist (sog. stripled atoms). Bei jeder Abkühlung, die im Laufe der Entwicklung mit der Sternmaterie vor sich geht, muß ein Aufbau der Atome in der geschilderten Weise stattfinden. Jedes Atom hat daher bei seinem schrittweisen Aufbau nacheinander Zustände zu durchlaufen, die bezüglich der Elektronenzahlen denjenigen der ihm im periodischen System vorangehenden fertig ausgebildeten Atome gleichen. Ein Atomkern, der erst ein Elektron eingefangen hat, gleicht dem fertigen Wasserstoffatom, bei weiterem Aufbau wird er dem Helium (2), dem Lithium (3), dem Beryllium (4) usw. bezüglich der Zahl seiner Elektronen gleich. Nur die Anziehung durch den höher geladenen Kern ist bei ihm größer. Das hat zur Folge, daß die Anordnung der Elektronen im entsprechenden Zustande bei ihm die gleiche ist wie bei den vorhergehenden Atomen, nur liegen die Elektronen dem Kern näher. Es wird nun angenommen, daß wenigstens in den ersten drei Horizontalreihen des periodischen Systems sich beim Hinzutritt weiterer Elektronen an der einmal vorhandenen Anordnung der bereits eingebauten Elektronen nichts mehr ändert. In den sog. großen Perioden und insbesondere bei den seltenen Erden liegen die Verhältnisse etwas komplizierter, können aber auch theoretisch gedeutet werden.

Tabelle 34. Das periodische System der Elemente.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
1	1 H 1,0078							2 He 4,002
2	3 Li 6,94	4 Be 9,02	5 B 10,82	6 C 12,00	7 N 14,008	8 O 16,000	9 F 19,00	10 Ne 20,18
3	11 Na 23,00	12 Mg 24,32	13 Al 26,97	14 Si 28,06	15 P 31,02	16 S 32,06	17 Cl 35,46	18 Ar 39,94
4	19 K 39,10 29 Cu 63,57	20 Ca 40,07 30 Zn 65,38	21 Sc 45,10 31 Ga 69,72	22 Ti 47,90 32 Ge 72,60	23 V 50,95 33 As 74,93	24 Cr 52,01 34 Se 79,2	25 Mn 54,93 35 Br 79,92	26 Fe 27 Co 28 Ni 55,84 58,94 58,69 36 Kr 82,9
5	37 Rb 85,45 47 Ag 107,88	38 Sr 87,63 48 Cd 112,41	39 Y 88,93 49 In 114,8	40 Zr 91,22 50 Sn 118,7	41 Nb 93,3 51 Sb 121,8	42 Mo 96,0 52 Te 127,5	43 Ma — 53 J 126,93	44 Ru 45 Rh 46 Pd 101,7 102,9 106,7 54 X 130,2
6	55 Cs 132,8 79 Au 197,2	56 Ba 137,4 80 Hg 200,6	57—71 Seltene Erden s. u. 81 Tl 204,4	72 Hf 178,6 85 Pb 207,2	73 Ta 181,4 83 Bi 209,0	74 W 184,0 84 Po 210,0	75 Re 186,3 85 — —	76 Os 77 Ir 78 Pt 190,9 193,1 195,2 86 Em 222
7	87,— —	88 Ra 226,0	89 Ac —	90 Th 232,1	91 Pa —	92 U 238,1		

57 La 138,9	5 Ce 140,1	59 Pr 140,9	60 Nd 144,3	61 — —	62 Sm 150,4	63 Eu 152,0	64 Gd 157,3
65 Tb 159,2	66 Dy 162,5	67 Ho 163,5	68 Er 167,7	69 Tu 169,4	71 Yb 173,5	71 Cp 175,0	

Seltene Erden.

Gemäß einer zuerst von KOSSEL und von LEWIS ausgesprochenen Idee sind nun die Elektronen eines Atoms gruppenweise angeordnet. Sie bilden sog. Elektronenschalen in verschiedenen mittleren Abständen vom Atomkern. Im Sinne des Aufbauprinzips geht dies so vor sich, daß jedesmal, wenn ein Atom im Verlaufe seines Aufbaus einen Zustand erreicht hat, der demjenigen eines Edelgases entspricht ($z = 2, 10, 18, 36, 54, 86$), das nächste hinzutretende Elektron sich dem Atom in einem Abstande anfügt, der erheblich größer ist als der der zuletzt vor ihm eingebauten Elektronen, und ebenso die ihm weiter folgenden Elektronen, bis nach Erreichen des nächsten edelgasähnlichen Zustandes diese Elektronenschale abgeschlossen ist und mit dem nächsten Elektron der Aufbau einer neuen Schale beginnt. So ordnen sich die Elektronen, sofern das betreffende Atom diese Elektronenzahlen überhaupt erreicht, nach dem nebenstehenden Schema.

1.	Elektronenschale	K	2	Elektronen	(Helium)
2.	,,	L	8	,,	(Neon)
3.	,,	M	8	,,	(Argon)
4.	,,	N	18	,,	(Krypton)
5.	,,	O	18	,,	(Xenon)
6.	,,	P	32	,,	(Emanation).

Die 7. Schale bricht vor Erreichen eines weiteren Edelgases mit Uran (92), dem schwersten Atom, ab. Die einzelnen Schalen werden, wie im Schema angegeben, als K-, L-, M-Schale usw. bezeichnet. Im Schema ist ferner jeweils dasjenige Edelgas verzeichnet, dessen Zustand mit dem Aufbau der einzelnen Schalen erreicht ist. Der Schalenaufbau der Elektronen findet seine Deutung durch das PAULI-Prinzip (§ 515), aus dem sich die Höchstzahl der Elektronen, die sich in den einzelnen Schalen befinden können, in Übereinstimmung mit der Erfahrung berechnen läßt.

Sämtliche Elektronenniveaus in allen Schalen regeln sich nach den Quantengesetzen. Jedoch ist, wie ebenfalls aus dem PAULI-Prinzip folgt, die niedrigste in der 2. Schale vorkommende Quantenzahl $n = 2$, in der 3. Schale $n = 3$ usw.

Man erkennt aus den vorstehenden Darlegungen, daß der physikalische Grund für die Periodizität der chemischen Eigenschaften mit dem Aufbau der einzelnen Elektronenschalen zusammenhängt. Anfang und Ende jeder Horizontalreihe des periodischen Systems bedeuten den Anfang und den Abschluß einer neuen Elektronenschale.

502. Die physikalische Deutung der chemischen Wertigkeit. Der Bau der Moleküle. Bekanntlich gibt das periodische System der Elemente uns Aufschluß über die chemische Wertigkeit oder Valenz der einzelnen Atomarten. Die Elemente der ersten Vertikalreihe (Wasserstoff und Alkalien) sind einwertig, die der zweiten (Erdalkalien) zweiwertig usw. Die Edelgase der achten Vertikalreihe gehen keine gewöhnlichen chemischen Verbindungen ein und sind daher als nullwertig zu bezeichnen. Die Elemente der siebenten Vertikalreihe (Halogene) können siebenwertig auftreten, sind aber meist einwertig, die der sechsten können sechswertig auftreten, sind aber meist zweiwertig (z. B. O in H_2O). Es hat also ein Atom diejenige Wertigkeit, die der Nummer der Vertikalreihe, in der es steht, entspricht, oder diejenige, die sich ergibt, wenn man diese Nummer von acht abzieht. Diesen beiden Arten der Wertigkeit kommt also ein polar entgegengesetzter Charakter zu (positive und negative Wertigkeit). Hierfür gibt die BOHRsche Theorie eine anschauliche Deutung.

Die chemische Wertigkeit offenbart sich beim Zusammentritt der Atome zu Molekülen. Es sind zwei Arten von Molekülen zu unterscheiden: Ionenmoleküle und Atommoleküle.

Die Ionenmoleküle bestehen aus positiven und negativen Ionen, also aus Atomen, welche ein oder mehrere Elektronen entweder verloren oder gewonnen haben. Infolge ihrer entgegengesetzten elektrischen Ladungen ziehen die Ionen sich gegenseitig an. Wegen des verschiedenen Vorzeichens ihrer Ladungen bilden

die Ionen eines solchen Moleküls einen elektrischen Dipol (§ 214), und das Molekül hat ein elektrisches Moment von oft beträchtlicher Größe. Als einen einfachen Fall betrachten wir das Kochsalz, NaCl, in dampfförmigem Zustande. (Im festen, kristallinischen Zustande kann man häufig nicht von Molekülen im eigentlichen Sinne reden, vgl. § 528.) Aus dem elektrochemischen Äquivalent (§ 269) des Na folgt, daß das Na als Ion mit einem einzigen positiven elektrischen Elementarquantum geladen ist. Ebenso ist das Cl mit einem einzigen negativen Elementarquantum geladen. Die zwischen diesen beiden Ionen bestehende Anziehung ist es, die die chemische Bindung im NaCl-Molekül bewirkt.

Wenn aber das Na-Atom in dieser Verbindung mit einem positiven Elementarquantum geladen ist, so ist das nur so möglich, daß es ein Elektron, und zwar sein einziges äußeres Elektron, abgegeben hat. Und entsprechend muß das Cl-Atom ein zusätzliches Elektron, das seinen negativen Ladungsüberschuß bewirkt, in seine äußere Elektronenschale aufgenommen haben. Dieser Vorgang aber hat für beide Atome ähnliche Folgen. Beim Na hat er den vollständigen Abbau der äußeren Elektronenschale — die ja nur aus einem Elektron besteht — bewirkt. Die nunmehr äußerste Schale besteht aus acht Elektronen. Das Na ist dem Edelgas Neon ähnlich geworden. Beim Cl aber hat das neu aufgenommene Elektron den Aufbau der bisher aus sieben Elektronen bestehenden äußeren Schale zu einer „Achterschale" bewirkt. Das Cl ist dem Edelgas Argon ähnlich geworden.

In genau entsprechender Weise erfolgt beim Eintritt eines zweiwertigen Atoms in ein Ionenmolekül die Abgabe oder Aufnahme von zwei Elektronen, also wieder ein Abbau oder Aufbau der äußeren Elektronenschale, der zu einem edelgasähnlichen Zustande führt. Ebenso erklären sich die höheren Wertigkeiten.

Man kann dieses Verhalten so beschreiben, daß die Natur denjenigen Zustand bevorzugt, in dem sich die Edelgase befinden. Eine Erklärung dafür liefert das PAULI-Prinzip (§ 515). In dieser Bevorzugung des edelgasähnlichen Zustandes, der sich ja auch beim Aufbau der Atome darin äußert, daß jeweils nach Erreichung eines edelgasähnlichen Zustandes der Aufbau einer neuen Elektronenschale einsetzt (§ 501), liegt auch die Erklärung für die chemische Trägheit der Edelgase. Da ihr normaler, elektrisch neutraler Zustand bereits der bevorzugte ist, haben sie im allgemeinen keine Veranlassung, Elektronen abzugeben oder aufzunehmen, sich also elektrisch zu laden. Und damit entfallen bei ihnen die zum Aufbau eines Ionenmoleküls erforderlichen äußeren elektrischen Kräfte.

Damit haben wir eine höchst einfache Erklärung der chemischen Wertigkeit gewonnen: Die Wertigkeit ist entweder gleich der Zahl der äußeren Elektronen oder gleich der Differenz dieser Zahl gegen die Zahl der äußeren Elektronen des nächstfolgenden Edelgases.

Die besondere Stellung des edelgasähnlichen Zustandes macht es verständlich, daß ein in diesen Zustand gebrachtes Atom bzw. Ion die Tendenz hat, in ihm zu verharren. So kommt es auch, daß bei der Elektrolyse die Ionen — z. B. das positive Na-Ion einer NaCl-Lösung — erst wieder chemisch reaktionsfähig werden, wenn sie sich an einer der Elektroden durch Aufnahme bzw. Abgabe eines Elektrons oder bei mehrwertigen Ionen mehrerer Elektronen in elektrisch neutrale Atome zurückverwandelt haben. Das Natrium reagiert mit dem Wasser nicht, solange es im edelgasähnlichen Ionenzustand ist.

Die Bildung eines Ionenmoleküls erfolgt also so, daß die zusammentretenden Atome Elektronen austauschen, indem ein oder mehrere Elektronen aus dem Verband der einen Komponente in den der andern übergehen. Bei den Atom-

molekülen hingegen findet eine Bildung einer oder zweier, den Atomen des Moleküls gemeinsamer Elektronenschalen aus ihren äußeren Elektronen statt. Es bildet sich dabei eine Anordnung dieser äußeren Elektronen aus, die derjenigen bei einem Atom gleicht. So haben z. B. die beiden Bestandteile des Kohlenoxyd-Moleküls (CO) zusammen zehn äußere Elektronen. Von diesen bilden wahrscheinlich acht eine innere, zwei eine äußere Elektronenschale, welche beide Atomrümpfe gemeinsam umschließen, so daß ein Gebilde entsteht, das im äußeren Aufbau den Atomen der Erdalkalien (zweite Vertikalreihe, also zwei äußere Elektronen) ähnlich ist. Hierfür sprechen auch spektroskopische Gründe. Im allgemeinen haben auch diese Moleküle, wie die Ionenmoleküle, ein elektrisches Moment, weil die elektrischen Ladungen der Atomreste nicht gleich groß sind. Z. B. trägt beim CO-Molekül, wie man leicht nachrechnen kann, der C-Rest $6 - 2 = 4$, der O-Rest $8 - 2 = 6$ Elementarquanten. Einen besonderen Fall unter den Atommolekülen bilden die Moleküle der elementaren Gase, wie H_2, N_2, O_2. Ihre Atomreste sind einander gleich, und ihre gemeinsame Elektronenschale liegt zu ihnen symmetrisch. Daher haben sie kein elektrisches Moment, denn die Schwerpunkte ihrer positiven und negativen Ladungen fallen genau zusammen. Aber das Bildungsprinzip ist das gleiche wie bei den anderen Atommolekülen. So hat das Stickstoffmolekül N_2, wie das besprochene CO, zehn äußere Elektronen, nämlich je fünf von jedem der beiden Atome (fünfte Vertikalreihe), und es ist wahrscheinlich, daß sie sich etwa ebenso aufbauen wie diejenigen des CO-Moleküls. Für die Richtigkeit dieser Anschauung spricht, daß sich die N_2- und die CO-Moleküle in fast allen ihren Konstanten, z. B. bezüglich der Struktur ihrer Spektren, weitgehend ähnlich verhalten. Über die Kräfte, die die Komponenten der Atommoleküle aneinander binden, hat erst die Wellenmechanik (§ 514) Aufschluß gegeben. Ein besonders schöner Erfolg in dieser Richtung liegt bereits beim Wasserstoffmolekül vor.

Die Herstellung des bevorzugten edelgasähnlichen Zustandes kann natürlich bei jedem Molekül auf zwei Arten erreicht werden, entweder durch Abbau oder durch Aufbau. Es ist begreiflich, daß meist derjenige Weg bevorzugt wird, bei dem das Ziel am einfachsten erreicht wird, also bei den linken Vertikalreihen durch Abbau, bei den rechten durch Aufbau, und daß bei den mittleren Vertikalreihen, wo die beiden Wege nicht so sehr verschieden sind, in besonderem Maße die Tendenz bestehen wird, entweder den einen oder den andern Weg zu gehen (Auftreten positiver oder negativer Wertigkeit).

Bei den Ionenmolekülen hat die elektrische Ladung der beiden Komponenten entgegengesetztes, bei den Atommolekülen gleiches Vorzeichen. (Die Kompensation ihrer positiven Überschußladungen liegt in der negativen Ladung ihrer gemeinsamen Elektronenschalen.) Man nennt daher die Ionenmoleküle auch heteropolare, die Atommoleküle homöopolare Moleküle.

503. **Die Linienspektren und das periodische System.** Wir sind nunmehr in der Lage, eine Reihe von weiteren Eigenschaften der Linienspektren zu verstehen. Die sog. optischen, d. h. die im kurzwelligen ultraroten, im sichtbaren und ultravioletten Gebiet liegenden Linienspektren entstehen durch Quantensprünge der Elektronen in der äußeren Elektronenschale. Die Elektronen der inneren Schalen sind daran nicht beteiligt. Diese äußeren Elektronen stehen nicht allein unter der anziehenden Wirkung des Atomkerns, sondern auch unter der abstoßenden Wirkung der Elektronen der inneren Schalen, welche mit ihrer negativen Ladung die positive Kernladung wenigstens zum Teil kompensieren. Die Alkalimetalle sind daher in gewissem Sinne „wasserstoffähnlich" (§§ 498 und 499), indem ihr einziges äußeres Elektron unter der Wirkung eines Kerns steht, dessen aus z Elementarquanten bestehende Ladung durch $z - 1$ Elektronen bis

zu einem gewissen Grade kompensiert wird. Daß der Kern nebst den inneren Elektronen nicht genau wie ein einfach geladener Wasserstoffkern wirkt, also die Spektren der Alkalimetalle dem des Wasserstoffs nicht genau gleich sind, rührt nach der ursprünglichen Vorstellung von Bohr u. a. daher, daß das äußere Elektron auf seiner Bahn unter Umständen in die inneren Elektronenschalen eintauchen kann. Doch ähneln die Alkalispektren dem des Wasserstoffs immerhin insofern, als sie verhältnismäßig einfach gebaut sind (Abb. 474, 475, 476). Mit der Zahl der äußeren Elektronen wächst die Kompliziertheit und der Linienreichtum (die Multiplizität, § 499) der Spektren. Die am rechten Ende jeder Horizontalreihe stehenden Edelgase haben — mit Ausnahme des einfach gebauten Heliums — überaus komplizierte Spektren.

Neben den von den elektrisch neutralen Atomen herrührenden Spektren — den Bogenspektren, weil sie z. B. im elektrischen Lichtbogen erzeugt werden können — besitzen die Atome noch weitere Spektren, die Funkenspektren, zu deren Hervorbringung man sich der Funkenentladung bedienen kann. Dies sind Spektren der ionisierten Atome. Man unterscheidet das 1., 2. Funkenspektrum usw., je nachdem es sich um Atome handelt, denen ein oder zwei Elektronen fehlen usw. Fehlt einem Atom ein Elektron, so ähnelt es in seinem Aufbau dem ihm unmittelbar vorhergehenden Element, nur ist die Kernanziehung stärker. So ist z. B. das einfach ionisierte Magnesium Mg^+ (12) dem elektrisch neutralen Natrium (11) ähnlich. Das zweifach ionisierte Mg^{++} dem Neon (10). Einen derartigen Fall haben wir bereits beim einfach ionisierten Helium He^+ besprochen, das dem Wasserstoff ähnlich ist. Diese Ähnlichkeit im Aufbau hat zur Folge, daß das 1. Funkenspektrum eines Elements, wenn auch nicht in allen Einzelheiten, so doch im allgemeinen Charakter, vor allem in der Multiplizität der Linien, dem Bogenspektrum des nächstvorhergehenden Elements ähnlich, aber wegen der stärkeren Kernanziehung nach kürzeren Wellen verschoben ist. Das 2. Funkenspektrum ähnelt dem 1. Funkenspektrum des unmittelbar vorhergehenden Elements und dem Bogenspektrum des um zwei Stellen vorhergehenden Elements usw. (spektroskopischer Verschiebungssatz).

504. Die Röntgenspektren. Bei den optischen Spektren handelt es sich stets um Sprünge eines der äußeren Elektronenschale angehörenden Elektrons von einer Energiestufe auf eine andere. Die Röntgenspektren hingegen rühren von Quantensprüngen her, die zwischen den einzelnen inneren Elektronenschalen erfolgen. Röntgenstrahlung kommt so zustande, daß ein einer inneren Schale, z. B. der K-Schale, angehörendes Elektron durch irgendeine äußere Einwirkung, z. B. durch den Aufprall eines von außen auf das Atom treffenden, schnell bewegten Elektrons, aus der Schale entfernt und ganz aus dem Atom heraus befördert wird. Damit ist das Gleichgewicht des Atoms gestört.

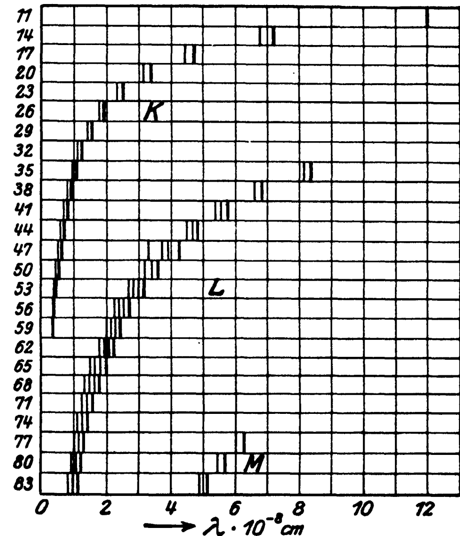


Abb. 480. Schema der K-, L- und M-Serie, in Abhängigkeit von der Ordnungszahl.

Es kann auf verschiedene Weise wiederhergestellt werden. Entweder fällt das herausgeworfene Elektron selbst, indem es seine erhöhte Energie in Form von

Röntgenstrahlung wieder abgibt, auf seinen alten Platz zurück, oder aber es fällt zunächst ein Elektron einer andern Schale, z. B. der L-Schale, auf den frei gewordenen Platz und wird durch das herausgeworfene Elektron oder ein Elektron aus einer der weiter außen liegenden Schalen ersetzt usw. Je mehr Elektronenschalen das betreffende Atom besitzt, desto mehr verschiedene Möglichkeiten gibt es, wie das elektrische Gleichgewicht wiederhergestellt werden kann, und um so größer ist auch die Zahl der Spektrallinien, die durch solche Prozesse hervorgerufen werden können. Denn alle diese verschiedenen Übergänge entsprechen verschiedenen Energiedifferenzen, also auch verschiedenen Schwingungszahlen der ausgesandten Strahlung. Als K-Serie bezeichnet man diejenigen

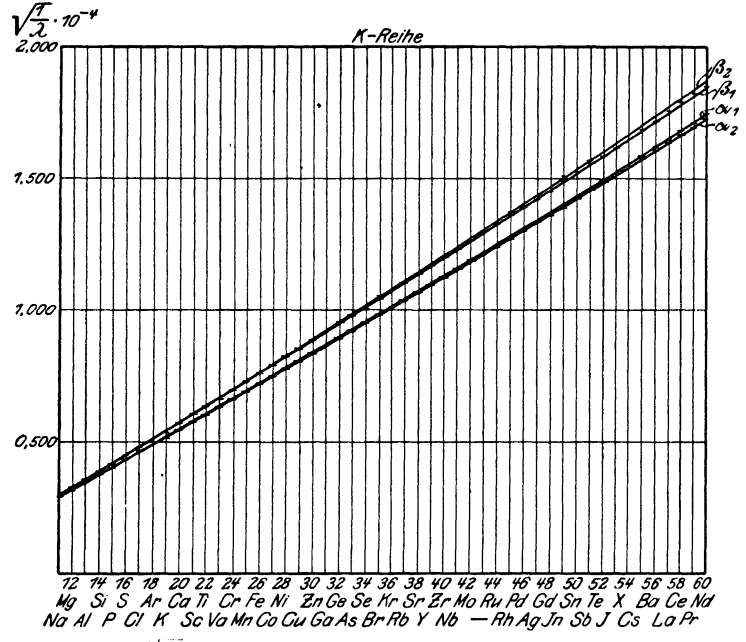


Abb. 481. $\sqrt{1/\lambda}$ in der K-Serie als Funktion von z (MOSELEYsches Gesetz).

Schwingungszahlen, die Sprüngen ihr Auftreten verdanken, die auf dem K-Niveau endigen, und entsprechend ist die L-Serie, die M-Serie usw. definiert. Die K-Serie hat die größte Schwingungszahl (härteste Strahlung). Natürlich kommt eine bestimmte Serie nur bei solchen Atomen vor, bei denen die betreffende Schale bereits ausgebildet ist. Die Zahl der Röntgenserien nimmt also in jeder Horizontalreihe des periodischen Systems um eine zu.

Wie zuerst MOSELEY experimentell gefunden hat, zeichnen sich die Röntgenspektren vor den optischen Linienspektren dadurch aus, daß sie nicht die ausgesprochene Periodizität zeigen, die jene, entsprechend der Stellung des Atoms im periodischen System, haben. Vielmehr ist der Gang bei steigender Ordnungszahl so, daß sich die Linien der Röntgenspektren weitgehend regelmäßig in Richtung kleinerer Wellenlängen, d. h. höherer Schwingungszahlen, verschieben (Abb. 480). MOSELEY fand, daß die Wurzeln der Schwingungszahlen ν bzw. der Wellenzahlen $N = 1/\lambda$ der einzelnen Serienlinien der Ordnungszahl z der einzelnen Atomarten proportional sind. Insbesondere gilt dies sehr genau für die K-Serie. In Abb. 481 sind die Ergebnisse derartiger Messungen wiedergegeben. Sie zeigen, daß das MOSELEYsche Gesetz in der Tat vorzüglich erfüllt ist. Abb. 481 bezieht sich auf vier, mit α_1, α_2, β_1, β_2 bezeichnete Linien der K-Serie.

Abb. 482 und 483 zeigen das geschilderte Verhalten an einigen Spektren der *K*- und *L*-Serie von Elementen, die im periodischen System aufeinanderfolgen.

Es war ein großer Erfolg der BOHRschen Atomtheorie, daß sie sofort imstande war, eine Deutung des MOSELEYschen Gesetzes zu geben. Es erklärt sich auf Grund der Tatsache, daß die Röntgenspektren — insbesondere die *K*-Serie — von Elektronen der innersten Schalen herrühren, welche fast ausschließlich der Anziehung durch die Kernladung unterliegen, von den weiter außen liegenden Elektronen aber wenig oder gar nicht beeinflußt werden. Die Röntgenspektren sind daher weitgehend wasserstoffähnlich (§ 498). Die Energie der Elektronen und die Größe der Röntgenspektralterme hängt daher in der *K*-Serie fast nur von der Kernladung $z\varepsilon$ ab und ist entsprechend Gl. 22, § 498, z^2 proportional. Und daher wächst auch die Schwingungszahl mit wachsender Ordnungszahl.

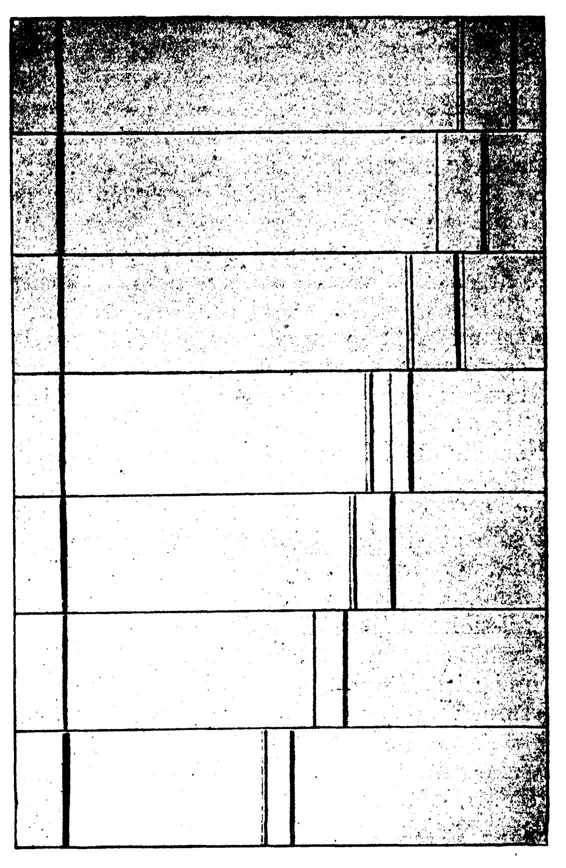


Abb. 482. *K*-Serie.

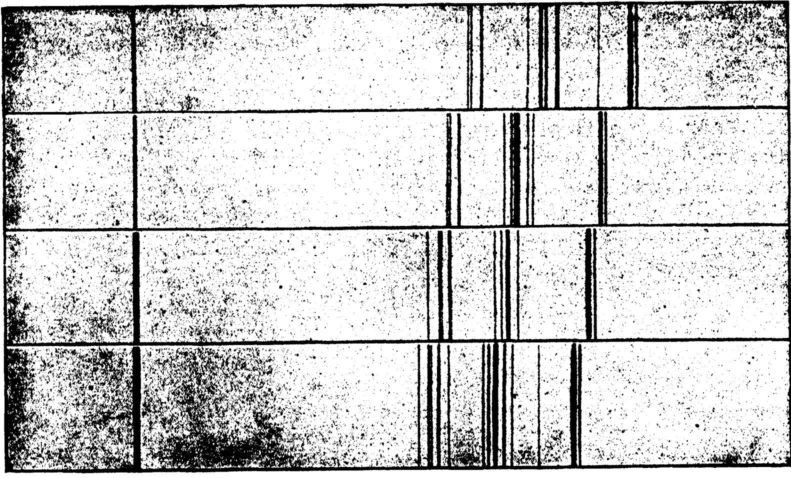


Abb. 483. *L*-Serie.

Die einfachen Gesetzmäßigkeiten der Röntgenspektren erlauben, die Röntgenspektren noch unbekannter Elemente vorauszuberechnen, was im optischen Ge-

biet meist nicht möglich ist. Es ist auf diese Weise gelungen, einige der chemisch bis dahin noch nicht nachgewiesenen Elemente (Hafnium, Masurium, Rhenium) auf Grund ihrer vorausberechneten Röntgenspektren zu entdecken, indem man systematisch die in Frage kommenden Mineralien auf das Auftreten der erwarteten Spektren untersuchte. Nachdem dies mit Erfolg geschehen war, konnte dann auch die chemische Trennung durchgeführt werden.

Da die Energien der der gleichen inneren Schale angehörenden Elektronen einander nicht genau gleich sind, so zeigen auch die Röntgenspektren eine Aufspaltung (Abb. 482 und 483, vgl. § 499). Im übrigen gilt überhaupt für die Röntgenspektren im wesentlichen das gleiche, was oben über die optischen Spektren gesagt worden ist, indem auch ihre Schwingungszahlen sich wegen ihrer Herkunft von Quantensprüngen als Termdifferenzen darstellen. Die Kenntnis dieser Terme gibt uns wieder Kenntnis von den Energiestufen und damit vom Atombau, in diesem Falle vom Bau der inneren Elektronenschalen.

505. Rotationsschwingungsspektren. Sofern die Moleküle ein elektrisches Moment haben, sie also Ionenmoleküle sind (§ 502), führen die quantenhaften Änderungen ihres Rotationszustandes zur Aussendung einer Strahlung, des Rotationsspektrums. Dieses liegt wegen der Kleinheit der vorkommenden Energiedifferenzen und daher auch der Werte von $h\nu$ stets im äußersten Ultrarot und ist daher nur in wenigen Fällen, z. B. beim Wasserdampf, der Beobachtung unmittelbar zugänglich. Und auch dann nicht als Emission von Strahlung, sondern nur durch den umgekehrten Vorgang, nämlich durch die an den gleichen Stellen des Spektrums auftretende Absorption im kontinuierlichen Spektrum einer durch die betreffende Substanz hindurchgesandten fremden Strahlung (vgl. das KIRCHHOFFsche Gesetz, § 481).

Auch die Atomschwingungen, d. h. die Schwingungen, die die einzelnen Atome eines Moleküls um ihre natürliche Ruhelage im Molekül ausführen können, führen bei Molekülen mit einem elektrischen Moment zur Aussendung einer Strahlung, welche auch im langwelligen Ultrarot, aber bereits in einem experimentell leichter zugänglichen Gebiet liegt. Diese Schwingungen sind daher durch die an den betreffenden Stellen des Spektrums auftretenden Absorptionslinien in zahlreichen Fällen nachweisbar. Quantenhafte Änderungen der Atomschwingung sind stets verbunden mit quantenhaften Änderungen des Rotationszustandes. Die Quantenhaftigkeit des Vorgangs kommt daher bei diesen Rotationsschwingungsspektren in doppelter Weise ins Spiel und bewirkt, daß die Zahl der möglichen Energiestufen und daher auch der Quantensprünge und Schwingungszahlen sehr groß ist. Diese Spektren haben daher einen recht komplizierten Charakter. Man kann aus ihnen nicht nur Aufschluß über die Atomschwingungen und ihre Energiestufen, sondern auch über die Rotationen und damit über die Trägheitsmomente der Moleküle gewinnen. Auch sie tragen daher zu unserer Kenntnis vom Molekülbau erheblich bei.

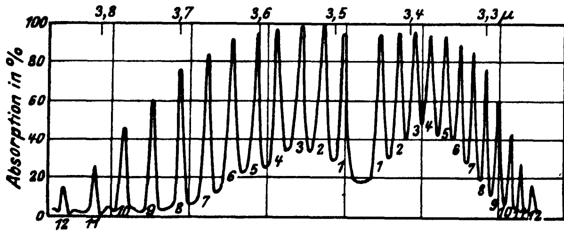


Abb. 484. Rotationsschwingungsspektrum des HCl zwischen 3,2 und 3,9 μ nach IMES.

Abb. 484 gibt Messungen des Rotationsschwingungsspektrums des Chlorwasserstoffs in Absorption wieder. Das Spektrum ist mit einem Reflexionsgitter und einer Thermosäule aufgenommen. Jede der zahlreichen Zacken der Kurve entspricht einer Absorptionslinie des HCl. Es handelt sich

bei jeder dieser Absorptionslinien um den gleichen Sprung in der Atomschwingung, doch ist dieser in jedem Fall mit einem anderen Sprung in der Rotation verbunden. Auffallend ist die Lücke zwischen den beiden mit der Zahl 1 bezeichneten Linien. Der Ausfall rührt daher, daß ein Zustand, bei dem das Molekül überhaupt nicht rotiert, praktisch nicht vorkommt. Abb. 485 zeigt einen Teil einer anderen Bande des HCl in viel stärkerer Auflösung. Auf Einzelheiten dieser Abbildung kommen wir in § 517 zurück.

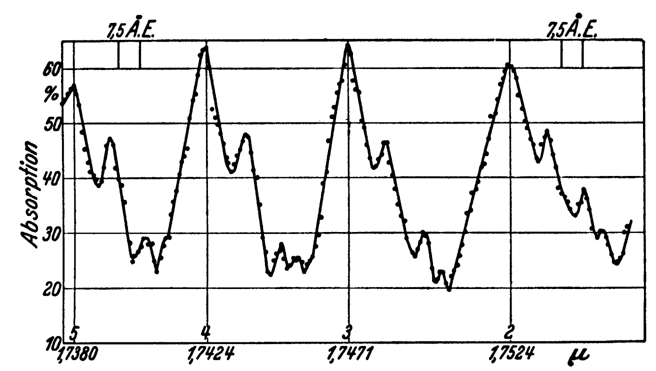


Abb. 485. Rotationsschwingungsspektrum des HCl zwischen 1,738 und 1,755 μ nach HETTNER und BÖHME.

506. Bandenspektren. Während die Linienspektren ihren Ursprung stets einzelnen Atomen (d. h. einatomigen Molekülen oder Ionen) verdanken, senden die mehratomigen Moleküle stets Bandenspektren aus. Diese werden daher auch Molekülspektren genannt. Die charakteristischen Eigenschaften der Bandenspektren, von denen Abb. 486 ein Beispiel zeigt, beruhen darauf, daß der jeweilige Zustand eines mehratomigen Moleküls nicht nur durch den Quantenzustand bestimmt wird, in dem sich sein Leuchtelektron (§ 499) befindet, sondern auch durch die ebenfalls quantenhafte Rotations- und Atomschwingungsenergie (§ 505). Daher kommen zu den Quantenzahlen des Leuchtelektrons im einfachen Falle der zweiatomigen Moleküle noch zwei weitere Quantenzahlen hinzu, eine für die Rotation des Moleküls um seine Hauptträgheitsachse, eine zweite für die Schwingung der Atome des Moleküls gegeneinander. Bei einem Lichtemissions- oder Absorptionsprozeß erfolgt im allgemeinen eine Zustandsänderung des Moleküls



Abb. 486. Ausschnitt aus dem Bandenspektrum des Jod.

in seinen sämtlichen Quantenzahlen zugleich. Die Zahl der möglichen Zustände und Zustandsänderungen ist also außerordentlich groß. An die Stelle einer einzelnen Spektrallinie tritt ein ganzes System von Einzelbanden. Alle diese Einzelbanden sind mit dem gleichen Elektronenquantensprung verknüpft, aber jede von ihnen entspricht einem anderen Quantensprung in der Atomschwingung. (Zum Verständnis dessen, was unter einer Einzelbande zu verstehen ist, sei bemerkt, daß in der Abb. 486 neun Einzelbanden zu sehen sind.) Die einzelnen Linien jeder Einzelbande entstehen durch verschiedene Quantensprünge in der Rotation, die mit dem gleichen Elektronsprung und dem gleichen Sprung der Atomschwingung verbunden sind.

Bei den heteropolaren Molekülen (§ 502), deren Leuchtelektron sich im Grundzustand (niedrigste Quantenzahl) befindet, kann eine von Lichtemission oder Lichtabsorption begleitete Änderung ihres Rotations- und Schwingungszustandes allein, also ohne einen gleichzeitigen Elektronensprung erfolgen. Das führt zu den in § 505 besprochenen Rotationsschwingungsspektren. Bei den homöopolaren Molekülen aber gibt es keine mit Lichtemission oder Lichtabsorption verbundenen Änderungen dieser Zustände allein. Bei diesen ist eine solche nur dann energetisch an der Lichtemission oder Lichtabsorption beteiligt, wenn gleichzeitig ein Quantensprung des Leuchtelektrons erfolgt. Die Schwingungszahlen ν in den Bandenspektren sind daher gegeben durch die algebraischen Summen der drei gleichzeitigen Energiesprünge. Es seien bei einem Absorptionsvorgang E_e und E'_e die Energie des Elektrons vor und nach dem Sprung, ebenso die Energien der Atomschwingung E_s und E'_s und die der Rotation E_r und E'_r. Dann sind die Schwingungszahlen ν der Linien im Spektrum dieses Moleküls durch die Gleichung

$$h\nu = (E'_e - E_e) + (E'_s - E_s) + (E'_r - E_r) \qquad (25)$$

gegeben (vgl. Gl. 7, § 494). Dabei können alle Energiestufen eine Fülle verschiedener Werte annehmen, wodurch sich der große Linienreichtum der Bandenspektren erklärt. Die Energiestufenunterschiede der Elektronen sind sehr viel größer, als diejenigen der Rotation und der Atomschwingungen. Daher liefern die Elektronensprünge (erste Klammer der Gl. 25) den überwiegenden Anteil der Energie $h\nu$, und die Bandenspektren liegen ebenso wie die Atomspektren im kurzwelligen Ultrarot, im sichtbaren und ultravioletten Gebiet. Die Atomschwingungen liefern wieder größere Energiedifferenzen als die Rotationen. Von den Atomschwingungen rührt daher das Auftreten einzelner Teilbanden her (zweite Klammer der Gl. 25), die ohne das Hinzutreten der Rotationssprünge nur aus je einer Linie bestehen würden. Die sehr kleinen Energiesprünge der Rotationen (dritte Klammer der Gl. 25) liefern schließlich die Aufspaltung der Teilbanden in eine große Zahl von Linien.

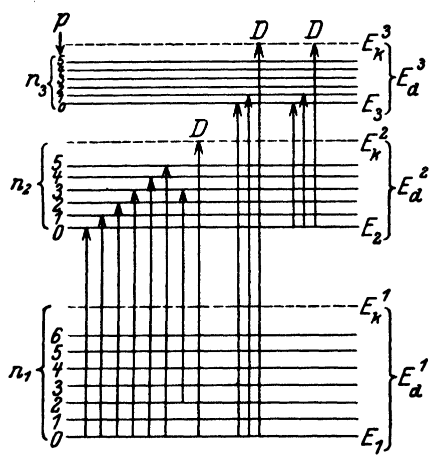


Abb. 487. Termschema eines Moleküls unter Vernachlässigung der Rotation. n_1, n_2 usw. Quantenzahlen des Elektrons, p_1, p_2 usw. Quantenzahlen der Atomschwingung.

507. Bandenspektren und Chemie. Die Kenntnis der Bandenspektren hat unter anderem große Bedeutung dadurch erlangt, daß sie der Chemie sehr wichtige Ergebnisse liefert. Ebenso wie aus den experimentell schwer zugänglichen Rotationsschwingungsspektren (§ 505) kann man aus den viel bequemer zugänglichen und viel genauer ausmeßbaren Bandenspektren Aufschluß über das Trägheitsmoment der leuchtenden Moleküle gewinnen. Man kennt die Masse der einzelnen Atome, und so kann man aus dem Trägheitsmoment wenigstens bei den zweiatomigen Molekülen ohne weiteres den gegenseitigen Abstand der Atome im Molekül berechnen. [Auf Grund von §§ 34 und 36 findet man leicht, daß die Beziehung besteht $J = m_1 m_2 a^2/(m_1 + m_2)$, wenn J das Trägheitsmoment des Moleküls um eine senkrecht zur Verbindungslinie der beiden Atome liegende und durch den gemeinsamen Schwerpunkt beider gehende Achse, m_1 und m_2 die Massen der beiden Atome und a ihren Abstand bedeuten.] Für die Chemie ist

aber ein weiteres noch wichtiger. Wenn wir einmal von der durch die Rotation gegebenen feinen Struktur der Einzelbanden absehen, so gibt Abb. 487 eine einfache schematische Darstellung der Terme eines Moleküls, entsprechend dem in Abb. 471 (§ 496) für das Wasserstoffatom gegebene Schema. E_1 sei der Grundzustand, E_2, E_3 usw. seien angeregte Zustände des Leuchtelektrons ($n_1 < n_2 < n_3$). Jedem von ihnen überlagert sich die große Zahl der Energiestufen der Atomschwingung, deren jede einer Einzelbande entspricht. Aber diese können nicht beliebig große Werte annehmen, ohne daß der Zusammenhang des Atoms zerstört wird. Es entspricht dies durchaus der Tatsache, daß die Elektronen der Atome beim Erreichen einer bestimmten Energiestufe, der Ionisierungsenergie, vom Atom losgelöst werden, das Atom ionisiert wird. Die Ionisierungsarbeit steht, wie wir in § 500 gezeigt haben, in einem nahen Zusammenhang mit der Lage der Seriengrenze. Der Ionisierungsarbeit beim Elektron eines Atoms entspricht nun in unserem Falle die zur Trennung der Atome eines Moleküls voneinander nötige Arbeit, die Dissoziationsarbeit des Moleküls. Ebenso wie man die Ionisierungsarbeit aus dem Term der Seriengrenze der Atomspektren berechnen kann, so kann man nach FRANCK aus den Bandenspektren die Dissoziationsarbeit der Moleküle berechnen, nämlich aus derjenigen Stelle im Termschema, auf die hin die Energiestufen der Atomschwingung konvergieren. Wird diese Energiestufe überschritten, so hört das Molekül als solches zu existieren auf, seine Atome trennen sich voneinander. In der Abb. 487 bedeuten die mit E_k^1, E_k^2, E_k^3 usw. bezeichneten Energieniveaus die Konvergenzstellen der Schwingungsquantenzahl. Daher entsprechen die mit D bezeichneten Pfeile solchen Quantensprüngen, bei denen eine Dissoziation des Moleküls eintritt.

Springt der Quantenzustand des Moleküls z. B. vom Grundniveau E_1 auf das Niveau E_k^2, so entfällt von der Energiedifferenz $E_k^2 - E_1$ der Anteil $E_2 - E_1$ auf den Quantensprung des Elektrons allein. Der Rest $E_k^2 - E_2$ ist die Dissoziationsarbeit. Diese ist auf den verschiedenen Niveaus etwas verschieden. Als eigentliche Dissoziationsarbeit ist die Energiedifferenz $E_d^1 = E_k^1 - E_1$ anzusehen, die man berechnen kann, wenn man das ganze Termschema des Moleküls kennt.

Hat man die Dissoziationsarbeit der einzelnen Moleküle berechnet, die natürlich gleich derjenigen Energie ist, die bei der Bildung des Moleküls frei wird, so hat man diese Arbeit nur mit der Zahl der Moleküle im Mol, der LOSCHMIDTschen Zahl (§ 96) zu multiplizieren, um die Wärmetönung (§ 203) zu finden, die bei der Bildung von einem Mol der betreffenden Substanz auftritt. Es ist demnach möglich, die oft auf andere Weise schwer genau berechenbare Wärmetönung chemischer Prozesse aus den Bandenspektren zu ermitteln, und zwar mit der sehr großen Genauigkeit, die spektroskopischen Messungen zukommt. In der Tabelle 35 sind die spektroskopisch gemessenen Dissoziationsarbeiten pro Mol für eine Anzahl von Molekülen mit den kalorimetrisch bestimmten Werten zusammengestellt.

Tabelle 35. Dissoziationsarbeiten, spektroskopisch und kalorimetrisch bestimmt.

Molekül	Dissoziationsarbeit spektroskopisch kcal	Dissoziationsarbeit kalorimetrisch kcal
H_2	100,5	70—100
S_2	113	90
Cl_2	57,0	57
Br_2	45,2	46
J_2	35,2	34,5
NO	182	191
CO	254	250
KCl	105	103

508. Fluoreszenz. Bei der Fluoreszenz (§ 487) wird die Energie $h\nu$ eines Lichtquants von einem Molekül absorbiert und dient zur Hebung des Leuchtelektrons auf eine höhere Energiestufe, aus der es dann unter Aussendung von Strahlung wieder zurückfallen kann, sei es unmittelbar in den Grundzustand, sei es auf dem Wege über dazwischen liegende Energiestufen. Wird einem Molekül diejenige Energie $h\nu$ zugeführt, die gerade ausreicht, um das Leuchtelektron

aus dem Grundzustand in den untersten angeregten Zustand zu überführen, so kann es nur unmittelbar wieder in den Grundzustand zurückkehren, strahlt dabei die gewonnene Energie wieder aus, und das Fluoreszenzlicht hat die gleiche Wellenlänge wie das erregende Licht. Das ist z. B. der Fall, wenn man Quecksilberdampf mit dem Licht der betreffenden Linie seines Spektrums bestrahlt. Man nennt dies wegen einer äußerlichen Ähnlichkeit mit der mechanischen Resonanz Resonanzstrahlung.

Durch die Quantentheorie findet das Stokessche Gesetz, welches besagt, daß die Wellenlänge der Fluoreszenzstrahlung fast stets größer ist als die der erregenden Strahlung, seine einfache Deutung. Es erweist sich nämlich als eine Folge aus dem Energieprinzip. Hat die erregende Strahlung die Schwingungszahl ν, also jedes ihrer Lichtquanten die Energie $h\nu$, so kann die Energie $h\nu'$ der erregten Strahlung, sofern sie lediglich aus der der erregenden stammt, nicht größer sein. Es folgt also $\nu' \leq \nu$ bzw. $\lambda' \geq \lambda$, wie es das Stokessche Gesetz behauptet.

Aber auch die Ausnahmen (sog. antistokessche Linien) lassen sich erklären, bei denen die erregte Schwingung kurzwelliger ist als die erregende ($\nu' > \nu$). In diesen Fällen muß der Fluoreszenz noch Energie aus einer andern Quelle zufließen, um den Energiebedarf $h\nu' > h\nu$ zu decken. Wir haben oben (§ 505 u. 506) gesehen, daß bei den Molekülen in der Regel Quantensprünge der Rotation und der Atomschwingungen gleichzeitig mit einem Elektronensprung erfolgen. In Abb. 488 ist das gleiche Termschema gezeichnet wie in Abb. 487. Es werde nun von dem betreffenden Molekül ein Lichtquant $h\nu$ absorbiert, das z. B. in seiner Energie einem der Energiesprünge entspreche, die in Abb. 488 durch die aufwärts gerichteten Pfeile bezeichnet sind. Das Molekül befinde sich etwa vor der Absorption in demjenigen Zustande, der durch die Elektronenquantenzahl n_1 und die Schwingungsquantenzahl $p = 2$ gegeben ist. Infolge der Absorption verändere sich der Zustand so, daß n_1 in n_2 und p in $p = 4$ übergehe. Dann sind von dem neuen Zustand aus mehrere Übergänge in den Bereich der durch n_1 gegebenen Niveaus möglich (abwärts gerichtete Pfeile). Stellt sich bei Ausstrahlung der alte Zustand vollständig wieder her, so wird dabei auch die gleiche Energie ausgestrahlt, wie sie das eingestrahlte Quant auf das Molekül übertragen hatte. Ist nach der Ausstrahlung die der Atomschwingung verbleibende Quantenzahl größer, als sie es vor der Absorption war, so steht für die Ausstrahlung nur eine kleinere Energie zur Verfügung, als eingestrahlt wurde, die Schwingungszahl des Fluoreszenzlichtes ist daher kleiner als die der erregenden Strahlung. Ist aber die Schwingungsquantenzahl im Endzustand kleiner, als zu Anfang, in unserem Beispiel etwa $p = 0$, so steht für die Ausstrahlung mehr Energie zur Verfügung, als eingestrahlt wurde. Das Fluoreszenzlicht ist kurzwelliger als die erregende Strahlung. Es ist klar, daß antistokessche Linien nur bei Molekülen auf diese Weise auftreten können, und nur dann, wenn das Molekül bereits einen Vorrat an Schwingungsenergie besitzt (im obigen Beispiel $p = 2$).

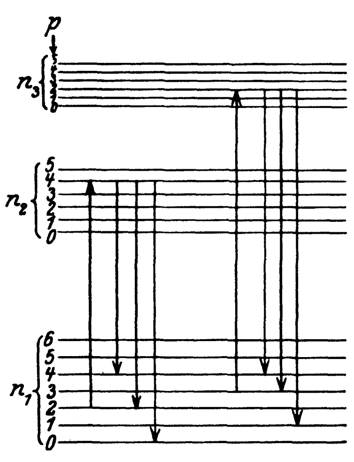


Abb. 488. Zur Theorie der Fluoreszenz.

509. Der Raman-Effekt. In engem Zusammenhange mit den Rotations- und Schwingungsspektren steht ein von dem indischen Physiker Raman (1928, ziemlich gleichzeitig auch von Mandelstam und Landsberg) entdeckter Effekt. Läßt man Licht durch eine Substanz hindurchfallen, so wird stets

ein Teil dieses Lichtes zerstreut, d. h. durch Wechselwirkungen mit den Molekülen der Substanz aus seiner Richtung abgelenkt. RAMAN beobachtete nun, daß monochromatisches Licht, das eine solche Zerstreuung erfahren hat, Änderungen seiner Wellenlänge erfährt. Neben der eingestrahlten Spektrallinie treten weitere, ihr benachbarte Linien auf. Dies erklärt sich auf folgende Weise. Bei der Wechselwirkung des einfallenden Lichtes mit den Molekülen der durchstrahlten Substanz kann es vorkommen, daß ein Teil der Energie $h\nu$ der einfallenden Lichtquanten an das Molekül abgegeben wird und einen Quantensprung der Atomschwingungen anregt. Diese Energie geht also dem gestreuten Lichtquant verloren. Seine Energie beträgt nach der Streuung nicht mehr $h\nu$, sondern $h\nu - \varepsilon$, wenn ε die an das Molekül abgegebene Energie ist, und seine Schwingungszahl beträgt nicht mehr ν, sondern $\nu' = \nu - \varepsilon/h$. Man kann also aus der Differenz $\nu - \nu'$ der Schwingungszahlen vor und nach der Zerstreuung die abgegebene Energie ε berechnen. Da diese derjenigen Energie entspricht, die zur Anregung eines Schwingungsquantensprungs am Molekül notwendig ist, so ist ε/h die diesem Sprung entsprechende Schwingungszahl. Auf diese Weise kann man das stets im Ultrarot liegende Schwingungsspektrum einer Substanz durch optische Messungen in dem viel bequemer zugänglichen sichtbaren oder ultravioletten Spektralbereich ermitteln. Übrigens kommt auch der umgekehrte Vorgang vor, daß das streuende Molekül durch einen Quantensprung, der von einem höheren zu einem niedrigeren Quantenzustand führt, Energie an das gestreute Lichtquant abgibt, so daß dessen Schwingungszahl vergrößert wird.

Der RAMAN-Effekt steht offensichtlich in einem gewissen Zusammenhange mit der Fluoreszenz. Bei der Fluoreszenz regt das eingestrahlte Licht einen Quantensprung eines Elektrons des getroffenen Atoms an. Wenn dieser Quantensprung alsdann wieder rückwärts verläuft, so kann durch Hinzukommen eines Quantensprungs der Atomschwingungen und der Rotation die Energie der wieder ausgestrahlten Quanten kleiner oder (in den selteneren Fällen) größer sein als die Energie der eingestrahlten Quanten. Es handelt sich also hier um Quantensprünge der Schwingungen und Rotationen, die durch den Elektronenquantensprung ausgelöst werden. Beim RAMAN-Effekt aber wird der Quantensprung der Schwingung und Rotation durch das eingestrahlte Quant unmittelbar erzwungen, und ein Quantensprung eines Elektrons ist nicht im Spiel.

510. **Chemische Wirkungen des Lichts (Photochemie).** Lichtwirkungen haben häufig einen wesentlichen Einfluß auf das Zustandekommen chemischer Wirkungen. So verbindet sich z. B. ein Gemisch von gleichen Teilen Chlor und Wasserstoff (Chlorknallgas) im Dunkeln nicht, bei Zutritt von direktem Tageslicht bildet sich unter explosionsartigen Erscheinungen Salzsäure (HCl). Unter der Wirkung kurzwelliger Strahlung entsteht in Sauerstoff (O_2) Ozon (O_3).

Von besonderer Wichtigkeit ist die Anwendung der chemischen Wirkung des Lichts in der Photographie, denn darauf beruht die Festhaltung des Bildes auf der Platte. In der Gelatineschicht einer photographischen Platte befindet sich Bromsilber (AgBr). Von diesem zerfällt unter der Wirkung des Lichts ein kleiner Bruchteil, um so mehr, je stärker die Lichtwirkung ist. In der Entwicklerflüssigkeit setzt sich dieser Prozeß an den belichteten Stellen fort, so daß in der Schicht metallisches Silber ausgeschieden wird, welches infolge seiner feinen Verteilung schwarz aussieht. Die Schicht wird also um so dunkler, je stärker sie belichtet war. Im Fixierbad wird das nicht zersetzte Bromsilber aus der Schicht entfernt. Auf der Platte erscheint jetzt das „Negativ", d. h. das Bild unter Umkehrung aller Helligkeitswerte. Legt man jetzt auf die Schichtseite der Platte ein mit einem lichtempfindlichen Silbersalz bedecktes Papier und belichtet dieses durch die Schicht hindurch (Kopieren), so entsteht auf diesem wieder ein Bild

(Positiv), in dem die Helligkeitswerte erneut umgekehrt sind, so daß sie nunmehr dem abgebildeten Gegenstand entsprechen.

Bei den photochemischen Prozessen wird Lichtenergie absorbiert und liefert so die zum Zustandekommen eines chemischen Prozesses nötige Energie. Das photochemische Grundgesetz sagt aus, daß die Absorption in einzelnen Lichtquanten $h\nu$ durch einzelne Moleküle erfolgt. Dann folgt aus dem Energieprinzip, daß eine photochemische Wirkung nur dann eintreten kann, wenn die Energie $h\nu$ gleich oder größer ist als diejenige Wärmetönung (§ 203), die bei diesem Prozeß auf jedes einzelne Molekül entfällt. Um einen bestimmten photochemischen Prozeß zu bewirken, darf daher das Licht eine bestimmte Wellenlänge nicht überschreiten, da sonst die Energie nicht ausreicht. So wird verständlich, weshalb kurzwellige Strahlung (Ultraviolett, Röntgenstrahlen) eine viel stärkere photochemische Wirkung zeigt, als das sichtbare Licht. Die obenerwähnte Chlorknallgasreaktion ist übrigens nicht auf diese einfache Weise zu verstehen. Vielmehr schließt sich an die Absorption eines Lichtquants durch ein Cl_2-Molekül und die dadurch bewirkte Dissoziation desselben in seine beiden Komponenten eine Kette von Folgereaktionen, wahrscheinlich unter notwendiger Beteiligung von Spuren von Wasserdampf, und die Ausbeute ist außerordentlich viel größer, als dem Grundgesetz entspricht.

Die wichtigste photochemische Reaktion in der Natur ist die Kohlensäureassimilation in den Pflanzen, die — von wenigen primitiven Organismen abgesehen, — alle Lebewesen mit der zu ihrer Existenz notwendigen Energie versorgt (die Fleischfresser auch, auf dem Wege über ihre pflanzenfressenden Beutetiere). Das Blattgrün (Chlorophyll) absorbiert Lichtenergie der Sonne, und diese Energie bewirkt die Verwandlung von Kohlensäure und Wasser in Zucker und Sauerstoff, indem sie den für diesen endothermen Prozeß erforderliche Wärmetönung von über 600 cal/Mol Zucker liefert. Im Organismus findet eine Zurückverwandlung in Kohlensäure und Wasser statt, wobei die wieder frei werdende Energie für die verschiedenen Lebensprozesse verfügbar wird.

511. Die Quantentheorie der spezifischen Wärme. Es ist bereits im § 170 darauf hingewiesen worden, daß das Verhalten der spezifischen Wärmen bei tiefen Temperaturen gewisse Besonderheiten zeigt. Die Deutung und die erste Theorie dieses Verhaltens haben MADELUNG und EINSTEIN auf Grund der Quantentheorie gegeben. Ihren weiteren Ausbau verdankt die Theorie insbesondere NERNST, DEBYE, BORN und KÁRMÁN.

Im § 156 und 505 ist von den Rotationen und Schwingungen der Moleküle bzw. der Atome im Molekül die Rede gewesen. Auch diese Bewegungen gehorchen, wie alle periodischen Bewegungen, den Quantengesetzen. Das bedeutet, daß auch ein rotierendes Molekül oder die um ihre Gleichgewichtslagen im Molekül schwingenden Atome, wie die Elektronen am Atom, nur ganz bestimmter Energiestufen fähig sind. Diese sind bei den Rotationen dem Trägheitsmoment des Moleküls umgekehrt proportional, also um so größer, je kleiner das Trägheitsmoment ist. Denn die Rotationsenergie ist gleich $J\omega^2/2$, die Winkelgeschwindigkeit ω aber ist nach der auch hier gültigen Gl. 6, § 488, gleich $nh/4\pi J$, so daß die Rotationsenergie bei gegebener Quantenzahl gleich $n^2h^2/8\pi J$ ist.

Nun beruht die früher (§ 171) besprochene klassische Theorie der spezifischen Wärmen auf dem Äquipartitionsgesetz, d. h. dem Satze, daß bei der Temperatur T auf jeden Freiheitsgrad eines Moleküls durchschnittlich die gleiche kinetische Energie $\frac{1}{2}kT$ entfällt (§ 156). Ist dieser Betrag, bei ausreichend hoher Temperatur T, groß gegen die den untersten Quantensprüngen einer periodischen molekularen Bewegung (Rotation oder Atomschwingung) entsprechenden Energie-

differenzen, so ist das auch immer möglich. Die durchschnittlichen Zustände der einzelnen Moleküle entsprechen dann so hohen Quantenzahlen (großer Energie), daß die quantenhafte Unstetigkeit praktisch verwischt ist. Dann gilt als Grenzfall die klassische Theorie. (Man vergleiche die Tatsache, daß es bei einer großen Geldsumme praktisch ohne Belang ist, daß sie nicht weiter unterteilbar ist, als es die kleinste Münzeinheit zuläßt, während das bei einer kleinen Geldsumme ins Gewicht fallen kann, oder daß es bei einer auf einen Berg führenden Treppe ziemlich belanglos ist, ob man auf der n-ten oder der $(n+1)$-ten Stufen steht, während das bei einer Trittleiter einen ganz wesentlichen Unterschied bedeutet). Anders aber, wenn die Energie $\frac{1}{2}\,kT$ mit den Energiedifferenzen der untersten Quantensprünge vergleichbar oder gar kleiner als diese wird. Dann ist es nicht mehr möglich, die verfügbare Wärmeenergie im Durchschnitt gleichmäßig auf alle Moleküle zu verteilen (ebensowenig, wie es möglich ist, eine Summe von 10 Pfennigen gleichmäßig auf 100 Menschen zu verteilen). Ein Teil der Moleküle wird zwar die volle Energie erhalten, die dem untersten Quantensprung entspricht, andere aber gehen völlig leer aus, und zwar wird der letztere Anteil immer größer, je tiefer die Temperatur sinkt. Man sagt, die betreffende Bewegung oder der betreffende Freiheitsgrad friert ein. Dies tritt aber bereits bei um so höheren Werten von $\frac{1}{2}\,kT$, also bei einer um so höheren Temperatur, merklich ein, je größer die Energie ist, die erforderlich ist, um den Energiebedarf der untersten Quantensprünge des Moleküls zu decken, also bezüglich der Rotationen schon bei um so höherer Temperatur, je kleiner das Trägheitsmoment des Moleküls ist.

Aus dieser Tatsache folgt die Erklärung dafür, daß bei den einatomigen Molekülen die Rotation keinen Anteil zur spezifischen Wärme liefert (§ 156 u. 171). Ein solches Atom würde um eine freie Achse rotieren, die durch den Schwerpunkt des Atoms geht, der im Atomkern liegt (die Massen der Elektronen fallen nicht ins Gewicht). Bezüglich einer solchen Achse ist aber das Trägheitsmoment des Atoms ungeheuer klein wegen der winzigen Dimensionen des Kerns (bei einer homogenen Kugel von der Masse μ und dem Radius r ist das Trägheitsmoment $J = \frac{2}{5}\,\mu r^2$), und daher ist die quantentheoretische Rotationsenergie ungeheuer groß. Deshalb ist die Rotation der einatomigen Moleküle bei allen in Frage kommenden Temperaturen bereits vollkommen eingefroren.

Aus dem gleichen Grunde kommen bei den zweiatomigen Molekülen praktisch keine Rotationen um die durch die Schwerpunkte der beiden Atome gehende Achse vor. Dieser Freiheitsgrad fällt für die spezifischen Wärmen aus, und diese Atome haben daher nur zwei statt drei Freiheitsgrade der Rotation. Wird aber die Temperatur sehr niedrig, so frieren auch diese beiden Freiheitsgrade ein, und es bleibt nur noch die kinetische Energie der Moleküle übrig. Die zwei- und ebenso die mehratomigen Gase müssen sich dann bezüglich ihrer spezifischen Wärme wie einatomige Gase verhalten, und es ist in der Tat nachgewiesen, daß sich das in einer mit fallender Temperatur wachsenden Annäherung der Molwärme an den theoretischen Wert für einatomige Gase, $c_v = \frac{3}{2}\,R$ (§ 171), zu erkennen gibt. Beim Wasserstoff, der ein sehr kleines Trägheitsmoment hat, ist dieser Wert sogar schon erreicht worden.

Ganz ähnlich liegt es mit den Schwingungen der Atome im Molekül (§ 505). Ihr Energiebedarf ist so groß, daß sie bei gewöhnlichen Temperaturen bereits praktisch vollkommen eingefroren sind und daher keinen Beitrag zur spezifischen Wärme liefern. Noch größer ist die Anregungsenergie (§ 500) der Elektronen an den Atomen und Molekülen. Auch sie liefern daher bei gewöhnlicher Temperatur keinen Beitrag zur spezifischen Wärme. Dem entspricht auch die Tatsache, daß ein sichtbares Leuchten erst bei hohen Temperaturen eintritt.

Entsprechende Überlegungen gelten für die Schwingungen der Atome oder Ionen in den Raumgittern der Kristalle (§ 529). Bei diesen aber erfolgt das Einfrieren der Schwingungen meist erst bei relativ niedrigen Temperaturen, was sich daran bemerkbar macht, daß bei gewöhnlichen Temperaturen die Atomwärme vieler kristallinischer Substanzen, insbesondere der Metalle, dem theoretischen Wert der klassischen Theorie zum mindesten recht naheliegt (§ 170, vgl. hierzu auch § 515). Manche Substanzen zeigen aber bereits bei Zimmertemperatur beträchtliche Abweichungen, z. B. der Diamant, dessen Atomwärme bei Zimmertemperatur nur 1,4 beträgt.

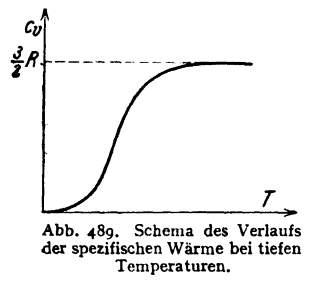


Abb. 489. Schema des Verlaufs der spezifischen Wärme bei tiefen Temperaturen.

Bei hinreichend tiefen Temperaturen zeigen alle Substanzen einen schnellen Abfall ihrer spezifischen Wärmen (Abb. 489). Nach einer Theorie von DEBYE ist in einem gewissen, von der Art der Substanz abhängigen Bereich die spezifische Wärme der dritten Potenz der absoluten Temperatur T proportional (T^3-Gesetz)

$$C = aT^3, \tag{26}$$

eine Beziehung, die mit dem Experiment gut übereinstimmt.

512. Das Magneton. WEISS hat aus den Beobachtungsdaten geschlossen, daß die magnetischen Momente der Atome, die ja nach der AMPÈREschen Theorie (§ 338) von molekularen Kreisströmen herrühren, stets ganzzahlige Vielfache einer Einheit seien, die er — in Analogie zum Elektron — Magneton nannte (WEISSsches Magneton). Zu dem gleichen Schluß führt die BOHRsche Atomtheorie, nach der das Magneton gleich dem magnetischen Moment des Elektrons des Wasserstoffatoms in seiner Grundbahn ($n = 1$) ist (BOHRsches Magneton). Nach § 310 hat ein mit der Winkelgeschwindigkeit ω auf einem Kreise vom Radius r umlaufendes Elektron das magnetische Moment $\mathfrak{M} = \varepsilon\omega r^2/2$. Andrerseits ist, da das Trägheitsmoment des Elektrons in seiner Bahn $J = \mu r^2$ ist, nach Gl. 1 (§ 488) $\omega r^2 = nh/2\pi\mu$, also mit $n = 1$ gleich $h/2\pi\mu$. Demnach ist

$$\mathfrak{M} = \frac{\varepsilon h}{4\pi\mu}. \tag{27}$$

(ε Ladung, μ Masse des Elektrons, h PLANCKsches Wirkungsquantum.) Dieser Wert, der größer ist, als das WEISSsche Magneton, ist tatsächlich mit Theorie und Beobachtung im Einklang. Wie UHLENBECK und GOUDSMIT gefunden haben, besitzt aber jedes Elektron auch schon an sich ein magnetisches Moment von der Größe des BOHRschen Magnetons. Man deutet dieses Moment als die Folge einer Rotation der Elektronen um ihre eigene Hauptträgheitsachse (Kreiselelektron, Elektronendrall oder -spin). Dabei beträgt ihr Drehimpuls $h/4\pi$.

513. Die Richtungsquantelung. Unter den Messungen, die die Existenz des Magnetons bestätigen, stehen an erster Stelle Versuche von GERLACH und STERN, die gleichzeitig auch eine andere Konsequenz der Quantentheorie bestätigten. Befindet sich ein einatomiges Molekül, das ein magnetisches Moment hat, also einen magnetischen Dipol bildet, in einem magnetischen Felde, so zeigt seine magnetische Achse eine Präzessionsbewegung um die Richtung des Feldes (vgl. die Präzession des Kreisels, § 48). D. h. die Achse beschreibt einen Kegelmantel von bestimmtem Öffnungswinkel um die Feldrichtung. Wie jede periodische Bewegung gehorcht auch diese Präzession Quantengesetzen, und aus diesen folgt, daß der Öffnungswinkel des Kegels nur ganz bestimmte, im Einzelfall berechenbare Werte haben kann. Man bezeichnet diese Tatsache als Richtungsquantelung. Beim Silberatom z. B., wo die Verhältnisse besonders einfach liegen,

sind nur zwei Lagen der magnetischen Achse möglich, nämlich so, daß sie der Feldrichtung parallel oder antiparallel liegt. In diesem Falle findet also überhaupt keine Präzessionsbewegung statt. In anderen Fällen können weitere Lagen hinzukommen.

Gerlach und Stern ließen Metalle im Vakuum verdampfen und erzeugten, indem sie den Metalldampf durch enge Schlitze treten ließen, einen schmalen Strahl von Metallatomen (Abb. 490). Diesen ließen sie durch ein starkes, zur Strahlrichtung senkrechtes, sehr inhomogenes Magnetfeld treten, also ein solches Feld, in dem sich die Größe der magnetischen Kraft bereits auf sehr kurze Strecken beträchtlich ändert. Steht nun z. B. ein Silberatom so, daß sein positiver magnetischer Pol in Richtung der Kraftlinien weist, und nimmt das Feld in dieser Richtung an Stärke ab, so wirkt auf den negativen Pol des Atoms eine größere Kraft als auf den positiven, und das Atom wird gegen die Richtung des Feldes abgelenkt. Liegt das Atom in der entgegengesetzten Lage, so erfolgt die Ablenkung in der entgegengesetzten Richtung. Der Atomstrahl muß also eine Aufspaltung in zwei Strahlen erfahren, die nach entgegengesetzten Richtungen aus ihrer geraden Bahn abgelenkt sind, in der der Strahl ohne die Wirkung des Magnetfeldes verlaufen würde. Tatsächlich ist dies das Ergebnis der geschilderten Versuche gewesen. Kennt man den Verlauf des Magnetfeldes, so kann man aus der Größe der Ablenkung auch das magnetische Moment des Atoms berechnen. Es ergab sich in guter Übereinstimmung mit der Theorie. Insbesondere zeigten auch Atome, die nach der Theorie kein magnetisches Moment haben sollen, den Effekt nicht.

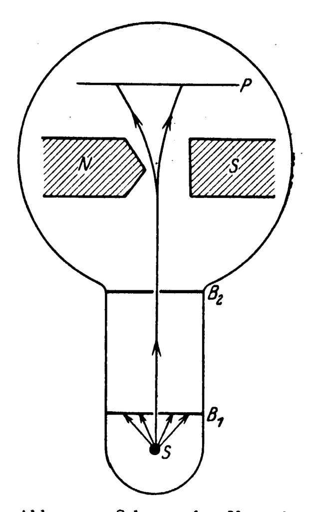


Abb. 490. Schema des Versuchs von Gerlach und Stern. S erhitzte Silberkugel, B_1, B_2 Blenden, NS Magnet, P Platte zum Auffangen des Silberniederschlags.

514. **Die Wellenmechanik.** Eine auch nur einigermaßen erschöpfende Darstellung der neuesten Entwicklung der Quantentheorie kann an dieser Stelle nicht gegeben werden, weil dazu ein Maß an physikalischen und mathematischen Kenntnissen erforderlich ist, das hier nicht vorausgesetzt werden kann. Die folgenden Ausführungen haben lediglich den Zweck, den Leser mit einigen Grundgedanken der neuen Theorie bekannt zu machen.

In § 490 ist auseinandergesetzt worden, daß sich uns das Licht in zwiefachem Wesen zeigt. Zur Erklärung eines Teils der optischen Erscheinungen ist die Vorstellung von der Wellennatur des Lichts absolut unentbehrlich, während andere Erscheinungsgebiete nicht ohne die der Wellentheorie fremde Annahme von der Existenz der Lichtquanten gedeutet werden können. Wir müssen uns aber mit der Tatsache abfinden, daß dem Licht offenbar beide Erscheinungsformen zukommen, denn die Realität beider ist durch die experimentelle Erfahrung zwingend erwiesen. Wir können die Lage kurz so formulieren: Jeder Strahlung von der Schwingungszahl ν ist ein Energiequant $h\nu$ und eine Masse $h\nu/c^2$ zuzuordnen. Es ist nun ein für das Wesen der physikalischen Forschung überaus charakteristischer Zug, daß ein so schwerwiegendes Dilemma als Angelpunkt einer ganz neuen Idee von größter Tragweite gedient hat. Diese Idee beruht darin, daß die Physik sich nicht nur auf den Boden der gegebenen Tatsache stellt, sondern darüber hinaus die beim Licht gewonnene Erfahrung auch auf ein anderes Erscheinungsgebiet auszudehnen sucht, und zwar auf die Theorie der Materie. Nach der Anschauung der sog. klassischen Physik besteht die Natur einerseits aus der aus Atomkernen und Elektronen aufgebauten, also korpuskularen Materie, auf der andern Seite

ist sie erfüllt mit elektrischen und magnetischen Feldern, insbesondere den elektromagnetischen Schwingungen des Lichts, das als ein Schwingungsvorgang angesehen wird. Die Quantentheorie enthüllte uns auf Grund neuer experimenteller Erfahrungen das zwiespältige Wesen des Lichts. Das Licht zeigte neben seinem Wellencharakter einen quantenhaften, also sozusagen korpuskularen, materiellen Charakter. Es war DE BROGLIE, der auf die Vermutung kam, daß das Wesen der Materie ein ebenso zwiespältiges sei wie das des Lichts. Er kehrte die für Lichtquanten $h\nu$ gültige Beziehung

$$h\nu = mc^2, \tag{28}$$

durch die jedem Lichtquant der Schwingungszahl ν eine Masse m zugeordnet wird (§ 490), sozusagen um, indem er behauptete, daß mit jeder Materie von der Masse m ein Wellenvorgang verknüpft sei, dessen Schwingungszahl sich aus Gl. 28 zu $\nu = mc^2/h$ ergibt. Für ein Elektron ergibt sich so $\nu = 1{,}24 \cdot 10^{20}\,\text{sec}^{-1}$, für einen Wasserstoffkern (Proton) $\nu = 2{,}29 \cdot 10^{23}\,\text{sec}^{-1}$.

Natürlich sind diese sog. Materiewellen oder DE BROGLIE-Wellen kein Licht, d. h. kein elektromagnetischer Schwingungsvorgang, sondern Wellen von bisher unbekannter Natur. Die Geschwindigkeit u dieser Wellen hängt bei einem bewegten Körper von seiner Geschwindigkeit v ab und ergibt sich aus der Theorie zu $u = c^2/v$. Da nach der Relativitätstheorie die Geschwindigkeit v eines Körpers nie größer als die Lichtgeschwindigkeit werden kann (§ 537), so ist u stets größer als diese. Die Geschwindigkeit v eines bewegten Körpers ist als die sog. Gruppengeschwindigkeit der mit ihr verknüpften Materiewellen anzusehen. Das ist allgemein bei Wellen diejenige Geschwindigkeit, mit der sich die Energie innerhalb einer Gruppe von Wellen fortpflanzt, die sich in ihrer Schwingungszahl und Phase nur sehr wenig unterscheiden.

Zwischen der Wellengeschwindigkeit u, der Schwingungszahl ν und der Wellenlänge λ der Materiewellen besteht wie bei jedem Wellenvorgang die Beziehung (§ 124)

$$u = \lambda\nu. \tag{29}$$

Da $u = c^2/v$ und $\nu = mc^2/h$, so folgt

$$\lambda = h/mv. \tag{30}$$

Die Quantentheorie des Lichtes geht, wie in § 483 gezeigt wurde, in die klassische Strahlungstheorie über, wenn man $h = 0$ setzt. Die Wellentheorie des Lichtes geht in die klassische geometrische Optik über, wenn man die Wellenlänge des Lichtes als sehr klein gegenüber den in den Weg des Lichtes tretenden Hindernissen ansehen darf. Entsprechendes zeigt sich bei der Wellentheorie der Materie. Die Wellenlänge λ der Materiewellen wird verschwindend klein, wenn die Größe h/mv verschwindend klein wird, wenn wir also entweder das Wirkungsquantum $h = 0$ setzen oder wenn die Masse m, um die es sich handelt, sehr groß ist. D. h. die Wellenmechanik geht für ausgedehnte materielle Körper, also für solche Körper, die aus einer größeren Zahl von Atomen bestehen, in die klassische Mechanik über. Die Wellentheorie ist insbesondere in denjenigen Fällen anzuwenden, wo der Krümmungsradius der Bahn eines Körpers klein gegen die Wellenlänge λ ist.

Das Verhältnis h/m hat für Elektronen den Zahlenwert 7,28. Beschleunigt man Elektronen durch eine Spannung von 1 Volt, so erhalten sie eine Geschwindigkeit $v = 5{,}94 \cdot 10^7$ cm/sec. Derartige Elektronen sind also mit Materiewellen verknüpft, deren Wellenlänge von der Größenordnung 10^{-7} cm oder 10 Å-E ist, also etwa gleich derjenigen der Röntgenstrahlen. Es mußte daher erwartet werden, daß sie an Kristallen die gleichen Beugungserscheinungen zeigen wie Rönt-

genstrahlen. Ebenso wie Röntgenstrahlen von einem Kristall nur in ganz bestimmten, von ihrer Wellenlänge abhängigen Richtungen reflektiert werden (§ 472), so mußte man das auch von den Materiewellen und demzufolge auch von den mit ihnen verknüpften Elektronen vermuten. Dieser Effekt ist in der Tat zuerst von DAVISSON und GERMER, später auch von anderen, gefunden worden, und zwar in quantitativer Übereinstimmung mit der Theorie.

Neuerdings ist es auch gelungen, beim Durchgang von Elektronen durch dünne kristallinische Schichten die gleichen Beugungserscheinungen zu erhalten, die beim Durchgang von Röntgenstrahlen durch Kristalle auf treten. Abb. 491 zeigt Beugungsringe von Elektronen, die in einem feinen Strahl durch eine Metallfolie getreten sind und auf eine photographische Platte fielen. Da die Folie kein einheitlicher Kristall ist, sondern aus sehr vielen Mikrokristallen besteht, so entstehen in diesem Falle nicht wie beim Durchgang von Röntgenstrahlen durch einen einheitlichen Kristall einzelne Beugungspunkte (LAUE-Diagramm, Abb. 456, § 471), sondern wie beim DEBYE-SCHERRER-Verfahren (Abb. 461, § 472) Beugungsringe, deren Durchmesser von der Elektronengeschwindigkeit und der Gitterstruktur des Blättchens abhängen[1]). Es ist daher möglich, Strukturanalysen ebenso wie mit Röntgenstrahlen auch mit Elektronen auszuführen. Der Gedanke, daß die Materiewellen Beugungserscheinungen zeigen müßten, ist zuerst von EINSTEIN ausgesprochen worden.

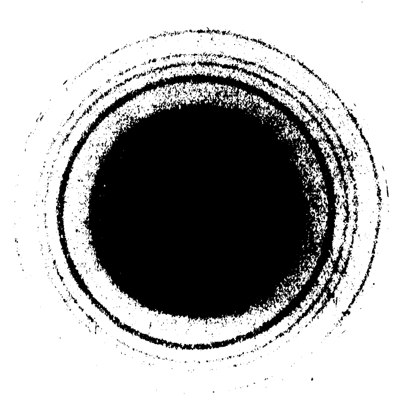


Abb. 491. Elektronenbeugung in einer Metallfolie.

Der Gedanke DE BROGLIES hat seinen theoretischen Ausbau durch SCHRÖDINGER, dann in scheinbar grundsätzlich anderer Form durch HEISENBERG, BORN und JORDAN gefunden. Es hat sich aber nachweisen lassen, daß der Unterschied rein formaler Natur ist. Auf die Einzelheiten dieser neuen Wellenmechanik oder Quantenmechanik kann hier nicht eingegangen werden. Es sei nur so viel gesagt, daß sie zu einer neuen und besseren Begründung der Atomtheorie von BOHR geführt hat. Zahlreiche bisher rätselhafte Tatsachen aus der Welt der Atome, insbesondere auch Fragen des Molekülbaus, haben bereits auf Grund der neuen Theorie ihre Deutung gefunden. Von besonderer Wichtigkeit für die Frage des Atom- und Molekülbaues ist die Tatsache, daß die Wellenmechanik auch prinzipiell die Möglichkeit bietet, das Mehrkörperproblem für den Fall, daß es sich um Elektronen handelt, zu lösen. Einen großen Erfolg in dieser Richtung bedeutet die bis dahin vergeblich versuchte richtige Berechnung des Heliumatoms sowie des Wasserstoffmoleküls. Die Grundlage der neuen Wellenmechanik bildet eine von SCHRÖDINGER aufgestellte Gleichung.

Nach HEISENBERG und BORN ist es prinzipiell nicht möglich, Ort und Geschwindigkeit eines Elektrons gleichzeitig mit absoluter Genauigkeit festzustellen, weil bei jeder denkbaren Art, die eine dieser beiden Größen genau zu messen, die andre in ganz unkontrollierbarer Weise verändert wird. Diese Tatsache findet ihren Ausdruck in der sog. Ungenauigkeitsrelation von HEISENBERG. Die Lösungen der SCHRÖDINGERschen Gleichung sind ein Aus-

---

[1]) Für die freundliche Überlassung der Abb. 491 bin ich Herrn Prof. H. MARK in Ludwigshafen a. Rh. zu Dank verpflichtet.

druck für die Wahrscheinlichkeit, das Elektron innerhalb bestimmter Bereiche vorzufinden. An diese Vorstellung knüpft die Krisis des Kausalitätsbegriffs an, auf die in § 2 hingewiesen wurde. Die elementaren Vorgänge an den Atomen sind nicht streng kausal determiniert, sondern nur statistisch erfaßbar. Auch das Energieprinzip verliert seine absolute Gültigkeit und wird zu einem statistischen Gesetz, das um so besser gilt, je größer die Zahl der an einem physikalischen Vorgang beteiligten Atome oder Elektronen ist.

Es sei der Ort eines Elektrons durch die Koordinate x, seine Bewegungsgröße durch q bezeichnet. Eine mathematisch genaue Bestimmung dieser Größen ist schon wegen der praktisch begrenzten Genauigkeit jeder physikalischen Messung nie möglich. Jede von ihnen wird immer nur mit einer gewissen Ungenauigkeit, die wir mit Δx und Δq bezeichnen wollen, gemessen werden können. Die Ungenauigkeitsrelation (Unbestimmtheitsrelation) besagt nun, daß der Genauigkeit einer Messung dieser Größen eine prinzipielle, also nicht auf der Unvollkommenheit der Meßmittel beruhende Grenze gesetzt ist, die durch die Beziehung

$$\Delta x \cdot \Delta q \geqq h \tag{31}$$

gegeben ist. Will man also etwa den Ort x eines Elektrons mit möglichst großer Genauigkeit ($\Delta x = 0$) messen, so wird $\Delta q = \infty$, q also vollkommen unbestimmt, und umgekehrt. In entsprechender Weise sind Messungen der Energie eines Elektrons und der zugehörigen Zeit miteinander gekoppelt.

515. **Das PAULIsche Prinzip und die FERMI- und BOSE-Statistik.** Zur Deutung gewisser Tatsachen im Aufbau der Atome hat PAULI ein, oft als das Pauliverbot bezeichnetes, Prinzip aufgestellt, das aussagt, daß es grundsätzlich unmöglich ist, daß sich zwei oder gar noch mehr der einen Atomkern umkreisenden Elektronen im gleichen Zustande befinden. Der Zustand eines Elektrons, d. h. seine Bahn, seine Energie und seine Orientierung im Raum ist nach der Quantentheorie durch im ganzen vier Quantenzahlen bestimmt. Das PAULIsche Prinzip besagt daher genauer, daß es unmöglich ist, daß irgend zwei der Elektronen an einem Atomkern in allen vier Quantenzahlen übereinstimmen. Dieses Prinzip hat sich zur Deutung des Aufbaus der Atome, insbesondere der Zahl der Elektronen in den einzelnen Elektronenschalen und auch sonst so ausgezeichnet bewährt, daß es als durch die Erfahrung bestätigt angesehen werden muß.

Das PAULIsche Prinzip wurde von FERMI auf jede Gesamtheit von Elektronen übertragen. Auf ein abgeschlossenes, mit Elektronen erfülltes Volumen, ein sog. „Elektronengas" angewandt, sagt das Prinzip dann aus, daß es niemals vorkommen könne, daß sich zwei Elektronen in diesem Volumen gleichzeitig im gleichen Zustand befinden können (sog. FERMI-Statistik). Nun folgt aber aus der Wellenmechanik, daß die Energie der Elektronen in einem abgeschlossenen Volumen quantenhaften Charakter hat. Ihre kinetische Energie setzt sich aus Energiequanten bestimmter Größe zusammen. Diese sind der Masse des Elektrons umgekehrt proportional und daher wegen der kleinen Masse des Elektrons sehr groß. Da die Elektronen drei Freiheitsgrade haben (§ 156), so muß man annehmen, daß ihre kinetische Energie ε durch drei Quantenzahlen n_1, n_2, n_3 gegeben ist. Man kommt dann zu der Beziehung

$$\varepsilon = h\nu_0(n_1 + n_2 + n_3), \tag{32}$$

wobei ν_0 eine gewisse Grundschwingungszahl ist, die nicht mit der durch Gl. 1 definierten Schwingungszahl ν identisch ist, sondern von den besonderen vorliegenden Bedingungen, aber nicht von der Temperatur abhängt. n_1, n_2, n_3 sind ganze, positive Zahlen, können aber auch gleich Null sein. Wir wollen die Summe $n_1 + n_2 + n_3$ mit n bezeichnen. Dann ergibt die Kombinationsrechnung, daß

jeder bestimmte mögliche Wert von ε, je nach der Zusammensetzung von n aus seinen drei Summanden, auf $(n+1)(n+2)/2$ Arten zustande kommen kann. Nach der FERMI-Statistik kann es daher in einem abgeschlossenen Volumen nicht beliebig viele Elektronen von der Energie ε geben, sondern höchstens

1	Elektron	mit	der	Energie	0
3	Elektronen	,,	,,	,,	$h\nu_0$
6	,,	,,	,,	,,	$2h\nu_0$
10	,,	,,	,,	,,	$3h\nu_0$
15	,,	,,	,,	,,	$4h\nu_0$ usw.

Infolge dieser Tatsache gilt das Äquipartitionsgesetz für ein Elektronengas nicht, und deshalb sind die Gesetze der idealen Gase auf ein Elektronengas, jedenfalls unterhalb einer gewissen Temperatur, nicht anwendbar, sondern erfahren eine prinzipielle Umgestaltung.

Bei sehr hohen Temperaturen macht sich der quantenhafte Charakter der Energie darum nicht mehr bemerkbar, weil die Energie, die dann jedes einzelne Elektron besitzt, sehr groß gegen die Unterschiede der einzelnen möglichen Energiestufen ist. Es macht dann nichts Merkliches aus, ob die Energie eines Elektrons stetig oder nur unstetig veränderlich ist. Bei tieferen Temperaturen aber ist dies anders. Hier bewirkt der quantenhafte Charakter der Energie zusammen mit der FERMI-Statistik eine sog. Gasentartung, d. h. ein Abweichen vom Verhalten der idealen Gase, wie es sich nach der klassischen Theorie darstellt. Besonders bemerkenswert ist der Zustand beim absoluten Nullpunkt der Temperatur. Nach der klassischen Gastheorie besitzt jedes Elektron bei der absoluten Temperatur T die Energie $3kT/2$ (§ 156). Beim absoluten Nullpunkt besäße es daher überhaupt keine Energie. Nach FERMI kann es aber in einem abgeschlossenen Gasvolumen immer nur ein einziges Elektron geben, das die Energie Null hat. Die drei nächsten müssen bereits ein Energiequant besitzen, die sechs folgenden deren zwei, usw. Es enthält also ein Elektronengas beim absoluten Nullpunkt noch einen nicht unerheblichen Betrag an Energie, die sog. Nullpunktsenergie. Diese ist so groß, wie sie ihm nach der klassischen Theorie erst bei vielen tausend Grad zukommen sollte. Das wird vielleicht am besten durch ein hypothetisches Beispiel aus der Finanzstatistik deutlich. Gesetzt den Fall, die FERMI-Statistik gälte auch für das Vermögen der rund 70 Millionen Einwohner des Deutschen Reichs und die Vermögensverhältnisse würden nicht, wie bei dem Gase, durch drei Quantenzahlen, sondern nur durch eine einzige bestimmt, dann würde die größte überhaupt mögliche Verarmung des deutschen Volks keineswegs in einem Zustande absoluter Vermögenslosigkeit bestehen. Ganz vermögenslos könnte nur eine einzige Person sein, die nächstarme müßte bereits einen Pfennig besitzen, die folgende deren zwei usw., und der reichste Mann besäße notgedrungen ein Vermögen von 70 Millionen Pfennig. Es läßt sich leicht ausrechnen, daß bei Gültigkeit der FERMI-Statistik das deutsche Volksvermögen niemals unter einen Betrag von 2450 Billionen Pfennig oder 24,5 Billionen Mark sinken könnte. In der Anwendung auf ein Gas entspricht dieser Mindestsumme die Nullpunktsenergie.

Eine in einem Hohlraum befindliche Strahlung kann man auf Grund der Vorstellung von der korpuskularen Natur der Lichtquanten wie ein aus solchen Lichtquanten bestehendes Gas betrachten. Für ein Lichtquantengas gilt aber nicht die FERMI-Statistik, sondern eine andere, die BOSE-EINSTEIN-Statistik, die sich sowohl von jener wie von der klassischen Statistik in wesentlichen Punkten unterscheidet. Die Anwendung dieser Statistik führt zum PLANCKschen Strahlungsgesetz.

516. Die neue Elektronentheorie der Metalle. Es ist in diesem Buche mehrfach die Rede davon gewesen, daß die Elektronentheorie der Metalle zwar dazu geeignet ist, den Mechanismus der elektrischen und der Wärmeleitfähigkeit der Metalle und andere Erscheinungen an diesen in ihren allgemeinen Zügen zu verstehen. Sie vermag jedoch in ihrer ursprünglichen Form diese Erscheinungen nur qualitativ (und auch das nicht in allen Fällen), nicht quantitativ zu erklären. Diese Unstimmigkeiten sind von SOMMERFELD durch eine neue, auf die Wellenmechanik und die FERMI-Statistik aufgebaute Elektronentheorie der Metalle behoben worden. Aus der sehr kleinen Masse der Elektronen folgt, wie schon in § 515 erwähnt, daß ihre Energiequanten sehr groß sind, und das hat zur Folge, daß das Elektronengas noch bei Temperaturen von vielen tausend Grad vollkommen entartet ist. Das Elektronengas hat daher auch eine ungeheuer große Nullpunktsenergie.

Von den quantitativen Ergebnissen der neuen Theorie seien nur zwei besonders wichtige erwähnt. Ebenso wie bereits aus der älteren Theorie folgt aus der neuen, daß die elektrische und die Wärmeleitfähigkeit der Metalle einander proportional sind (Gesetz von WIEDEMANN und FRANZ, § 248). Während jedoch aus der alten Theorie ein Zahlenwert des Verhältnisses der beiden Leitfähigkeiten folgt, der den Messungen nicht entspricht, ergibt die neue Theorie auch darin eine vorzügliche Übereinstimmung mit der experimentellen Erfahrung.

Ein zweites, sehr wichtiges Ergebnis ist das folgende. Im § 170 ist die Tatsache erwähnt worden, daß die Atomwärme der Metalle nahezu den Wert 6 hat (Gesetz von DULONG und PETIT). Wir haben dieses Gesetz dort auch theoretisch begründet, indem wir, entsprechend der klassischen Wärmetheorie, jedem Metallatom bezüglich jedes seiner drei Freiheitsgrade kinetische Energie im Betrage $kT/2$, im ganzen die kinetische Energie $3kT/2$, und den gleichen Betrag an potentieller Energie, insgesamt also die Energie $3kT$ zuschrieben. Dabei aber haben wir die Elektronen im Metall nicht berücksichtigt. Sofern man diese als ein in das Metall eingeschlossenes Gas ansehen darf, müßte man bei der Berechnung der Atomwärme auch noch die in der thermischen Bewegung der Elektronen steckende Energie, d. h. für jedes Elektron die Energie $3kT/2$, mit in Rechnung setzen, und die Atomwärme müßte einen viel größeren Wert haben als sie tatsächlich hat, z. B. 9 statt 6, wenn auf jedes Metallatom ein freies Elektron entfällt. Während man also auf der einen Seite annehmen muß, daß die Elektronen durch ihre thermische Bewegung die Wärmeleitung in den Metallen besorgen, schien aus den Atomwärmen zu folgen, daß ihnen eine thermische Energie nicht zukomme. Dieser Widerspruch klärt sich nunmehr auf folgende Weise auf. Wohl besitzen die Elektronen thermische Energie, aber diese ist von der Temperatur nicht so abhängig, wie es die klassische Theorie verlangt. Die Atomwärme ist ja kein Maß für die thermische Energie selbst, sondern für deren Zuwachs bei einer Temperatursteigerung. Ein solcher Zuwachs findet wohl bei den Metallatomen statt, aber nicht merklich bei den Elektronen. Das Elektronengas ist bei allen in Betracht kommenden Temperaturen so gut wie völlig entartet. Für ein sehr stark entartetes Gas folgt aber aus der Theorie, daß seine spezifische Wärme der Masse der Moleküle, in unserem Fall der Elektronen, proportional ist. Die Elektronen tragen daher wegen ihrer sehr geringen Masse zur spezifischen Wärme der Metalle nur sehr wenig bei. Es läßt sich berechnen, daß die „Molwärme" (§ 171) der Elektronen bei Zimmertemperatur nur etwa $R/100$ beträgt, gegenüber dem Wert $3R/2$ der klassischen Theorie.

34. Kapitel.

Atomkerne.

517. Die wahren Atomgewichte. Isotopie. Die Atomgewichte der Elemente (§ 96) werden gewöhnlich auf chemischem Wege, als sog. Verbindungsgewichte, durch Vergleich mit dem Atomgewicht 16 des Sauerstoffs ermittelt. Dabei wird naturgemäß immer das Gewicht einer bequem wägbaren Substanzmenge, also einer ungeheuer großen Zahl von Atomen, festgestellt und daraus das Gewicht eines Grammatoms, das ja das Atomgewicht darstellt, berechnet. Man hat dabei früher immer die stillschweigende Annahme gemacht, daß die Atome des gleichen Elements unter sich völlig gleichartig seien, so daß die Atomgewichte Zahlen seien, die den wirklichen Gewichten bzw. Massen der einzelnen Atome streng proportional sind, da ja die Zahl der Atome im Grammatom für alle Stoffe die gleiche ist (LOSCHMIDTsche Zahl, § 96).

Eine Betrachtung des periodischen Systems zeigt, daß für die leichteren Elemente meist eine einfache, ganzzahlige Beziehung zwischen den Atomgewichten besteht, wenn man sie auf Sauerstoff = 16 bezieht, wie das üblich ist. Bei den schwereren Elementen ist das nicht mehr der Fall.

Neuerdings ist es nun gelungen, die Atomgewichte auf eine völlig neuartige Weise zu ermitteln, die den großen Vorzug hat, daß sie die Massen einzelner Atome zu bestimmen gestattet. ASTON bediente sich dazu der elektrischen und magnetischen Ablenkung von positiven Strahlen (Kanal- oder Anodenstrahlen) in einem evakuierten Rohr. Da die Größe der Ablenkung von der Masse abhängt, so kann man Atome verschiedener Masse auf diese Weise voneinander trennen. ASTON gelang es durch geschickte Kombination der elektrischen und der magnetischen Ablenkung, die geladenen Atome (Ionen) gleicher Masse auf die gleiche Stelle einer in den Weg der Strahlen gestellten photographischen Platte zu vereinigen, etwa wie Licht in einem Brennpunkt vereinigt wird. Die photographische Platte wird an diesen Stellen geschwärzt. Und nun zeigte sich, daß in vielen Fällen auch bei Vorhandensein einer einzigen Atomart eine Schwärzung nicht nur an einer, sondern an zwei oder mehr Stellen stattfand, ein sicherer Beweis dafür, daß Atome verschiedener Masse vorhanden sein müssen. Abb. 492 zeigt einige der sog. Massenspektrogramme ASTONs.

Aus der Größe der Ablenkung der Strahlen kann man aber nun die Massen der Atome bzw. die wahren Atomgewichte berechnen. Und dabei ergab sich, daß — von kleinen Abweichungen (s. unten) abgesehen — diese, bezogen auf Sauerstoff = 16, mit sehr großer Annäherung ganze Zahlen sind. So zeigten sich z. B. in den Strahlen des Elements Krypton Atome, denen die ganzzahligen Atomgewichte 78, 80, 82, 83, 84 und 86 zukommen, während sich das Atomgewicht des Kryptons auf gewöhnlichem Wege zu 82,92 ergibt, ein Wert also, der mitten zwischen den obengenannten liegt und aus dem Mischungsverhältnis der verschiedenen Kryptonarten zu erklären ist. Ähnliches zeigte sich bei einer großen Zahl anderer Elemente, nämlich allen denjenigen, deren chemische Atomgewichte nicht ganzzahlig sind. Die bedeutendste Ausnahme bildet der Wasserstoff, dessen Atomgewicht sich nicht als 1,0000 sondern als 1,0078 ergab. (Der Unterschied kann nicht durch die kürzlich erfolgte Entdeckung eines Wasserstoffatoms vom Atomgewicht 2 erklärt werden.) Die bei anderen Elementen vorkommenden Abweichungen von der Ganzzahligkeit sind viel kleiner und bewegen sich meist in der Größenordnung von wenigen Einheiten der vierten Stelle hinter dem Komma. Als Bezugselement dient dabei der Sauerstoff, dessen Atomgewicht wie üblich genau gleich 16,0000 gesetzt wird.

In diesen sog. „Massendefekten" liegt ein wichtiges Mittel zur Erforschung des Aufbaus der Atomkerne (vgl. hierzu § 538).

Aus diesem Befund ergeben sich folgende Schlüsse. Es gibt Atome verschiedener Masse, die vollkommen gleiches chemisches Verhalten zeigen. Das chemische Verhalten aber hängt, wie wir gesehen haben, lediglich von der Konfiguration der äußeren Elektronen, insbesondere von der Elektronenzahl in der äußeren Schale (Wertigkeit) ab, und diese wieder ist bedingt durch die Kernladung. Sie haben also zweifellos als chemisch identische Atome gleiche Kernladung. Aber sie können, wie die ASTONschen Versuche lehren, erheblich verschiedene Massen haben. Wegen ihrer chemischen Identität gehören solche an Kernladung gleichen, aber an Masse verschiedenen Atome an die gleiche Stelle des periodischen Systems. Man nennt sie Isotope. Atome von gleicher Kernmasse, also gleichem wahren Atomgewicht, aber verschiedener Kernladung nennt man isobare Atome.

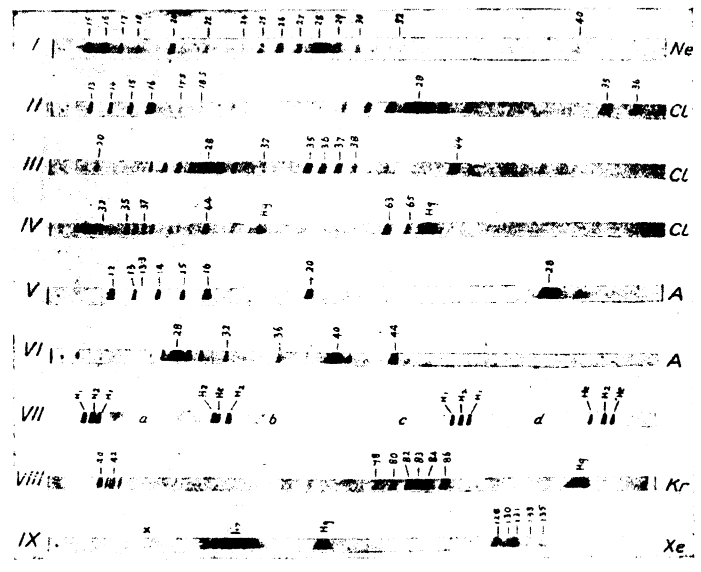


Abb. 492. Massenspektrogramme von ASTON.

Die Unganzzahligkeit der chemischen Atomgewichte oder Verbindungsgewichte rührt also daher, daß die chemisch einheitlich scheinenden Elemente in sehr vielen Fällen eine Mischung von Isotopen darstellen. Das chemische Atomgewicht ist der sich aus dem Mischungsverhältnis ergebende Durchschnittswert der wahren Atomgewichte der einzelnen Komponenten. Es ist bemerkenswert, daß die chemischen Atomgewichte von Elementen sehr verschiedener Herkunft immer die gleichen sind, ein Beweis dafür, daß die Mengenverhältnisse der Isotopen überall auf der Erde die gleichen sein müssen. Aus der Tatsache, daß die meisten chemischen Verbindungsgewichte nur Mittelwerte darstellen, erklärt sich auch, wie es kommen kann, daß an vier Stellen des periodischen Systems (A—K, Co—Ni, Te—J, Th—Pa) die Elemente nicht in der Reihenfolge ihrer Verbindungsgewichte auftreten. In allen diesen Fällen handelt es sich um zwei Elemente, bei denen im ersten zufällig die schweren, im zweiten die leichten Isotopen besonders stark überwiegen.

Eine Trennung von Isotopen ist naturgemäß auf chemischem Wege nicht möglich. Brauchbar sind nur Verfahren, bei denen die Verschiedenheit der Massen

ausgenutzt wird. In erster Linie sind Methoden angewandt worden, die auf der verschiedenen Verdampfungs- oder Diffusionsgeschwindigkeit der Isotopen beruhen. Das wirksamste Verfahren zur Isotopentrennung nach dem Diffusionsverfahren hat G. HERTZ entwickelt und zunächst auf das Neon angewandt, von dem zwei Isotope, Ne^{20} und Ne^{22}, bekannt waren, deren Mischungsverhältnis rund 10 : 1 beträgt. Es gelang bereits, das Mischungverhältnis 1 : 1 herzustellen, also das seltenere Ne^{22} beträchtlich anzureichern. Gleichzeitig wurde ein weiteres Isotop, Ne^{23}, entdeckt.

Von großer prinzipieller Bedeutung ist die kürzlich nachgewiesene Tatsache, daß auch der gewöhnliche Wasserstoff H^1 ein Isotop H^2 besitzt. (Es ist nur in sehr kleiner Menge vorhanden und bildet nicht die Ursache für die Abweichung des Atomgewichts von 1.) Der H^2-Kern muß aus zwei Protonen und einem Elektron bestehen.

Das Vorhandensein von Isotopen ist auch aus den Rotationsschwingungsspektren und den Bandenspektren einiger Stoffe nachgewiesen worden. Selbstverständlich hat die Masse der schwingenden Atome einen Einfluß auf die Rotations- und Schwingungsfrequenzen im Molekül. Das äußert sich beim Vorhandensein von n Isotopen darin, daß die Linien des Rotationsschwingungsspektrums und des Bandenspektrums nicht einfach, sondern n-fach sind. Auf diese Weise ist auch kürzlich nachgewiesen worden, daß es neben dem Sauerstoff O^{16} zwei weitere Isotope O^{15} und O^{17}, wengleich nur in sehr geringen Mengen, gibt. Sehr schön zeigt diesen Isotopeneffekt die Abb. 485 (§ 505). Die Hauptmaxima gehören dem Cl^{35} an, die größeren Nebenmaxima dem Cl^{37}, die kleineren dem Cl^{39}.

518. Die PROUTsche Hypothese. Aufbau der Kerne. Aus dem Inhalt des vorhergehenden Paragraphen folgt, daß Kerne gleicher Kernladung verschiedene Masse haben können, und ferner, daß diese Massen stets sehr nahezu ganzzahlige Vielfache der Masse des Wasserstoffkerns sind. Diese Entdeckungen haben eine bereits im Jahre 1815 von WILLIAM PROUT aufgestellte, aber alsdann — als scheinbar unrichtig — fast völlig in Vergessenheit geratene Hypothese wieder in den Vordergrund des Interesses gerückt, nach der alle Elemente aus Wasserstoff bestehen sollten. Diese Hypothese ist, vom Standpunkt unseres Strebens nach Einfachheit im Naturgeschehen, überaus bestechend, und ihre Richtigkeit kann heute nicht mehr angezweifelt werden. Danach haben wir den positiv geladenen Wasserstoffkern als den einen Urbaustein der Materie anzusehen, und ihm haben wir heute als zweiten das negativ geladene Elektron zur Seite zu setzen. Man nennt deshalb den Wasserstoffkern auch das Proton. Es sind also alle Atomkerne aus Protonen und Elektronen aufgebaut. Wegen der sehr kleinen Masse der Elektronen ändern diese praktisch nichts an der Ganzzahligkeit der Atomgewichte. (Vgl. hierzu § 538.)

Das mit chemischen Methoden bestimmte Atomgewicht des Lithium beträgt 6,94. Die Massenanalyse nach ASTON zeigt das Vorhandensein von zwei Isotopen mit den wahren Atomgewichten 6 und 7. Die Ordnungszahl des Lithiums ist 3, sein Atomkern hat also eine positive Ladung von drei Elementarquanten. Aus diesen Befunden können wir folgende Schlüsse ziehen. Das Lithiumisotop vom Atomgewicht 6 hat einen aus 6 Protonen und 3 Elektronen bestehenden Kern, dasjenige vom Atomgewicht 7 einen solchen aus 7 Protonen und 4 Elektronen. Letzteres ist im gewöhnlichen Lithium in viel größerer Menge vorhanden als ersteres, wie das nahe an 7 liegende chemische Atomgewicht zeigt. Man kann leicht berechnen, daß dieses zu 94% aus Li^7 und nur zu 6% aus Li^6 bestehen muß.

Es ist möglich, daß Isotope eine unter sich recht verschiedene Kernstruktur haben, doch ist darüber heute noch so gut wie nichts bekannt. Die radioaktiven Erscheinungen machen es wahrscheinlich, daß innerhalb der Atomkerne besonders häufig Protonen und Elektronen zu Heliumkernen (4 Protonen + 2 Elektronen) zusammentreten.

519. **Radioaktivität. α-, β- und γ-Strahlen.** Im Jahre 1896 entdeckte A. H. Becquerel, daß von Uranmineralien, insbesondere der Pechblende, eine Strahlung ausgeht, die, ähnlich den Röntgenstrahlen, viele Körper sehr stark durchdringt. Anschließend konnte das Ehepaar Curie (1898) aus der Pechblende ein bisher unbekanntes Element, das Radium, abscheiden, das die eigentliche Quelle dieser Strahlen war. Seither ist noch eine große Zahl weiterer Substanzen entdeckt worden, die ebenfalls solche Strahlung aussenden. Man nennt die Erscheinung Radioaktivität. Man konnte dann nachweisen, daß diese Stoffe drei verschiedene Arten von Strahlen aussenden, denen man die Namen α-, β- und γ-Strahlen gab.

Die α-Strahlen sind nackte Heliumkerne, tragen also eine positive elektrische Ladung von zwei Elementarquanten. Sie werden mit sehr großer Geschwindigkeit — bis zu $2 \cdot 10^9$ cm/sec oder 7% der Lichtgeschwindigkeit — von den radioaktiven Stoffen ausgeschleudert.

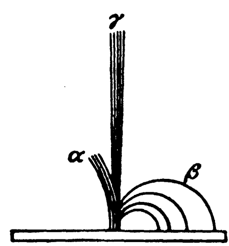
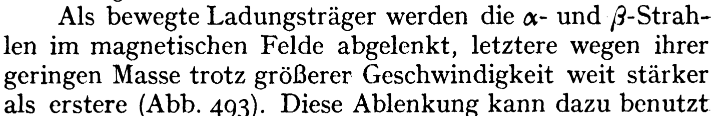


Abb. 493. α-, β- und γ-Strahlen im magnetischen Felde.

Die β-Strahlen sind äußerst schnell bewegte Elektronen. Ihre Geschwindigkeit beträgt bis zu 99% der Lichtgeschwindigkeit.

Von den γ-Strahlen war bereits in § 473 die Rede. Sie sind äußerst kurzwelliges Licht, noch kurzwelliger als die Röntgenstrahlen.


Als bewegte Ladungsträger werden die α- und β-Strahlen im magnetischen Felde abgelenkt, letztere wegen ihrer geringen Masse trotz größerer Geschwindigkeit weit stärker als erstere (Abb. 493). Diese Ablenkung kann dazu benutzt werden, ihre Geschwindigkeit zu messen, da ja ihre spezifische Ladung ε/μ bekannt ist. Die γ-Strahlen werden, als Licht, von magnetischen Feldern nicht beeinflußt.

Bereits Elster und Geitel hatten die Vermutung ausgesprochen, daß die Ursache der radioaktiven Erscheinungen in einem explosionsartigen, spontanen Zerfall der betreffenden Atome zu suchen sei. Ihren Ausbau und ihre Durchsetzung verdankt diese Theorie Rutherford. Die radioaktiven Atome sind demnach Atome mit einem instabilen Atomkern, der zu plötzlichen inneren Umlagerungen seiner Bestandteile unter Ausschleuderung eines Teils derselben neigt. Weshalb es nie vorkommt, daß dabei Wasserstoffkerne ausgeschleudert werden, sondern nur Heliumkerne und Elektronen, entzieht sich noch unserer Kenntnis (vgl. § 524). Die Entstehung der γ-Strahlen wird heute auf Grund von Arbeiten von Ellis und Meitner auf Quantensprünge von Elektronen im Innern des Atomkerns zurückgeführt. Es kann keinem Zweifel unterliegen, daß die Bindungen der Kernelektronen sehr stark sind, und daß daher solchen Quantensprüngen große Energiedifferenzen entsprechen, so daß die hohen Schwingungszahlen der γ-Strahlen dadurch gut erklärt werden.

520. **Die radioaktiven Familien.** Es ist gelungen, nachzuweisen, daß die zahlreichen, zum Teil nur in äußerst geringen Mengen vorkommenden und dann lediglich durch ihre Strahlung nachweisbaren und identifizierbaren radioaktiven Elemente untereinander in einem genetischen Zusammenhang stehen. Und zwar gehören sie drei sog. Reihen oder Familien an: der Uranreihe, der Thoriumreihe und der Aktiniumreihe. Am An-

-fange der Uranreihe steht das Uran I (U I), das sehr langsam zerfällt. Dabei entsteht aus ihm eine neue Substanz, das Uran X_1. Dieses zerfällt wieder, und zwar kann es auf zwei Weisen zerfallen. Und so setzt sich der Zerfall schrittweise weiter fort, wie dies Abb. 494 zeigt, deren nähere Erklärung unten folgt. Eines der Glieder der Uranreihe ist das Radium (Ra). Durch dessen Zerfall entsteht ein Edelgas, die Radiumemanation (Ra Em). Diese zerfällt weiter und bildet das Ra A, und schließlich endet die Reihe nach

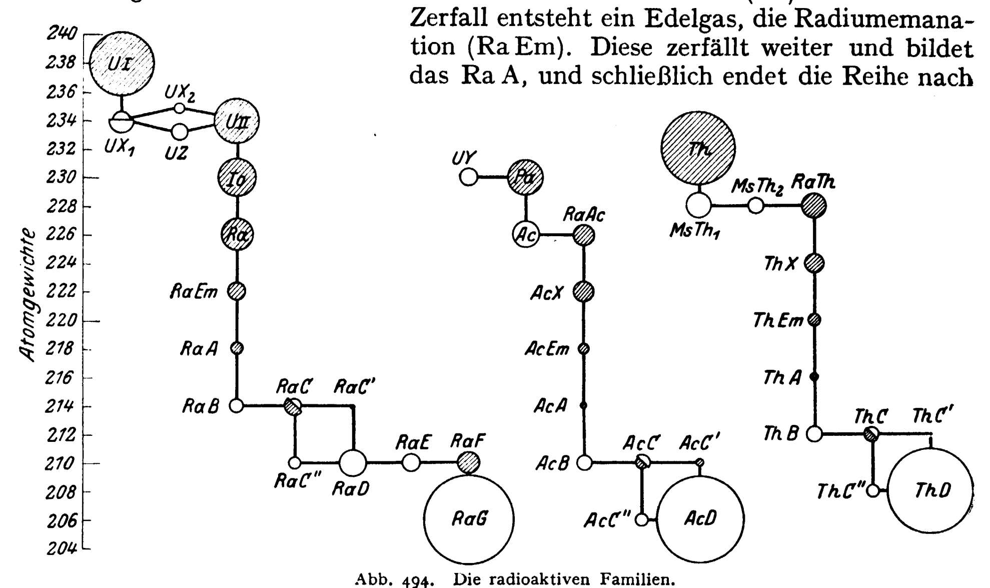


Abb. 494. Die radioaktiven Familien.

einer erneuten Verzweigung in einem nicht mehr radioaktiven, also stabilen Element (Ra G), welches chemisch mit dem gewöhnlichen Blei identisch ist, aber ein von ihm abweichendes Atomgewicht hat (206 statt 207,2; es ist eines der Isotopen, aus denen das gewöhnliche Blei besteht) und Uranblei heißt. Ra F, eine der am frühesten entdeckten radioaktiven Substanzen, heißt auch Polonium.

Ganz analog verläuft der Zerfall in der Thoriumreihe, deren Haupt das Thorium (oder vielleicht eine andere noch unbekannte Substanz, aus der dieses erst durch Zerfall entsteht) bildet, und die wieder auf dem Wege über eine Emanation (Edelgas, mit der Ra-Emanation isotop) in einer mit dem Blei isotopen Substanz, dem Th D vom Atomgewicht 208, endet. Die Aktiniumreihe beginnt mit einer Uran Y genannten Substanz, enthält ebenfalls eine Emanation und endet wieder in einer mit dem Blei isotopen Substanz, Aktinium D vom Atomgewicht 206. Zwischen den drei Reihen besteht, wie Abb. 494 zeigt, ein in die Augen fallender Parallelismus.

Die Geschwindigkeit, mit der die einzelnen Glieder einer solchen Reihe zerfallen, ist überaus verschieden. Die durchschnittliche Lebensdauer (Zeit zwischen Bildung und Zerfall) schwankt zwischen winzigen Bruchteilen einer Sekunde (beim Th C′ etwa 10^{-11} sec) und vielen Millionen von Jahren (beim U I $6{,}5 \cdot 10^9$ Jahre). Die Strahlung eines reinen Radiumpräparats sinkt in 1580 Jahren auf die Hälfte, d. h. in dieser Zeit ist die Hälfte der in ihm enthaltenen Ra-Atome zerfallen (sog. Halbwertzeit). Bei dem für Leuchtzifferblätter meist verwandten Mesothorium I (MsTh I) beträgt diese Zeit nur 6,7 Jahre.

Eine bestimmte radioaktive Atomart zerfällt entweder unter Aussendung von α-Strahlen oder von β-Strahlen. Nur an den Verzweigungsstellen (Abb. 494) kann sowohl das eine wie das andere eintreten, indem ein Teil der betreffenden Atome α-Strahlen, ein Teil β-Strahlen aussendet. Mit dem Auftreten von β-Strah-

len ist meist, aber nicht immer, das Auftreten von γ-Strahlen verbunden. Gleichzeitig mit α-Strahlen treten sie nicht auf. In Abb. 494 sind α-Strahler schwarz, β-Strahler weiß gezeichnet. (Die Endprodukte Ra G, Ac D und Th D strahlen natürlich überhaupt nicht.) Die Kreise sind um so größer gezeichnet, je langlebiger die Substanz ist. Doch stehen ihre Flächen keineswegs im Verhältnis der Lebensdauern, wie ein Vergleich der oben für Th C′ und U I angegebenen Zahlen zeigt.

Die β-Strahlen einer einheitlichen radioaktiven Substanz sind nicht einheitlich, sondern bestehen aus verschiedenen Strahlengruppen von unter sich gleicher Geschwindigkeit. Außerdem sind β-Strahlen vorhanden, deren Geschwindigkeit über einen gewissen Bereich kontinuierlich verteilt ist. Nur diese letzteren sind primäre, aus dem Kern stammende Strahlen. Erstere sind sekundäre β-Strahlen, die von dem gleichzeitig mit dem β-Strahl aus dem Kern kommenden γ-Strahl in den inneren Elektronenschalen der Atomhülle ausgelöst werden. Daher fehlen sie auch bei den wenigen Stoffen (z. B. Ra E), die keine γ-Strahlen neben den β-Strahlen aussenden. Die Energie der sekundären β-Strahlen geht auf Kosten der Energie $h\nu$ der γ-Strahlen, und so wird deren Schwingungszahl durch einen solchen Prozeß verkleinert. Das Geschwindigkeitsspektrum der sekundären β-Strahlen hat daher sein Gegenstück im Wellenlängenspektrum der γ-Strahlen.

Zwischen der mittleren Lebensdauer eines radioaktiven Atoms und der Geschwindigkeit der von ihm ausgesandten α-Strahlen besteht ein gesetzmäßiger Zusammenhang. Je langlebiger, also je stabiler ein Atom ist, desto kleiner ist diese Geschwindigkeit. Je schneller ein α-Strahl ist, desto weitere Wege (Reichweite) legt er in der Materie zurück, ehe er seine Geschwindigkeit verliert. Man gibt daher statt der Geschwindigkeit häufig die Reichweite in Luft an, die nach GEIGER und NUTTALL der dritten Potenz der Geschwindigkeit proportional ist.

Eine überaus schwache Radioaktivität zeigen auch Kalium und Rubidium; sie senden β-Strahlen aus. Nach dem Verschiebungssatz (§ 522) müßte dabei aus dem Kalium ein Kalziumisotop, aus dem Rubidium ein Strontiumisotop entstehen. Doch hat dieser Nachweis bislang, wegen der allzu geringen gebildeten Mengen, nicht geführt werden können. Neuerdings ist auch eine schwache γ-Strahlung des Kaliums nachgewiesen worden.

521. WILSONS Nebelmethode. Ein sehr schönes Verfahren zur Sichtbarmachung der Bahnen von α- und β-Strahlen ist von H. A. WILSON erdacht worden. Diese Strahlen wirken beim Durchgang durch Gase, z. B. Luft, ionisierend, erzeugen also längs ihrer Bahn Ionen. Nun wirken alle Arten von Ladungsträgern kondensationsfördernd auf Wasserdampf, also auch diese Ionen. Man läßt nun die α- oder β-Strahlen in ein luftgefülltes Gefäß treten, in dem sich nahezu gesättigter Wasserdampf befindet. Dann wird die Luft plötzlich um einen bestimmten Betrag expandiert, so daß sie sich abkühlt, und zwar so weit, daß im allgemeinen noch keine Kondensation im ganzen Raum, also keine allgemeine Nebelbildung, eintritt, wohl aber an den Ionen. Diese beladen sich mit Wassertröpfchen, und die Bahn des Teilchens, das die Ionen erzeugte, bildet eine Nebelspur. Abb. 495 und 496 zeigen Aufnahmen solcher Bahnen bei α-Strahlen. Aus Abb. 496 ist deutlich zu sehen, daß alle von dem gleichen Stoff herrührenden α-Strahlen die gleiche Reichweite haben. (Außerdem ist ein Strahl mit anormaler Reichweite zu sehen.) Charakteristisch ist bei den α-Strahlen die Geradheit der Bahnen. In Abb. 495 zeigt ein α-Strahl am Ende seiner Bahn einen Knick, der davon herrührt, daß das Teilchen einem Atomkern besonders nahe kam und von ihm abgelenkt wurde (§ 493). Abb. 497 zeigt eine WILSON-Aufnahme mit β-Strahlen. Diese werden durch die Moleküle der Luft viel stärker beeinflußt als die α-Strahlen, und ihre Bahnen sind daher in Luft gekrümmt.

522. Der radioaktive Verschiebungssatz. Ein Atom, dessen Kern einen α-Strahl, also einen mit zwei positiven Elementarquanten geladenen Heliumkern (Ordnungszahl 2, Atomgewicht 4) ausschleudert, verliert an Kernmasse um 4 Einheiten, an Kernladung um 2 Elementarquanten. Aus dem letzteren Grunde

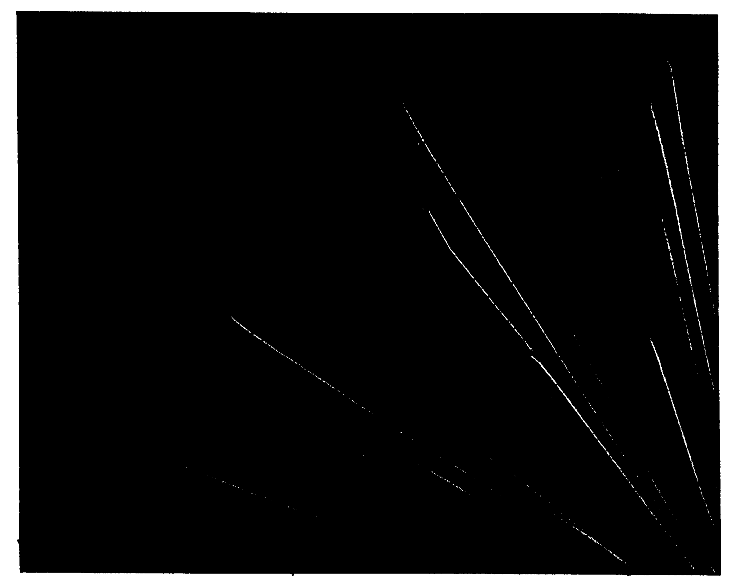


Abb. 495. Bahnen von α-Strahlen nach der Nebelmethode.

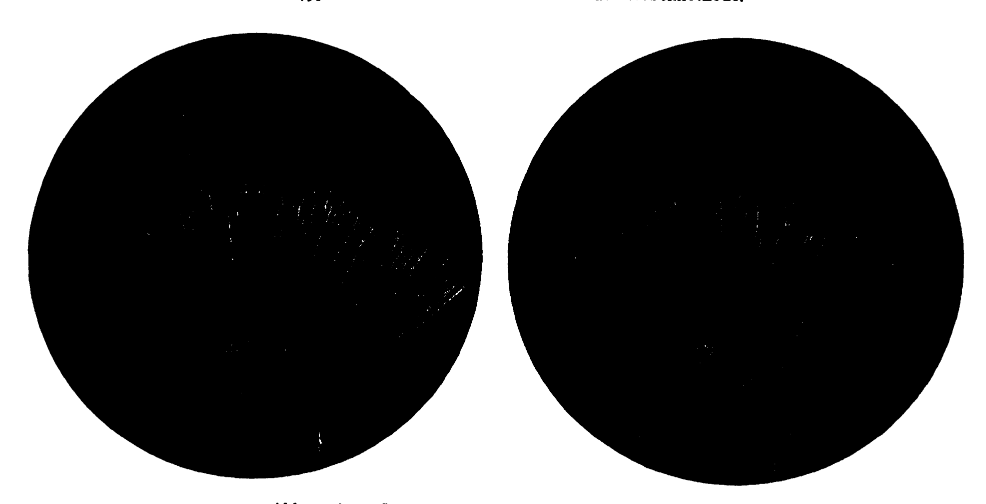


Abb. 496. α-Strahlen des Thorium C (stereoskopisch).

muß sich aber die Wertigkeit des Atoms ändern, die ja allein von der Kernladungszahl abhängt. Gehörte das Atom z. B. vor dem Zerfall der 5. Vertikalreihe des periodischen Systems an, so muß es nunmehr in die 3. Vertikalreihe rücken und deren chemische Eigenschaften annehmen. Gleichzeitig sinkt sein Atomgewicht um 4 Einheiten (z. B. Ra—RaEm, Abb. 494). Schleudert aber der Kern ein β-Teilchen, also ein Elektron, aus, so steigt seine positive Kernladung bei praktisch konstant bleibender Kernmasse, also ohne Änderung des Atomgewichtes

(z. B. Ra D—Ra E, Abb. 494), um ein Elementarquantum. Es rückt in die nächsthöhere Vertikalreihe des periodischen Systems. Aussendung eines α-Strahls bewirkt also Erniedrigung der Ordnungszahl von z auf $z-2$, Aussendung eines β-Strahls Erhöhung der Ordnungszahl von z auf $z+1$. Dieser von FAJANS und SODDY aufgestellte radioaktive Verschiebungssatz wird

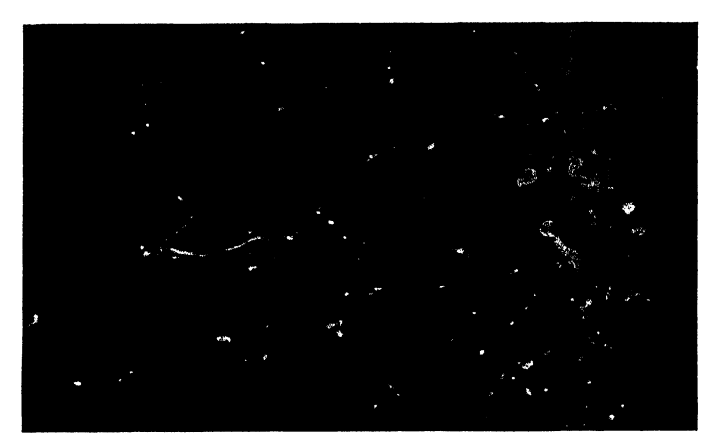


Abb. 497. Bahnen von β-Strahlen, mit der Nebelmethode sichtbar gemacht.

durch die Erfahrung vollkommen bestätigt. Er bildet eine vortreffliche Stütze unserer Anschauungen über die physikalische Natur der chemischen Wertigkeit (§ 502).

523. **Zählung der α-Strahlen.** Fallen α-Strahlen auf einen Zinksulfidkristall oder einen Diamanten, so erzeugt jedes einzelne α-Teilchen beim Aufprall einen Lichtblitz. Diese Erscheinung heißt Szintillation. Ist die Zahl der α-Teilchen gering, so kann man unter dem Mikroskop jeden einzelnen Lichtblitz wahrnehmen und die Zahl der in einer bestimmten Zeit aufprallenden Teilchen zählen. Man kann auf diese Weise feststellen, wie viele α-Teilchen ein radioaktives Präparat in 1 sec aussendet. Andererseits aber kann man auch mit Hilfe eines Elektrometers die Ladung messen, die diese Teilchen in 1 sec mit sich führen. Kennt man aber Zahl und Ladung einer größeren Zahl von Teilchen, so kann man die wegen ihrer Kleinheit nicht unmittelbar meßbare Ladung eines einzelnen Teilchens ermitteln. Auf diese Weise ist festgestellt worden, daß die α-Teilchen zwei Elementarquanten tragen. Dies im Verein mit der Messung ihrer spezifischen Ladung ε/μ lieferte den Nachweis, daß das Atomgewicht der Teilchen gleich 4 ist, daß es sich also um doppelt geladene Heliumatome, d. h. nackte Heliumkerne, handeln muß.

Eine andere Zählmethode beruht darauf, daß man die α-Teilchen in eine Ionisationskammer fallen läßt, d. h. ein Gefäß, in dem sich ein Gas befindet, das durch die α-Strahlen ionisiert wird. Mißt man bei geringer Zahl der α-Teilchen den Ionisationsstrom in der Kammer, so besteht dieser aus plötzlichen, von der Wirkung der einzelnen Teilchen herrührenden Stößen, deren Zahl gleich der Zahl der Teilchen ist. Dieses Verfahren ist von GEIGER sehr vervollkommnet worden. In der GEIGERschen Spitzenkammer (Abb. 498) befindet sich in einem Metallgehäuse A eine feine, durch eine Isolation E von ihm getrennte Spitze D, welche gegen das Gehäuse eine Spannung hat, die für eine Spitzenentladung eben noch nicht genügt

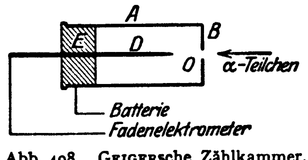


Abb. 498. GEIGERsche Zählkammer, schematisch.

(§ 288). Das Auftreten einer kleinen Zahl von Ionen in der Nähe der Spitze führt aber das Eintreten einer Spitzenentladung herbei. Dadurch wird der schwache ursprüngliche Ionisationsstrom außerordentlich verstärkt. Auf diese Weise kann die Wirkung eines einzelnen durch die Öffnung O in der Vorderseite B eintretenden α-Teilchens durch den Ausschlag eines Elektrometers beobachtet und auch photographisch registriert werden. Der Zähler ist auch für andre Arten von Strahlen verwendbar.

524. Künstliche Atomzertrümmerung. Während es sich als vollkommen unmöglich erwiesen hat, den Ablauf radioaktiver Prozesse durch irgendeinen äußeren Eingriff, z. B. sehr hohe Temperatur, auch nur im geringsten zu beeinflussen, ist es andererseits gelungen, bei einer Anzahl von stabilen Elementen einen teilweisen Zerfall der Atomkerne zu bewirken. Es gelang dies RUTHERFORD, indem er die betreffenden Substanzen einem Bombardement mit α-Strahlen aussetzte. Trifft einmal ein α-Teilchen günstig auf einen Atomkern, so vermag es Teile von ihm abzusprengen. Dies macht sich dadurch bemerkbar, daß von den betreffenden Atomen eine neue Strahlung ausgeht, die aus positiv geladenen Wasserstoffatomen, also Protonen, besteht (H-Strahlen). Man kann aus dem Energieprinzip und dem Impulssatz berechnen, daß die H-Strahlen ihre Energie nicht allein der mechanischen Einwirkung durch den Stoß des α-Teilchens verdanken können. Man muß vielmehr vermuten, daß durch den Aufprall im Kern innere Umwandlungen ausgelöst werden, bei denen die zur Ausschleuderung des Wasserstoffteilchens nötige Energie explosionsartig frei wird. Diese Versuche bilden eine starke Stütze der PROUTschen Hypothese (§ 518). Es ist sehr auffallend, daß bei dieser sog. künstlichen Atomzertrümmerung durch α-Strahlen immer Wasserstoffkerne, nicht wie bei den radioaktiven Prozessen auch Heliumkerne ausgeschleudert werden. Die von der Zertrümmerung betroffenen Atome müssen, falls es sich dabei nur um die Entfernung eines Protons aus dem Kern handelt, entsprechend den Überlegungen des § 522 wegen der Verminderung ihrer positiven Kernladung um eine Einheit durch den Verlust eines H-Kerns in ein Isotop ihres linken Nachbars im periodischen System verwandelt werden (Sinken der Ordnungszahl von z auf $z-1$). Doch ist die Anzahl der umgewandelten Atome so überaus gering — etwa ein H-Strahl auf 1 Million α-Teilchen —, daß es bislang unmöglich war, dies nachzuweisen. Neuerdings ist es wahrscheinlich geworden, daß statt der „Atomzertrümmerung" auch ein Atomaufbau stattfinden kann, indem das α-Teilchen, also ein Heliumkern, an Stelle des ausgeschleuderten Wasserstoffkerns im Kern des getroffenen Atoms steckenbleibt. Wahrscheinlich ist das sogar die Regel. In diesem Falle wären die obigen Überlegungen dahin zu modifizieren, daß die Kernladungszahl des Atoms um 1 und das Atomgewicht um 3 Einheiten steigen muß. Die künstliche Atomzertrümmerung ist erst bei einer beschränkten Anzahl von Stoffen gelungen.

COCKROFT und WALTON ist es gelungen, eine künstliche Atomzertrümmerung beim Lithium auch mit Protonenstrahlen zu bewirken, die durch eine Spannung von einigen 100000 Volt erzeugt wurden. In diesem Falle aber treten keine H-Strahlen auf, sondern Strahlen aus Heliumkernen, also künstliche α-Strahlen. Auch ihre Energie ist so groß, daß sie nicht aus derjenigen der Protonenstrahlen stammen kann, sondern nur aus der inneren Energie der betreffenden Atomkerne.

Vor einiger Zeit haben BOTHE und BECKER gefunden, daß bei der Beschießung einiger leichter Elemente, insbesondere des Berylliums, mit α-Strahlen von diesen Elementen eine überaus durchdringende Strahlung ausgeht, die anfänglich für eine künstlich erregte γ-Strahlung gehalten wurde. Weitere Ver-

suche haben aber ergeben, daß diese Strahlung wenigstens zum Teil eine Korpuskularstrahlung aus überaus schnell bewegten, elektrisch neutralen Teilchen sein muß. Man bezeichnet diese als Neutronen und vermutet, daß sie durch innige Verschmelzuug eines Protons mit einem Elektron entstehen.

35. Kapitel.

Der Bau der zusammenhängenden Materie.

525. Allgemeines. Kennt man die Eigenschaften und das Verhalten der Individuen, die einen größeren Komplex bilden, in allen Einzelheiten, so muß es grundsätzlich möglich sein, die Eigenschaften dieses größeren Komplexes aus den Eigenschaften seiner Bausteine abzuleiten. Bezüglich des Aufbaus der zusammenhängenden Materie ist dies auf Grund unserer Kenntnis von den Eigenschaften der Atome und Moleküle bereits in mancher Hinsicht gelungen. Es handelt sich dabei natürlich in erster Linie um die Frage nach den zwischen den Atomen und Molekülen wirkenden Kräften, die dazu führen, daß zwischen diesen Bausteinen der Materie ein je nach dem Aggregatzustand mehr oder minder schwer trennbarer Zusammenhang besteht, daß sie eine sog. Kohäsion besitzen.

526. Gase. Sofern wir es mit einem Gase zu tun haben, das die für ein ideales Gas geltenden Bedingungen erfüllt, sind die zwischen den Molekülen desselben wirkenden Kräfte verschwindend klein. (Nur bei den Zusammenstößen der Moleküle sind natürlich Kräfte zwischen ihnen wirksam. Man kann die Voraussetzung für den idealen Gaszustand daher genauer so formulieren, daß die Wirkung dieser Kräfte mit dem gegenseitigen Abstand der Moleküle sehr schnell abnimmt.) Auf dieser Annahme, d. h. auf dem Fehlen einer gegenseitigen potentiellen Energie der Moleküle, beruht ja die von uns früher gegebene Ableitung der einfachen Gesetze der idealen Gase. Bedingung für diesen Zustand ist großer gegenseitiger Abstand der Moleküle, d. h. geringe Dichte bzw. niedriger Druck. Ein solches Gas ist tatsächlich gar nicht als ein zusammenhängender Körper zu betrachten, sondern nur als eine Ansammlung von Molekülen im Raum.

Tatsächlich wirken zwischen den Molekülen der wirklichen Gase stets Kräfte, die VAN DER WAALSschen Kräfte (§ 164). Diese werden bei den heteropolaren Ionenmolekülen (§ 502) durch die elektrischen Kräfte geliefert, die zwischen den molekularen elektrischen Dipolen wirken. Bei den homöopolaren Molekülen fehlen die elektrischen Kräfte. Bei ihnen konnte eine Erklärung für die VAN DER WAALSschen Kräfte erst durch die Wellenmechanik geliefert werden.

Die VAN DER WAALSschen Kräfte sind bei den Ionenmolekülen durchweg stärker als bei den homöopolaren Molekülen. Daher lassen sich auch erstere leichter verflüssigen als letztere.

527. Flüssigkeiten. Amorphe Körper. Über den Bau der Flüssigkeiten ist mangels geeigneter Untersuchungsmethoden bisher noch recht wenig bekannt. Neuere Arbeiten lassen aber hoffen, daß es gelingen wird, mit Hilfe der Analyse durch Röntgenstrahlen (§ 472, DEBYE-SCHERRER-Verfahren) auch weitere Aufschlüsse über den Bau der Flüssigkeiten zu gewinnen. Man kann heute nur so viel sagen, daß bei ihnen die gegenseitige Bindung der Moleküle bis zu einem gewissen Grade vollzogen ist, ohne daß diese dabei ihre Beweglichkeit eingebüßt hätten. Die Bindungen sind noch keine endgültigen und wechseln unter der

Wirkung der thermischen Bewegung fortgesetzt. Man hat eine Flüssigkeit nicht unzutreffend mit einem Kasten voll Ameisen verglichen.

In gewissen Flüssigkeiten zeigen die Moleküle bereits eine Tendenz, sich in größeren Komplexen regelmäßig anzuordnen und sich so wenigstens in kleinen Bereichen dem kristallinischen Zustand zu nähern. Es sind dies die von LEHMANN entdeckten sog. flüssigen Kristalle (§ 459). Sie sind an charakteristischen optischen Eigenschaften kenntlich, die sie mit den eigentlichen Kristallen gemeinsam haben.

Die Flüssigkeiten lassen sich nach ihrem Verhalten bei sinkender Temperatur in zwei Gruppen einteilen. Die eine geht bei Erreichung einer bestimmten Temperatur, dem Gefrierpunkt (Schmelzpunkt), unstetig in den festen, und zwar den kristallinischen Zustand über (Wasser, die Metalle usw.). Das bedeutet den Übergang in eine Ordnung höheren Grades. Die andere vollzieht den Übergang vom flüssigen zum festen Zustand in stetiger Weise. Die Flüssigkeit wird mit sinkender Temperatur immer zäher und geht so allmählich in den festen Zustand, und zwar den amorphen Zustand, über. Sie haben also keinen wohldefinierten Gefrierpunkt. Bei dem Übergang in den amorphen Zustand findet keine Herstellung einer Ordnung höheren Grades statt. Amorphe Körper befinden sich auch im festen Zustande noch im gleichen Zustande weitgehender molekularer Unordnung wie im flüssigen, sie sind sozusagen im Zustande molekularer Unordnung eingefroren. Man kann sie in gewissem Sinne als unterkühlte Flüssigkeiten ansehen. Beispiele dieser Art sind Pech, Siegellack, Wachs und die Gläser. Vielfach zeigt sich dies in einer besonderen Plastizität. Eine auf Siegellack gelegte Münze drückt sich im Laufe der Zeit ab.

528. **Kristalle.** Als feste Körper im eigentlichen Sinne sind die Kristalle anzusehen, deren atomistischer Aufbau uns durch die Strukturanalyse mit Röntgenstrahlen (§ 472) heute weitgehend erschlossen ist. Die Ordnung höheren Grades, die beim Festwerden der Flüssigkeiten zu Kristallen eintritt, ist dadurch gekennzeichnet, daß sich die elementaren Bausteine des Körpers in ganz regelmäßiger Weise in ein Raumgitter ordnen. D. h. diese Bausteine sind im Körper an feste Ruhelagen gebunden. Ihre einzige Bewegungsmöglichkeit besteht in Schwingungen um diese Ruhelagen.

Häufig ist mit dem Übergang flüssig $\rightleftarrows$ fest auch eine Änderung des molekularen Gefüges verbunden. Nicht bei allen Substanzen treten die Moleküle so, wie sie sich vorher in der Flüssigkeit befanden, unmittelbar in die Gitterpunkte des Raumgitters (Molekülgitter). In vielen Fällen bilden die Kristalle ein Atomgitter, bei denen Atome, die als Ganzes elektrisch neutral sind, die Gitterpunkte einnehmen. Drittens gibt es Ionengitter, wie z. B. den Steinsalzkristall. Bei diesen sind die einzelnen Gitterpunkte mit Ionen besetzt. Beim Steinsalz sind dies positive Na-Ionen und negative Cl-Ionen, also die gleichen Ionen, in die das Steinsalz bei der Lösung dissoziiert. In allen Fällen sind es die gleichen Kräfte, die wir bereits bei der Molekülbildung kennengelernt haben, die auch die Bindung der Bausteine eines Kristallgitters bewirken. Die geometrische Anordnung der Bausteine des Gitters kann außerordentlich verschieden sein. Sie ist natürlich durch die Eigenschaften dieser Bausteine in jedem Einzelfall bedingt. Das äußere Merkmal der geometrischen Anordnung ist bis zu einem gewissen Grade die kristallographische Form.

Wir betrachten als ein besonders einfaches Beispiel den Steinsalzkristall, NaCl, der ein würfelförmiges Raumgitter besitzt (Abb. 457, § 472). In diesem wechseln positive Na-Ionen ganz regelmäßig mit negativen Cl-Ionen ab. Als Abstand dieser Ionen, d. h. als Kantenlänge eines „Elementarwürfels", ergibt die Analyse mit Röntgenstrahlen $2{,}83 \cdot 10^{-8}$ cm. Es ist dies die Größen-

ordnung der Atomdurchmesser (§ 493). Die Richtigkeit dieses Wertes kann man, den geschilderten Bau vorausgesetzt, auch auf andere Weise bestätigen. 1 ccm Steinsalz wiegt 2,16 g. Ein Na-Atom (Atomgewicht 23) wiegt 23 mal soviel wie ein Wasserstoffatom, also $23 \cdot 1{,}65 \cdot 10^{-24}$ g $= 3{,}80 \cdot 10^{-23}$ g, ein Cl-Atom (Atomgewicht 35,5) $35{,}5 \cdot 1{,}65 \cdot 10^{-24}$ g $= 5{,}86 \cdot 10^{-23}$ g. Das mittlere Gewicht der beiden Komponenten des Kristalls beträgt also $4{,}83 \cdot 10^{-23}$ g. Die Kantenlänge eines Elementarwürfels sei d cm. Dann ist das Gewicht eines Elementarwürfels $2{,}16\ d^3$ g. Jede der acht Ecken eines Elementarwürfels ist mit einem Ion besetzt. Jedes dieser Ionen aber gehört gleichzeitig acht Elementarwürfeln an. Daher ist die Zahl der Ionen im Kristall gleich der Zahl der Elementarwürfel und demnach das auf einen Elementarwürfel entfallende Gewicht gleich dem mittleren Gewicht der Ionen. Es ist demnach $2{,}16\ d^3 = 4{,}83 \cdot 10^{-23}$ oder wieder $d = 2{,}83 \cdot 10^{-8}$ cm. Diese Berechnung setzt Kenntnis der Masse des Wasserstoffatoms voraus. Sie ist bekannt, wenn man die LOSCHMIDTsche Zahl kennt (§ 96). Man kann daher auch umgekehrt aus der durch Röntgenstrahlanalyse gemessenen Größe des Elementarwürfels die Masse des Wasserstoffatoms und daraus die LOSCHMIDTsche Zahl berechnen.

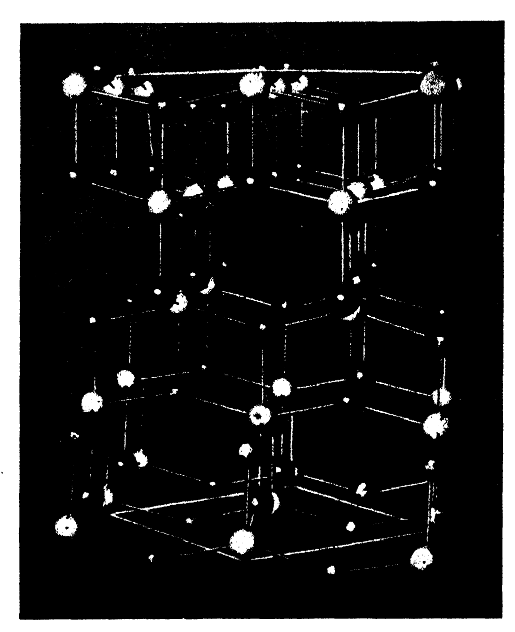


Abb. 499. Modell des Raumgitters des Anatas, TiO_2, Ti hell, O dunkel.

Weder bei einem Atomgitter noch bei einem Ionengitter kann man von einzelnen Molekülen reden, da es eine reine Willkür wäre, wenn man z. B. beim NaCl-Kristall irgendwelche zwei Na- und Cl-Ionen einander bevorzugt zuordnen wollte. Jedes Na-Ion ist acht Cl-Ionen in genau der gleichen Weise benachbart und umgekehrt. Ein einheitlicher Kristall bildet sozusagen ein einziges großes Molekül.

Abb. 499 zeigt ein Modell eines komplizierteren Raumgitters, des Anatas, TiO_2.

Wird ein Kristall in ein elektrisches Feld gebracht, so überlagern sich die von dem Felde herrührenden Kräfte den atomaren Kräften, die die Bausteine des Kristalls in ihren Ruhelagen festhalten, und bewirken eine Verschiebung der positiven Anteile in Richtung, der negativen Anteile gegen die Richtung des Feldes. Die Folge ist das Auftreten von Ladungsüberschüssen entgegengesetzten Vorzeichens an den Grenzflächen des Körpers, also die dielektrische Polarisation.

IX. Relativitätstheorie.

Die Relativitätstheorie wird am Schlusse dieses Buches besprochen, weil zu ihrem Verständnis ein Maß an physikalischen Kenntnissen erforderlich ist, das an der formal richtigen Stelle, in der Mechanik, noch nicht vorausgesetzt werden konnte. Diese Äußerlichkeit darf nicht darüber täuschen, daß die Relativitätstheorie heute zu den wichtigsten Grundlagen gehört, auf denen die Physik ruht. Ihre beiden Prinzipien, das Relativitätsprinzip und das Prinzip der Äquivalenz von Trägheit und Schwere (Äquivalenzhypothese), stehen gleichwertig neben den anderen Prinzipien der Mechanik und den fundamentalen Erhaltungssätzen der Masse, der Elektrizität, der Energie und der Bewegungsgröße, bzw. ergänzen sie.

36. Kapitel.

Die spezielle Relativitätstheorie.

529. **Das Relativitätsprinzip der Mechanik.** Die exakte physikalische Beschreibung irgendeines mechanischen Vorgangs besteht nach der klassischen Physik darin, daß man den funktionellen Zusammenhang angibt, der zwischen den drei Raumkoordinaten x, y, z jedes Punktes eines materiellen Körpers und der Zeit t besteht. Wir haben bisher die spezielle Wahl dieses Koordinatensystems für unwesentlich gehalten. Insbesondere haben wir bei der Beschreibung mechanischer Vorgänge auf der Erde durchweg stillschweigend Koordinatensysteme zugrunde gelegt, die eine unveränderliche Lage bezüglich der Erde hatten, die „relativ" zur Erde ruhten, ohne uns darüber Gedanken zu machen, daß ein solches Koordinatensystem infolge der Drehung der Erde um sich selbst und um die Sonne eine recht verwickelte Bewegung ausführt. Lediglich bei der Besprechung der Trägheitswirkungen, die von der Erddrehung herrühren, haben wir einen Einfluß der letzteren berücksichtigt. In allen anderen Fällen haben wir die Erdbewegung nicht beachtet, uns also nicht die Frage vorgelegt, ob nicht etwa die Bewegung der Erde im Weltraum, also zum mindesten die Rotation um die Sonne, geschweige denn die ebenfalls vorhandene Bewegung des ganzen Sonnensystems, einen Einfluß auf die Gesetze hätten, die wir aus der Beschreibung der Einzelvorgänge ableiten.

Die Bewegung der Erde um die Sonne ist innerhalb der Zeitdauer, in der unsere mechanischen Versuche abzulaufen pflegen, mit außerordentlich großer Annäherung noch als geradlinig und gleichförmig anzusehen. Die Richtung der Erdbewegung ändert sich ja innerhalb eines Tages nur ziemlich genau um 1^{0}, innerhalb einer Minute nur um rund $2{,}5''$. Und es gilt in der Mechanik, daß eine geradlinige und gleichförmige Bewegung des Koordinatensystems, auf das man irgendwelche mechanischen Vorgänge bezieht, des sog. Bezugssystems, an den aus diesen Vorgängen abgeleiteten Gesetzmäßigkeiten nichts ändert,

wenn auch die Beschreibung der Einzelvorgänge verschieden ausfällt, je nachdem, auf was für ein Bezugssystem man sie bezieht. Das ist das Relativitätsprinzip der Mechanik. Es ist seit langem sicherer und unbestrittener Besitz der Wissenschaft. Befände sich also ein Physiker in einem geradlinig und gleichförmig bewegten, von der Außenwelt vollkommen abgeschlossenen Laboratorium, so würden sich die Gesetze der Mechanik, die er durch Versuche ermitteln würde, durch nichts von denjenigen Gesetzen unterscheiden, die ein zweiter Beobachter in einem andern Laboratorium aufstellen würde, das sich gegenüber dem ersten mit einer andern geradlinigen und gleichförmigen Geschwindigkeit bewegt. Ein Bezugssystem, das sich geradlinig und gleichförmig bewegt, nennt man ein Inertialsystem. Es sind also alle Inertialsysteme, zunächst soweit es mechanische Vorgänge betrifft, einander physikalisch vollkommen gleichwertig.

Als Beispiel wollen wir uns ein Laboratorium denken, das in einem Eisenbahnzuge vollkommen erschütterungsfrei, horizontal, geradlinig und gleichförmig über die als vollkommen eben gedachte Erdoberfläche fährt. Untersuchen wir in einem solchen Laboratorium den freien Wurf und Fall der Körper unter der Wirkung der Schwere und beschreiben die Einzelvorgänge in einem mit dem Zuge bewegten Inertialsystem, so fällt die Beschreibung jeweils anders aus, als sie bei einem Beobachter ausfallen würde, der die identischen Vorgänge von außen her in einem mit der Erde fest verbundenen Inertialsystem beschreibt. Lassen wir z.B. im Zuge einen Körper frei fallen, so entspricht unsere Beschreibung dem freien senkrechten Fall. Denn für uns hat der Körper bei Beginn seiner Bewegung keine horizontal gerichtete Anfangsgeschwindigkeit. Für den auf der festen Erdoberfläche befindlichen Beobachter aber hat er eine solche, nämlich die Fahrtgeschwindigkeit des Zuges. Er beschreibt den Vorgang in seinem Bezugssystem als Wurf mit horizontaler Anfangsgeschwindigkeit und die Bahn des Körpers als den einen Ast einer Parabel. Bei der Aufstellung der allgemeinen Gesetze des Wurfs und Falls aber kommen beide Beobachter zu identischen Ergebnissen. Ein Unterschied besteht nur bei der Beschreibung der Einzelvorgänge, bei der sie verschiedene Anfangsbedingungen zugrunde legen.

Hat eine geradlinige und gleichförmige Bewegung des Bezugssystems keinerlei Einfluß auf irgendeinen mechanischen Vorgang, der sich in ihm abspielt, so folgt daraus umgekehrt: Es besteht grundsätzlich keine Möglichkeit, mit Hilfe von mechanischen Experimenten irgend etwas über eine geradlinige und gleichförmige Bewegung des Bezugssystems zu erfahren. Hingegen ist eine Beschleunigung des Bezugssystems feststellbar, wie wir ja durch mechanische Versuche auf der Erde (FOUCAULTscher Pendelversuch usw., § 49) die Drehung der Erde um sich selbst ohne weiteres feststellen können. (Man beachte, daß eine Rotation eine beschleunigte Bewegung ist.)

In der Erkenntnistheorie hat der Begriff der „absoluten Bewegung" eine wichtige Rolle gespielt. Er beruht auf der Vorstellung, daß dem Raume an sich, auch wenn er von jeglicher Materie vollkommen frei wäre, eine reale Existenz zukomme, daß man in ihm, auch wenn es keine Körper in ihm gäbe, an denen man sozusagen ein Koordinatensystem befestigen könnte, doch bestimmte Koordinatensysteme angeben könne, welche in diesem „absoluten Raum" ruhen. Ist dies richtig, so ist es, zunächst bei Beschränkung auf mechanische Vorgänge, grundsätzlich unmöglich, diese ruhenden Koordinatensysteme von denjenigen zu unterscheiden, die sich ihnen gegenüber geradlinig und gleichförmig bewegen. Falls also nicht etwa eine solche Feststellung auf Grund elektrischer oder optischer Versuche möglich sein sollte, ist uns eine Kenntnis des „absoluten" Bewegungszustands grundsätzlich verwehrt. Was wir feststellen können, sind lediglich

„relative" Bewegungen, d. h. die Geschwindigkeit, die ein Bezugssystem gegenüber einem andern, relativ zu ihm, hat, z. B. ein Eisenbahnzug relativ zur Erde.

Vom Standpunkt der Mechanik aus sind wir daher auch berechtigt, jedes beliebige Inertialsystem mit gleichem Recht als ruhend zu betrachten, ohne damit die physikalischen Gesetze zu fälschen. Bewegt sich ein Koordinatensystem S' mit der Geschwindigkeit $+v$ gegenüber einem andern System S, so können wir letzteres als ruhend, ersteres als bewegt ansehen. Umgekehrt aber dürfen wir mit gleichem Recht S' als ruhend ansehen und sagen, S habe relativ zu ihm eine Geschwindigkeit $-v$.

530. **Die GALILEI-Transformation.** Wir bezeichnen künftig die Koordinaten eines Punktes in zwei mit der Geschwindigkeit v relativ zueinander bewegten Bezugssystemen S und S' mit x, y, z bzw. x', y', z'. Die beiden Koordinatensysteme wollen wir uns stets so gelegt denken, daß die x-Achse und die x'-Achse gleichgerichtet sind und in die gleiche Gerade und in die Richtung der Geschwindigkeit v von S' relativ zu S fallen, und daß die y- und die y'-Achse sowie die z- und die z'-Achse einander parallel sind. Den Anfangspunkt der Zeit wählen wir so, daß zur Zeit $t = 0$ die beiden Koordinatensysteme genau zusammenfallen, also $x' = x$ ist.

Wir betrachten einen Punkt mit den Koordinaten x', y', z' im System S', das sich als Ganzes gegenüber einem System S mit der Geschwindigkeit v in der Richtung der x-Achse bewege. Dann bewegt sich auch jeder solche Punkt in S' gegenüber S mit der gleichen Geschwindigkeit, und die Koordinaten des Punktes im System S sind unter Zugrundelegung der klassischen Mechanik

$$x = x' + vt, \quad y = y', \quad z = z'. \tag{1a}$$

Nehmen wir noch an, daß den Zeitmessungen in beiden Systemen die gleiche Zeiteinheit und der gleiche Anfangspunkt zugrunde gelegt wird, so ist, wenn wir die Zeitangaben in S und S' mit t und t' bezeichnen,

$$t = t'. \tag{1b}$$

Statt Gl. 1a und b können wir umgekehrt auch schreiben

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \; t' = t. \tag{2}$$

Gl. 1a, 1b und 2 sind die sog. GALILEI-Transformationen. Gl. 2 geht aus Gl. 1 hervor, indem man die Koordinaten der beiden Systeme vertauscht und $+v$ durch $-v$ ersetzt. Wir können sagen, daß in Gl. 1 das System S als ruhend, das System S' als ihm gegenüber mit der Geschwindigkeit $+v$ bewegt angesehen wird, in Gl. 2 aber umgekehrt S als gegenüber dem ruhenden System S' mit der Geschwindigkeit $-v$ bewegt.

Welches der beiden Bezugssysteme wir verwenden wollen, ist für die Form der mechanischen Gesetze gleichgültig. Die Gesetze der Mechanik sind gegenüber einer GALILEI-Transformation, wie man sagt, invariant.

531. **Der MICHELSON-Versuch.** Die sog. klassische Physik stand auf dem Standpunkt, daß letzten Endes alle physikalischen Erscheinungen in irgendeiner Weise mechanischer Natur sein müßten. Zur Durchführung dieses Grundsatzes ersann man als materiellen Träger der elektrischen und magnetischen Felder, also zur mechanischen Erklärung der elektrischen, magnetischen Felder und der optischen Erscheinungen, den Äther, eine unwägbare Substanz, die den ganzen Raum und alle Körper durchdringe und erfülle. Wegen dieser universellen Verbreitung des hypothetischen Äthers im ganzen Kosmos lag es nahe, ihn als den eigentlichen Repräsentanten des absoluten Raumes anzusehen bzw. als das

Etwas, an das man ein bevorzugtes Koordinatensystem sozusagen befestigen könne, das man als absolut ruhend anzusehen berechtigt sei.

Es erhob sich daher die Frage, ob eine Bewegung im Äther etwa durch einen elektrischen oder optischen Versuch nachgewiesen werden könne. Legen wir die GALILEI-Transformation zugrunde, so scheint es in der Tat, als müsse das möglich sein. Wir nehmen an, ein System S sei ein im Äther absolut ruhendes Koordinatensystem. In einem solchen muß sich das Licht im Vakuum nach allen Richtungen mit der Geschwindigkeit c gleich schnell fortpflanzen. Das System S', etwa die Erde, bewege sich wieder mit der Geschwindigkeit v in Richtung der x-Achse. Wir betrachten jetzt zwei gleichzeitig vom Nullpunkt ($x = y = z = 0$) des ruhenden Systems ausgesandte Lichtstrahlen, deren einer in Richtung der positiven ($+ c$) und deren anderer in Richtung der negativen x-Achse ($- c$) verläuft. Ihre Geschwindigkeit ist also in S gleich $dx/dt = + c$ bzw. $dx/dt = - c$. Bilden wir jetzt die entsprechenden Größen in S', so erhalten wir nach Gl. 2

$$c' = \frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - v = c - v \quad \text{bzw.} \quad c' = - c - v = - (c + v) .$$

Von S' aus beurteilt, muß also die Lichtgeschwindigkeit in den beiden Richtungen eine verschiedene sein. Für Strahlen, die irgendwelche andere Winkel gegen die x-Achse bilden, ergeben sich leicht berechenbare Werte, die zwischen den obigen Grenzen liegen. D. h. vom System S' aus beurteilt, muß die Lichtgeschwindigkeit in den verschiedenen räumlichen Richtungen eine verschiedene sein. Gelingt es, die Geschwindigkeiten in verschiedenen Richtungen zu vergleichen, so könnte man daraus die Größe und Richtung der „absoluten Geschwindigkeit" v im Äther berechnen.

Auf diesen Gedanken gründet sich der Versuch von MICHELSON (1881). Voraussetzung ist bei ihm, daß nicht etwa die Erde (auch bezüglich ihrer Rotation) zufällig im Äther ruhe, eine Annahme, die sich schon wegen der Kompliziertheit der Bewegung der einzelnen Punkte der Erdoberfläche durchaus verbietet. (Der Gedanke, daß die bewegte Erde den Äther an ihrer Oberfläche mit sich führe, ist durch besondere Versuche in größeren Höhen widerlegt worden.) MICHELSONS Apparat, dessen Prinzip Abb. 500 ganz schematisch darstellt, ist ein Interferometer von anderer Konstruktion, als wir es im § 443 besprochen haben. Von der Lichtquelle L geht monochromatisches Licht aus, das an einer halbdurchlässigen (schwachversilberten) Glasplatte G in zwei gleich starke, kohärente Strahlenbüschel zerlegt wird, die senkrecht zueinander auf die beiden in gleicher Entfernung l (einige Meter) stehenden Spiegel Sp_1 und Sp_2 verlaufen. An diesen werden sie wieder nach G reflektiert, dort zum Teil durchgelassen bzw. rechtwinklig reflektiert und gelangen zusammen in ein Fernrohr F. (Alle Vorrichtungen, die z. B. zum Parallelmachen des von L ausgehenden Strahlenbüschels zwischen G und Sp_1 bzw. Sp_2 usw. dienen, sind in Abb. 500 fortgelassen.) Da die beiden in das Fernrohr fallenden Strahlenbüschel kohärent sind (§ 437), so entsteht in der Brennebene des Fernrohrokulars ein System von Interferenzstreifen, d. h. hellen und dunklen Linien. Denn die einzelnen Strahlen haben, auch bei gleicher Länge der beiden Arme der Apparatur, abgesehen von der Mitte des Gesichtsfeldes etwas verschiedene Wege bis zu den

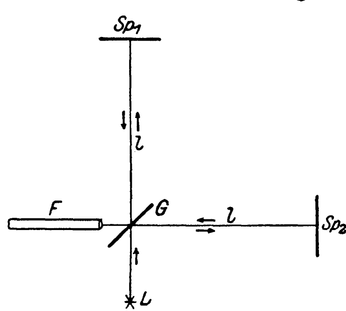


Abb. 500.
Schema des Versuchs von MICHELSON.

einzelnen Punkten dieser Ebene zurückzulegen, haben also einen vom Abstande von der Mitte abhängigen Gangunterschied (vgl. den FRESNELschen Spiegelversuch, § 438). Würden wir jetzt z. B. den Abstand G—Sp_2 verkürzen, so würden sich diese Gangunterschiede ändern, die Interferenzstreifen würden sich ein wenig verschieben. Das gleiche wäre der Fall, wenn wir an Stelle der im Strahlengange befindlichen Luft in den Weg des einen der beiden Teilstrahlen eine brechende Substanz brächten, da dadurch die Geschwindigkeit und damit die optische Weglänge (§ 409) dieses Strahls geändert würde. Das gleiche aber müßte auch geschehen, wenn auf irgendeine andere Weise das Verhältnis der Lichtgeschwindigkeiten längs der beiden Lichtwege sich ändert. Denn Änderung der Lichtgeschwindigkeit, ganz gleich welches ihre Ursache ist, bewirkt Änderung der optischen Weglänge.

Ist die GALILEI-Transformation auf diesen Versuch anwendbar, so müßte er das erwartete Ergebnis haben. Angenommen der Apparat stehe so, daß der nach Sp_2 verlaufende Strahl in Richtung der absoluten Bewegung des Apparats (der Erde) stehe, dann wäre die Lichtgeschwindigkeit für einen mit dem Apparat bewegten Beobachter in dieser Richtung kleiner als in jeder andern, also auch in der dazu senkrechten Richtung. Dreht man jetzt den Apparat nebst dem Fernrohr um 90°, so daß der andere Strahl in die Richtung der Erdbewegung fällt, so kehren sich die Verhältnisse um. Die optische Weglänge ist jeweils für den in Richtung der Bewegung verlaufenden Strahl größer. Stehen die beiden Arme unter 45° gegen die Bewegung, so sind die Lichtwege gleich. Bei einer Drehung des Apparats müßte sich daher eine periodische Verschiebung der Interferenzstreifen, entsprechend der periodischen Änderung der Lichtgeschwindigkeit längs der beiden Lichtwege, zeigen. Eine Berechnung zeigt, daß der Effekt vollkommen deutlich und meßbar sein müßte.

Wir betrachten den Fall, daß der auf Sp_2 verlaufende Strahl in Richtung der Erdbewegung liege. Die Lichtgeschwindigkeit im ruhenden System (Äther) ist in allen Richtungen gleich c. Zum Durchlaufen des Weges $G - Sp_1 = a$ (Abb. 501a) und zurück braucht das Licht nicht etwa die Zeit $2\,l/c$. Da sich G währenddessen ein wenig (um die Strecke $2b$) verschiebt, muß der Strahl ein wenig gegen den Spiegel Sp_1 geneigt sein, wenn er wieder auf die gleiche Stelle von G treffen soll (G bzw. G' bezeichnet hier und im folgenden die Stellung der Glasplatte im Augenblick des Abgangs und der Wiederkehr des Lichtes). Es sei t_1 die Zeit, die das Licht für seinen Hin- und Rückweg bzw. der Spiegel G zu seiner Verschiebung von G bis G' benötigt. Dann ist $t_1 = 2\,a/c = 2\,b/v$, also $b = a\,\frac{v}{c}$ oder da $a^2 = l^2 + b^2$

$$s_1 = 2a = \frac{2\,l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (3)$$

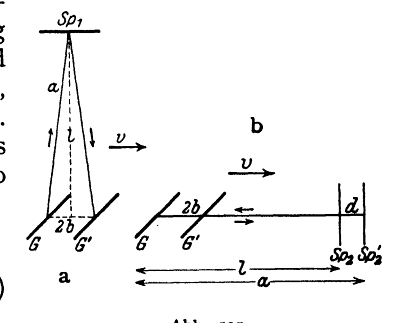


Abb. 501.
Zur Erklärung des MICHELSON-Versuchs.

Wir gehen jetzt zum zweiten Strahl über. Es bedeute Sp_2 (Abb. 501b) die Stellung des Spiegels beim Abgang des Lichtes von G, Sp_2' diejenige im Augenblick der Reflexion. Der Weg von G bis Sp_2' sei gleich a, die Verschiebung von G gleich $2b$, also der Weg des Lichtstrahls gleich $2a - 2b$, die Verschiebung des Spiegels von Sp_2 bis Sp_2' gleich d. Betrachten wir nur den Hinweg des Lichtes, so ist die dazu nötige Zeit $t_2' = a/c = d/v$, so daß $d = a \cdot v/c$. Andererseits ist $a = l + d$, so daß folgt $a = l/(1 - v/c)$. Für den ganzen Hin- und Rückweg braucht das

Licht die Zeit $t_2 = 2(a - b)/c = 2b/v$, woraus folgt $b = \frac{a\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}$. Daraus ergibt sich als Weg des Lichtes

$$s_2 = 2(a - b) = \frac{2l}{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{4}$$

Aus Gl. 3 und 4 folgt schließlich

$$s_2 : s_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{bzw.} \quad s_2 = s_1 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{5}$$

Drehen wir jetzt den Apparat um 90°, so müßte sich, immer die Richtigkeit unserer Grundlagen vorausgesetzt, das Verhältnis der beiden Lichtwege umkehren, wie wir es oben vorausgesagt haben. Die zu erwartende Wirkung ist also die gleiche, die wir erhalten würden, wenn wir den in der Geschwindigkeitsrichtung liegenden Arm bei ruhendem Apparat im Verhältnis $1 : \sqrt{1 - v^2/c^2}$ gegenüber dem andern verlängert hätten.

Das Ergebnis des seitdem noch mehrfach, in letzter Zeit besonders sorgfältig von Joos wiederholten Michelson-Versuchs ist gewesen, daß von einem derartigen Einfluß der Erdbewegung nicht das mindeste zu bemerken ist. Der Versuch verläuft genau so, wie man es erwarten müßte, wenn die Erde im Äther ruhte, also $v = 0$ wäre. Da dieses Ergebnis aber den bisherigen Grundvorstellungen widerspricht, so muß also an den letzteren irgend etwas der Wirklichkeit nicht Entsprechendes sein.

532. **Die Grundlagen der speziellen Relativitätstheorie.** Man kann das Ergebnis des Michelson-Versuchs dahin aussprechen, daß sich das Licht relativ zur bewegten Erde, also jedenfalls auch zu jedem andern bewegten Bezugssystem, wider alles Erwarten in allen Richtungen gleich schnell fortpflanzt. Es ist die Vermutung aufgetaucht, daß dies seinen Grund darin habe, daß sich die Geschwindigkeit der Lichtquelle, die ja beim Michelson-Versuch mitbewegt wird, zu der Lichtgeschwindigkeit addiere. Dem widersprechen gewisse astrophysikalische Beobachtungen entscheidend. Demnach kann jeder von einer Anzahl von relativ zueinander gleichförmig und geradlinig bewegten Beobachtern mit dem gleichen Recht behaupten, in seinem Bezugssystem breite sich ein Lichtblitz — und zwar für alle Beobachter ein und derselbe — in Gestalt einer Kugelwelle um seinen Ursprung aus. Nach unsern gewöhnlichen Anschauungen von Raum und Zeit, wie sie den beim Michelson-Versuch angestellten Überlegungen zugrunde liegen, ist das vollkommen unmöglich. Es besteht hier ein Widerspruch der experimentellen Erfahrung mit den alten Raum- und Zeitbegriffen, der längere Zeit unlösbar schien.

Ihn zu lösen gelang im Jahre 1904 Einstein, indem er auf Grund des durch den Michelson-Versuch einwandfrei festgestellten Tatbestandes die Begriffe Raum und Zeit einer Kritik unterzog. Er ging davon aus, daß der Widerspruch in der auf den alten Begriffen beruhenden Galilei-Transformation liegen müsse und daß diese durch eine andere zu ersetzen sei. Diese neue Transformation fand er, indem er, in vollkommen strenger Konsequenz, auf Grund des Michelson-Versuchs das Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit aufstellte, welches besagt: Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum, bezogen auf irgendein Inertialsystem, ist unabhängig von der Bewegung dieses Systems. Und ganz allgemein folgerte er: Es gibt überhaupt keinen physikalischen Vorgang, dessen Ablauf irgend etwas über eine geradlinige und gleichförmige Bewegung des Bezugssystems aussagte.

Eine absolute Bewegung ist grundsätzlich unbeobachtbar und gehört daher nicht in den Bereich des physikalisch Wirklichen. Beobachtbar sind nur relative Bewegungen von Inertialsystemen. Diese Aussagen bilden das EINSTEINsche Relativitätsprinzip.

Die Vorstellung von der Existenz des Lichtäthers kann natürlich nicht mehr aufrechterhalten werden. Wenn trotzdem das Wort Äther noch gelegentlich gebraucht wird, so hat das mit der alten Vorstellung eines materiellen Stoffes nichts zu tun. Man versteht darunter lediglich den Raum als Objekt der Physik im Gegensatz zum geometrischen Raumbegriff, nämlich den Raum als Träger elektrischer und magnetischer Felder.

533. **Die LORENTZ-Transformation.** Die Ableitung der Transformation, die hiernach an die Stelle der GALILEI-Transformation zu setzen ist, geben wir in der folgenden, von BORN stammenden Form. Wir betrachten wieder zwei mit der Geschwindigkeit v relativ zueinander bewegte Systeme S und S' mit der in § 530 festgelegten Richtung der Achsen und der relativen Geschwindigkeit. Die senkrecht zur Bewegungsrichtung liegenden Koordinaten eines Punktes müssen in beiden Systemen einander gleich sein, nicht aber x und x'. Ebensowenig darf man voraussetzen, daß der mit vollkommen gleichartigen Uhren gemessene Zeitablauf in den beiden Systemen der gleiche und vom Ort unabhängig ist. x' und t' sind als Funktionen von x und t anzusetzen, und umgekehrt x und t als Funktionen von x' und t'. Die neue Transformation muß also die allgemeine Gestalt haben

$$x' = x'(x, t), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t'(x, t), \tag{6a}$$

bzw.

$$x = x(x', t'), \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t(x', t'). \tag{6b}$$

Wir betrachten jetzt die beiden Koordinatenursprünge in den Systemen S und S' ($x = 0$ bzw. $x' = 0$). Bewegt sich S' gegenüber S mit der Geschwindigkeit v in der x-Richtung, so tut das auch der Punkt $x' = 0$ gegenüber dem Punkt $x = 0$. Es ist also die Aussage $x' = 0$ gleichbedeutend mit der Aussage $x - vt = 0$. Betrachtet man aber umgekehrt S' als ruhend, was wir ja dürfen, so bewegt sich jetzt S gegenüber S' mit der Geschwindigkeit $-v$. Demnach ist jetzt die Aussage $x = 0$ gleichbedeutend mit der Aussage $x' + vt' = 0$. Daher muß, wegen der gleichzeitigen Gültigkeit der jeweils nebeneinander gestellten Aussagen, allgemein sein

$$a x' = x - vt, \tag{7a}$$

$$a x = x' + vt'. \tag{7b}$$

a ist ein zunächst unbekannter Faktor, der in beiden Gleichungen derselbe sein muß, weil sich die beiden Ausdrücke wegen des Relativitätsprinzips durch nichts anderes unterscheiden dürfen, als durch die Vertauschung der Koordinaten und des Vorzeichens von v. Um den Faktor a zu bestimmen, eliminieren wir x' aus den Gl. 7a und 7b und erhalten

$$a t' = \frac{a^2 - 1}{v} x + t. \tag{8}$$

Eine gleichförmige, geradlinige Bewegung in der x-Richtung ist im System S durch $u = x/t$, im System S' durch $u' = x'/t'$ gegeben. Und zwar soll es sich um die gleiche Bewegung, von den beiden Systemen aus beurteilt, handeln. Dividieren wir Gl. 7a durch Gl. 8, so folgt:

$$u' = \frac{x'}{t'} = \frac{x - v t}{(a^2 - 1)\frac{x}{v} + t} = \frac{u - v}{(a^2 - 1)\frac{u}{v} + 1}. \tag{9}$$

Nun sei die Bewegung, die wir betrachten, die eines in der x-Richtung bewegten Lichtstrahls. Nach dem Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit muß diese in beiden Systemen die gleiche, also für diesen Fall $u' = u = c$ sein. Man erhält dann aus Gl. 9 leicht

$$a = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{10}$$

Führen wir dies jetzt in die Gl. 7a und 7b ein, so erhalten wir folgende neue Transformationen

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{11a}$$

bzw.

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{11b}$$

Diese Transformation, eine absolut strenge Folgerung aus dem MICHELSON-Versuch, ist bereits von H. A. LORENTZ (1891) zur formalen Deutung dieses Versuches aufgestellt worden. Sie heißt daher die LORENTZ-Transformation. Eine allgemeine Begründung aber vermochte erst EINSTEIN ihr zu geben.

Die LORENTZ-Transformation geht bei kleiner Geschwindigkeit v, d. h. wenn $v/c \ll 1$, wie man leicht sehen kann, in die GALILEI-Transformation, Gl. 1 und 2, über, enthält diese also als Grenzfall für kleine Relativgeschwindigkeiten. Die Bedingung $v/c \ll 1$ trifft aber für materielle Körper im Bereiche der täglichen Erfahrung stets zu.

534. **Relativität der Zeit.** Aus der LORENTZ-Transformation ergeben sich nun sehr wichtige Folgerungen für die Größe von Längen und Zeiten in bewegten Systemen. Wir betrachten zwei Ereignisse, die sich im System S an zwei Punkten x_1 und x_2 der x-Achse gleichzeitig, d. h. im System S zur gleichen Zeit $t_1 = t_2 = t$ abspielen. Nun ist nach Gl. 11a im System S'

$$t_1' = \frac{t - \frac{vx_1}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t_2' = \frac{t - \frac{vx_2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \text{also} \quad t_1' - t_2' = \frac{\frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{12a}$$

Die Zeitdifferenz zwischen den beiden Ereignissen ist also im System S' nicht wie im System S gleich 0, sondern hängt vom Abstande $x_2 - x_1$ der Orte ab, an denen sie sich abspielen. Zwei Ereignisse, die in S an verschiedenen Orten gleichzeitig eintreten, sind in S' nicht gleichzeitig, und ebenso kann man nachweisen, daß zwei in S' gleichzeitige Ereignisse in S nicht gleichzeitig sind.

Nehmen wir weiter zwei Ereignisse, die in S in einem Zeitabstande $t_2 - t_1$ am gleichen Orte ($x_1 = x_2$) aufeinanderfolgen, etwa zwei aufeinanderfolgende Durchgänge eines Pendels durch seine Ruhelage. Es ergibt sich dann nach Gl. 11a für den Zeitabstand der beiden gleichen Ereignisse im System S'

$$t_2' - t_1' = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{12b}$$

Der Zeitabstand der beiden Ereignisse ist im mitbewegten System S kleiner als in S'. Führt man aber die gleiche Rechnung für ein Ereignis durch, das in S'

im Zeitabstande $t'_2 - t'_1$ am gleichen Orte ($x'_1 = x'_2$) stattfindet, so ergibt sich aus Gl. 11b jetzt als Zeitabstand im System S

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (12c)$$

Also auch jetzt ist die Zeitdauer, vom mitbewegten System aus beurteilt, kürzer als von irgendeinem andern System aus beurteilt. Das gilt z. B. für die Schwingung eines Pendels oder den Gang einer Uhr. Befinden sich zwei vollkommen gleich beschaffene Uhren in zwei relativ zueinander bewegten Systemen, so geht für jeden Beobachter die jeweils in seiner Hand befindliche, relativ zu ihm ruhende Uhr schneller als die relativ zu ihm bewegte Uhr. Ganz allgemein muß dies für den Ablauf jedes physikalischen Vorgangs gelten. Die Zeit ist also ein relativer Begriff, nichts Absolutes. Der zeitliche Ablauf eines physikalischen Vorganges hängt vom Bewegungszustand des Beobachters ab.

Betrachtet man die in § 129 für den Dopplereffekt abgeleiteten Gleichungen, so könnte es scheinen, als ob man auf Grund dieses Effektes doch prinzipiell unterscheiden könnte, ob der Beobachter ruht und eine Lichtquelle sich ihm gegenüber bewegt oder umgekehrt. Denn es haben sich in diesen beiden Fällen verschiedene Ausdrücke ergeben. Das liegt aber nur daran, daß bei der Rechnung die Relativität der Zeit vernachlässigt wurde, und daß es sich dort nicht um Lichtschwingungen handelte. Führt man die Rechnung auf Grund der Lorentz-Transformation durch, so ergeben sich für den Fall, daß es sich um Licht handelt, aber nur in diesem Falle, identische Formeln, ganz gleich, ob man sich den Beobachter ruhend und die Lichtquelle bewegt denkt oder umgekehrt. Es ergibt sich immer

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}.$$

Ist $v/c \ll 1$, so kann man statt dessen wie in § 129 schreiben $\nu' = \nu(1 - v/c)$.

Selbstverständlich gilt die obige Gleichung nur für Licht. Bei jeder anderen Wellenbewegung, die ja stets einen materiellen Träger voraussetzt, bleiben die Gleichungen des § 129 (unter Vernachlässigung einer sehr kleinen relativistischen Korrektion) bestehen. Und es widerspricht natürlich dem Relativitätsprinzip in keiner Weise, daß man feststellen kann, welches der relative Bewegungszustand von Beobachter und Quelle der Wellen gegenüber dem materiellen Medium ist, durch das die Wellen sich zum Beobachter hin fortpflanzen.

535. **Relativität von Längen.** Nunmehr betrachten wir zwei Punkte x'_1 und x'_2 auf der x'-Achse von S', etwa die Enden eines in S' ruhenden Maßstabes. Die Länge des Maßstabes ist also in S' gleich $x'_2 - x'_1$. Wir wollen die Länge des Maßstabes von S aus messen. Wir können uns das durch folgendes Gedankenexperiment ausgeführt denken. Wir legen längs der x-Achse einen in S ruhenden geteilten Maßstab von ausreichender Länge und stellen längs desselben eine große Zahl von Beobachtern auf, welche mit vollkommen genau (im System S) gleichgehenden Uhren versehen sind. Diejenigen beiden Beobachter, bei denen die beiden Enden des zu messenden bewegten Maßstabes sich gerade zu einer vorher vereinbarten Zeit, also etwa zur Zeit $t = 0$, befinden, sollen die Orte der beiden Stabenden auf dem ruhenden Maßstab markieren. Denn damit die Messung in S einen Sinn hat, muß sie offenbar für beide Enden (in S) gleichzeitig erfolgen. Das

Ergebnis der Messung können wir sofort aus der LORENTZ-Transformation, Gl. 11a, ableiten. Es wird

$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{oder} \quad x_2 - x_1 = (x_2' - x_1')\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{13}$$

D. h., der Stab ergibt sich bei der Messung in S im Verhältnis $\sqrt{1 - v^2/c^2} : 1$ kürzer als im mitbewegten System S'. Ja, man muß sagen, er ist im System S kürzer als in S'. Denn anders, als wir es vorausgesetzt haben, kann man seine Länge in S überhaupt nicht sinnvoll definieren und messen.

Durch Umkehrung des Verfahrens kann man sofort zeigen, daß das gleiche bezüglich eines in S ruhenden Stabes eintritt, wenn seine Länge in S' gemessen wird. Er erscheint von S' aus beurteilt im Verhältnis $\sqrt{1 - v^2/c^2} : 1$ verkürzt. Eine Strecke ist immer am längsten im mitbewegten System. Dimensionen in der zur Bewegung senkrechten Richtung bleiben, wie man aus den LORENTZ-Transformationen abliest, unverändert. Ein Körper wird also in Richtung seiner Bewegung zusammengedrückt, abgeplattet.

Diese Relativität von Längen hat ihren Grund in der verschiedenen Beurteilung der Gleichzeitigkeit in den Systemen S und S'. Da oben ausdrücklich bestimmt war, daß die Messungen in S gleichzeitig erfolgen sollten, so erfolgten sie, von S' aus beurteilt, nicht gleichzeitig, sondern ein wenig nacheinander, und zwar die des voraneilenden Endes etwas früher als die des hinteren Endes, was eine Verkürzung zur Folge hat.

LORENTZ kam zur Aufstellung der nach ihm benannten Transformationen, weil er erkannte, daß diese tatsächlich zu einer Erklärung des MICHELSON-Versuchs führen. Wir können das jetzt leicht verstehen. In der auf Grund der alten Vorstellung gemachten Überlegung (§ 531) hatten wir festgestellt, daß die Wirkung der Bewegung sich genau so äußern müsse, als ob der in der Bewegungsrichtung liegende Arm des ruhend gedachten Apparats im Verhältnis $1 : \sqrt{1 - v^2/c^2}$ verlängert sei, wobei wir voraussetzten, daß er tatsächlich seine Länge l beibehält. Die erwartete Wirkung tritt aber nicht ein. Das erklärt sich ohne weiteres aus der oben abgeleiteten Tatsache, daß die erwartete Wirkung der Bewegung durch einen gerade entgegengesetzt wirkenden Effekt, nämlich durch eine Verkürzung des Armes im Verhältnis $\sqrt{1 - v^2/c^2} : 1$, genau aufgehoben wird. Die Verkürzung von Längen in bewegten Systemen bezeichnet man als LORENTZ-Kontraktion.

536. **Das Additionstheorem der Geschwindigkeiten.** Ein Körper bewege sich in der x'-Richtung von S' mit der gleichförmigen Geschwindigkeit $x'/t' = u'$. Wie groß ist seine Geschwindigkeit $x/t = u$, von S aus beurteilt? Wir bilden nach Gl. 11b den Ausdruck:

$$u = \frac{x}{t} = \frac{x' + vt'}{t' + \frac{vx'}{c^2}}.$$

Nach Division von Zähler und Nenner der rechten Seite durch t' erhalten wir mit $x'/t' = u'$

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} \quad \text{bzw.} \quad u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}. \tag{14}$$

Nach der Relativitätstheorie gilt also nicht die einfache Addition gleichgerichteter Geschwindigkeiten, $u = u' + v$. Sie ist nur als Grenzfall für $v/c \ll 1$ in der

Gl. 14 enthalten. Solange u' und v beide kleiner als die Lichtgeschwindigkeit c sind, ist auch, wie man leicht zeigen kann, u kleiner als c. Wird aber $u' = c$, so wird auch $u = (c + v)/(1 + v/c) = c$. Die Lichtgeschwindigkeit ist also in beiden Systemen, entsprechend den Grundlagen der Theorie, die gleiche.

Gl. 14 ist dank der außerordentlichen Empfindlichkeit optischer, insbesondere interferometrischer Methoden einer Prüfung an der Erfahrung zugänglich. Im § 443 haben wir bereits auf FRESNELS Messungen der Lichtgeschwindigkeit in strömenden Flüssigkeiten hingewiesen. Es sei jetzt c_0 die Vakuumlichtgeschwindigkeit, $c = c_0/n$ die Lichtgeschwindigkeit in einer Flüssigkeit, wenn sie ruht, bzw. für einen mitbewegten Beobachter, n ihr Brechungsindex (§ 409), c' die Lichtgeschwindigkeit, wenn die Flüssigkeit mit der Geschwindigkeit v in Richtung oder gegen die Richtung der Lichtfortpflanzung strömt. FRESNEL fand experimentell

$$c' = c \pm v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \tag{15}$$

(+ oder —, je nachdem, ob die Strömung in der Richtung des Lichtes oder gegen dieses erfolgt).

Wollen wir Gl. 14 auf diesen Fall anwenden, so haben wir nur zu setzen $u = c'$ (Lichtgeschwindigkeit in der strömenden Flüssigkeit, beurteilt von einem ruhenden Beobachter), $u' = c$, und wir erhalten

$$c' = \frac{c \pm v}{1 \pm \frac{c\,v}{c_0^2}}.$$

Entwickeln wir dies in eine Reihe und brechen mit dem zweiten Gliede ab, so folgt

$$c' = (c \pm v)\left(1 \mp \frac{c\,v}{c_0^2}\right) = c \pm v \mp v\frac{c^2}{c_0^2} - \frac{c\,v^2}{c_0^2}.$$

Lassen wir das sehr kleine vierte Glied rechts fort und berücksichtigen $c/c_0 = 1/n$, so ist dies mit Gl. 15 vollkommen identisch. Von der Strömungsgeschwindigkeit v addiert sich also nur der Bruchteil $v\,(1 - 1/n^2)$ zur Lichtgeschwindigkeit c. Die Größe $(1 - 1/n^2)$ heißt der FRESNELsche Mitführungskoeffizient.

In neuerer Zeit sind weitere Versuche über die Lichtfortpflanzung in bewegten Medien ausgeführt worden, welche ebenfalls durchweg die Relativitätstheorie bestätigt haben.

537. **Masse und Geschwindigkeit.** Einige weitere sehr wichtige Folgerungen aus der Relativitätstheorie lassen sich nur auf dem Wege über die Elektrodynamik ziehen. Wir wollen von ihnen hier nur folgendes erwähnen.

Die Theorie führt zu dem Ergebnis, daß die träge Masse der Körper keine konstante Größe ist, sondern von der Geschwindigkeit abhängt. Sei m_0 die sog. Ruhmasse, d. h. die Masse eines ruhenden Körpers, so ist die Masse m des gleichen, mit der Geschwindigkeit v bewegten Körpers

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{16}$$

Die Gültigkeit dieser Beziehung ist an schnell bewegten Elektronen nachgewiesen worden.

Gl. 16 hat eine sehr bemerkenswerte Konsequenz. Für $v = c$ wird $m = \infty$. D. h. die Trägheit eines Körpers, der Widerstand gegen Beschleunigungen, wird bei Erreichung der Lichtgeschwindigkeit unendlich groß. Nur ein unendlich großer Aufwand an Arbeit könnte einen materiellen Körper bis genau auf Lichtgeschwindigkeit oder gar darüber hinaus bringen. Daher ist die Vakuumlicht-

geschwindigkeit der obere Grenzwert der überhaupt möglichen Geschwindigkeiten materieller Körper. Wir kennen auch tatsächlich keinen Fall, in dem sie überschritten würde, während andererseits bei den β-Strahlen der radioaktiven Substanzen Geschwindigkeiten vorkommen, die nur um Bruchteile von 1 % kleiner sind als die Lichtgeschwindigkeit.

Bei $v = c/2$ ist die Masse bereits um etwa 15 % größer als die Ruhmasse bei $v = 0$. Mit weiter steigender Geschwindigkeit wächst sie sehr schnell an. Bei $v = {}^3/_4\, c$ beträgt der Massenzuwachs bereits über 50 % und nähert sich bei weiterer Annäherung an die Lichtgeschwindigkeit dem Wert ∞.

538. Trägheit und Masse der Energie. Wie wir in § 490 gesehen haben, kommt einem Lichtquant von der Energie $E = h\nu$ eine Bewegungsgröße $h\nu/c = E/c$ und eine Masse $m = h\nu/c^2 = E/c^2$ zu. Nach der Relativitätstheorie ist dies nicht auf Strahlungsenergie beschränkt, sondern es gilt für jede Art von Energie E die Beziehung

$$m = \frac{E}{c^2}, \tag{17}$$

d. h. jeder Energie E kommt eine Masse E/c^2 zu.

So hat z. B. ein Körper von hoher Temperatur eine größere Masse als ein sonst ganz gleich beschaffener Körper von tieferer Temperatur. Denn erstens ist die Masse jedes einzelnen Moleküls um so größer, je größer seine thermische Geschwindigkeit ist, und zweitens enthält ein erhitzter Körper auch Strahlung, die zur Masse beiträgt. Man muß daher annehmen, daß die Fixsterne bei ihrer allmählichen Abkühlung durch Ausstrahlung an Masse abnehmen, — was nicht mit einem Verlust an Materie zu verwechseln ist, sondern zunächst nur eine Abnahme ihrer Trägheit bedeutet. Diese Massenabnahme der Fixsterne durch Ausstrahlung ist zwar, mit irdischen Maßen gemessen, ungeheuer groß, aber innerhalb der uns zugänglichen Beobachtungszeiten gegenüber den Fixsternmassen selbst unmeßbar klein. Immerhin dürfte sie im Ablauf des kosmischen Geschehens eine Rolle spielen.

Hingegen scheint die Abhängigkeit der Masse von ihrem Energiegehalt im Bereich der Atome unserer Beobachtung zugänglich zu sein. Es ist im § 517 darauf hingewiesen worden, daß die wahren Atomgewichte — bezogen auf Sauerstoff = 16 oder Helium = 4 — fast ausnahmslos sehr nahezu ganzzahlig sind. Die zahlenmäßig größte Ausnahme bildet der Wasserstoff, dessen Atomgewicht 1,0078 beträgt. Aus der PROUTschen Hypothese (§ 518), nach der alle Atome aus Wasserstoff und Elektronen aufgebaut sind — welch letztere wegen ihrer kleinen Masse zur Atommasse nur äußerst wenig beitragen —, müssen wir den Schluß ziehen, daß die Wasserstoffkerne (Protonen) im freien Zustande eine etwas größere Masse haben, als wenn sie in den Verband eines Atomkerns getreten sind. Den Ausweg zeigt uns die Abhängigkeit der Masse von der Energie. Betrachten wir einen Helium-Atomkern (Atomgewicht 4, Ordnungszahl 2), der aus vier Protonen und zwei Elektronen bestehen muß. Es besteht Grund zu der Annahme, daß die Bildung eines Heliumkerns ein sehr stark exothermer Prozeß (§ 203) ist, d. h. ein solcher bei dem sehr viel Energie frei wird, die hauptsächlich auf Kosten der vier Wasserstoffkerne gehen muß, die bei diesem Prozeß potentielle Energie verlieren. In diesem Verlust an potentieller Energie haben wir vermutlich den Grund für die Massenabnahme des Wasserstoffs beim Einbau in einen Atomkern zu suchen. Man kann leicht berechnen, daß bei der Bildung der einem Grammatom entsprechenden Menge von Heliumkernen aus einzelnen Protonen und Elektronen die ungeheure Wärmemenge von $6{,}4 \cdot 10^{11}$ cal frei werden muß. Es ist dies eine „Wärmetönung", die diejenige gewöhnlicher chemischer Prozesse um viele Größenordnungen überragt. Die viel kleineren

Abweichungen der anderen Atomgewichte von der Ganzzahligkeit, die sog. Massendefekte, beruhen zweifellos auch auf den energetischen Verhältnissen in den Atomkernen. Man versucht deshalb, sie zur Aufklärung dieser Verhältnisse zu verwerten.

Systeme von Körpern, bei deren Bildung die potentielle Energie der beteiligten Körper sehr stark abnimmt, stellen sehr stabile Gleichgewichtszustände dar. Solchen strebt jeder andere Zustand in der Natur zu. Es ist daher anzunehmen, daß sich die Protonen in den Atomkernen, soweit möglich, mit Elektronen zu Heliumkernen vereinigen werden. Darin dürfte der Grund dafür zu suchen sein, daß beim radioaktiven Zerfall α-Strahlen, also He-Kerne, aber keine Wasserstoffkerne, ausgeschleudert werden.

539. **Verwandlung von Materie in Strahlung.** Wenn jede Energie E eine Masse $m = E/c^2$ besitzt, so kann man umgekehrt schließen, daß jeder materiellen Masse m ein Energieinhalt

$$E = mc^2 \tag{18}$$

zukommt. Es ist nun die Vermutung ausgesprochen worden, daß es vorkommen könne, daß die in den Massen eines Elektrons und eines Protons enthaltene Energie sich unter geeigneten Umständen, wie jede andere Energie, in eine andere Form verwandeln könne, nämlich in Strahlung. Und zwar vermutet man, daß unter bestimmten Bedingungen ein Proton und ein Elektron völlig miteinander verschmelzen können, und daß sie dabei ihren materiellen Charakter gegen denjenigen eines Strahlungsquants vertauschen. Ein Anstoß zu dieser Vermutung liegt darin, daß sie einen Ausweg aus einer schweren astrophysikalischen Verlegenheit zeigen würde. Man kann nämlich leicht nachweisen, daß die Sonne und die Fixsterne sich sehr viel schneller, als sie es tatsächlich tun, durch Ausstrahlung abkühlen müßten, wenn diese Strahlung ihren Energiebedarf allein aus den sonst bekannten Energiequellen dieser Himmelskörper beziehen würde. Es müssen unbedingt in der Sonne und den Fixsternen noch weitere, sehr erhebliche Energiequellen vorhanden sein. Die Annahme radioaktiver Prozesse als Energiequellen genügt nicht entfernt. Aber eine Lösung wäre gefunden, wenn die Erzeugung von Strahlungsenergie aus den Massen von Protonen und Elektronen herangezogen werden könnte. Hierin würde eine vollkommen ausreichende Energiequelle liegen. Derartige Prozesse sind zwar im Laboratorium nie beobachtet worden, aber es ist immerhin denkbar, daß sie im Innern von Fixsternen eintreten könnten. Sie würden also darin bestehen, daß sich die Masse der Fixsterne durch spontane Verschmelzungsprozesse von Elektronen und Protonen allmählich in Strahlung auflösen würde. Der größte Teil dieser Strahlung würde im Innern der Sterne absorbiert und in Wärme verwandelt werden, ein geringer Teil müßte wohl aus der Sternoberfläche austreten. Die Wellenlänge der Strahlung läßt sich leicht berechnen. Nach dem Planckschen Gesetz (§ 488) muß $E = mc^2 = h\nu$ sein, oder da $\nu = c/\lambda$, $\lambda = \frac{h}{mc}$. Setzt man die Werte von h und c und für m die Masse des Protons ein, so erhält man eine Wellenlänge von $\lambda = 1{,}31 \cdot 10^{-5}$ ÅE. Durch Vergleich mit § 473 sieht man, daß dies die Größenordnung des Wellenlängenbereichs ist, den man der Höhenstrahlung zuschreiben muß, falls sie eine Wellenstrahlung ist. Da dies aber nicht mit Sicherheit feststeht, so läßt sich zur Zeit aus der Existenz der Höhenstrahlung kein Beweis für die hypothetische Verwandlung von Materie in Strahlung herleiten. Eine einigermaßen ausreichende Energiequelle für die Fixsterne kann übrigens auch in dem Aufbau schwererer Elemente aus leichteren, insbesondere von Heliumkernen aus Protonen und Elektronen vermutet werden, da die Wärmetönung dieses Prozesses nach § 538 sehr groß ist.

37. Kapitel.

Die allgemeine Relativitätstheorie.

540. Die Äquivalenzhypothese. In der Beschränkung auf Inertialsysteme, d. h. auf geradlinig und gleichförmig bewegte Bezugssysteme, wie wir sie bisher behandelt haben, bezeichnet man die Theorie als die spezielle Relativitätstheorie. Durch einen neuen Gedanken hat EINSTEIN (1917) sie zur allgemeinen Relativitätstheorie erweitert und auf beschleunigte Systeme ausgedehnt.

Die Grundlage der allgemeinen Theorie bildet, wie bei der speziellen Theorie, die Erweiterung einer bis dahin nur für mechanische Vorgänge für gültig gehaltenen Behauptung auf das Gesamtgebiet aller physikalischen Erscheinungen. Es ist seit langem bekannt, daß es keinen mechanischen Vorgang gibt, der grundsätzlich zwischen Schwere- und Trägheitswirkungen zu unterscheiden gestattet. Das äußert sich u. a. darin, daß alle Körper gleich schnell fallen, d. h. daß träge und schwere Masse aller Körper einander gleich sind (§ 54). Wir geben folgendes einfache Beispiel für die Gleichheit von Schwere- und Trägheitswirkungen. In einem Aufzuge befinde sich eine Federwage, wie sie zum Messen des Körpergewichts dient. Stellt man sich im ruhenden Aufzug auf die Platte der Wage, so zeigt diese das richtige Gewicht an. Ebenso aber auch, wenn der Aufzug sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit nach oben oder unten bewegt. Das folgt einfach aus dem Relativitätsprinzip der Mechanik. Anders aber ist es während der Zeiten des Anfahrens und Bremsens, also während der Zeiten positiver oder negativer Beschleunigung. Fährt der Aufzug von unten nach oben aus der Ruhe an, so muß an dem auf der Wage stehenden Menschen wegen seiner Trägheit Beschleunigungsarbeit geleistet werden. Während die zusammengedrückte Feder der Wage bisher nur der Schwerkraft das Gleichgewicht halten mußte, muß sie jetzt auch den Trägheitswiderstand aufheben, wird also stärker zusammengedrückt. Die Anzeige der Wage entspricht einer Vermehrung des Gewichts. Dies dauert so lange, bis der Aufzug seine konstante Fahrgeschwindigkeit erreicht hat. Alsdann zeigt die Wage wieder „richtig“ an. Beim Bremsen vor der Ankunft oben ist der auf der Wage stehende Körper infolge seiner Trägheit bestrebt, seine Bewegung fortzusetzen. Hier wirkt also die Trägheit der Schwere gerade entgegen, und das Ergebnis ist, daß die Wage während der Bremszeit ein vermindertes Gewicht anzeigt. In entsprechender Weise kann man zeigen, daß bei der Fahrt nach unten im Augenblick des Anfahrens eine scheinbare Gewichtsverminderung eintritt, beim Bremsen unten eine scheinbare Gewichtsvermehrung. Diese Wirkungen sind in Personenaufzügen sehr leicht zu beobachten.

Bezeichnen wir Beschleunigungen des Aufzugs nach unten als positive, solche nach oben als negative Beschleunigungen, so haben wir positive in den beiden Fällen des Bremsens und des Anfahrens oben, negative beim Anfahren und Bremsen unten. Erstere sind mit einer scheinbaren Gewichtsverminderung, letztere mit einer scheinbaren Gewichtsvermehrung verbunden. Mit anderen Worten: Eine Beschleunigung in Richtung der Schwerkraft vermindert das Gewicht, eine solche gegen diese Richtung vermehrt es. Die Trägheit hat also bei Beschleunigungen eine Wirkung, die derjenigen der Schwerkraft vollkommen analog ist. Die gleiche Gewichtsvermehrung, wie sie durch eine Beschleunigung nach oben eintritt, könnte auch bei ruhendem Aufzug durch eine plötzlich unterhalb desselben auftauchende schwere Masse hervorgerufen werden. Es sei noch erinnert an die Trägheitswirkungen in schnell anfahrenden oder bremsenden Eisenbahnzügen,

in denen man wie durch eine plötzlich auftauchende Kraft, nämlich durch den Trägheitswiderstand des eigenen Körpers, gegen Rück- oder Vorderwand des Abteils geschleudert wird.

Nun folgt aus den Gesetzen der Mechanik, daß es grundsätzlich überhaupt keinen mechanischen Vorgang gibt, der zu unterscheiden gestattet, ob eine Wirkung eine solche der Schwerkraft oder einer Beschleunigung des Systems ist, in dem sich der Vorgang abspielt bzw. von dem aus er beurteilt wird. Natürlich kann in den meisten Fällen der Augenschein uns zeigen, was vorliegt, aber kein mechanischer Versuch. Jede Schwerewirkung läßt sich immer auch als reine Trägheitswirkung deuten und umgekehrt. Trägheit und Schwere sind einander bezüglich aller mechanischen Wirkungen vollkommen äquivalent.

Hier vollzog nun EINSTEIN einen Gedankengang, der vollkommen demjenigen entspricht, der zum speziellen Relativitätsprinzip führte. Er stellte die Äquivalenzhypothese auf, welche besagt: Es gibt überhaupt keinen physikalischen Vorgang, der zu entscheiden gestattet, ob er sich in einem ruhenden oder gleichförmig und geradlinig bewegten System in einem Schwerefelde abspielt oder in einem beschleunigten System in einem von Schwerewirkungen freien Raum. Trägheit und Schwere sind einander bezüglich ihrer Wirkung auf alle physikalischen Vorgänge vollkommen äquivalent.

Das Eindringen in die Theorie erfordert beträchtliche mathematische Spezialkenntnisse. Es seien daher hier nur ihre Hauptergebnisse mitgeteilt.

541. **Die Lichtablenkung.** Die Theorie führt zu dem Ergebnis, daß ein Lichtstrahl in einem Schwerefelde nicht geradlinig verläuft, sondern gekrümmt ist. Diese Tatsache läßt sich an Hand der Äquivalenzhypothese elementar verstehen. Wir denken uns einen Aufzug mit einem seitlichen Loch versehen, durch den senkrecht zur Wand ein Lichtstrahl falle, und zwar so, daß er den Aufzug, wenn er ruht, horizontal durchläuft (Abb. 502 a). Bewegt sich aber der Aufzug gleichförmig nach oben, so ist die Bahn des Lichtstrahls bei senkrechtem Einfall relativ zum Aufzug nach unten geneigt, und zwar um so mehr, je größer die Geschwindigkeit des Aufzuges ist (Abb. 502 b), die in der Abbildung der Deutlichkeit halber als mit der Lichtgeschwindigkeit vergleichbar angenommen ist. Wird der Aufzug aber nach oben beschleunigt, so ändert sich seine Geschwindigkeit, während der Lichtstrahl den Aufzug durchläuft, und infolgedessen ändert sich auch die Neigung des Lichtstrahls relativ zum Aufzuge (Abb. 502 c). Der Lichtstrahl ist im beschleunigten Aufzuge gekrümmt. Nun ist eine Beschleunigung nach oben einer nach unten wirkenden Schwerkraft äquivalent. Bewirkt jene eine Krümmung des Lichtstrahls nach oben, so muß im ruhenden Aufzug eine nach unten wirkende Schwerkraft das gleiche tun. Lichtstrahlen müssen also in Schwerefeldern gekrümmt sein.

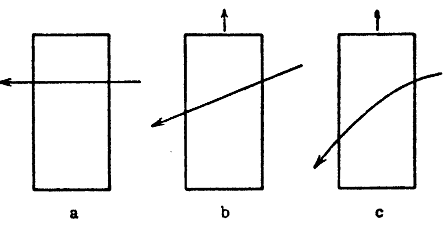


Abb. 502. Zur Lichtablenkung.

Die Schwerkraft an der Erdoberfläche und die auf der Erde zur Verfügung stehenden Lichtwege genügen nicht, um meßbare Wirkungen hervorzurufen, wohl aber die 28mal größere Schwerkraft in der Nähe der Sonnenoberfläche und die Wege, die das Licht von Sternen im Anziehungsbereich der Sonne zurücklegt, wenn ein Stern dicht neben der Sonne steht. Verläuft das Licht eines Sterns dicht an der Sonnenoberfläche vorbei, so wird es der Sonne ein wenig zugekrümmt, aus seiner geraden Bahn ab-

gelenkt. Fällt der Strahl in das Auge eines irdischen Beobachters, so erscheint ihm der Stern infolgedessen ein wenig in Richtung von der Sonne weg aus seiner normalen Position verschoben. Die Theorie ergibt für einen unmittelbar an der Sonnenoberfläche vorbeistreichenden Strahl eine Ablenkung, also auch eine Verschiebung des Sternorts, um 1,75″, eine Größe, die der astronomischen Messung noch durchaus zugänglich ist. Solche Beobachtungen sind vorerst nur bei totalen Sonnenfinsternissen möglich, da sonst das Sternlicht vollkommen überstrahlt wird. Während die ersten Beobachtungen die Theorie quantitativ sehr gut zu bestätigen schienen, haben die neuesten Messungen sowie eine Nachprüfung der älteren Messungen für die Lichtablenkung am Sonnenrande den höheren Wert von 2,2″ ergeben. Während also die Tatsache der Lichtablenkung feststeht, ist die Übereinstimmung ihrer Größe mit der Theorie noch zweifelhaft.

Die Äquivalenz von Trägheit und Schwere bezieht sich natürlich nicht nur auf die materiellen Körper, sondern auch auf die Energie. Da Energie träge ist, so ist sie auch schwer, und als eine solche Wirkung der Schwere der Energie können wir auch die Lichtablenkung auffassen. Die in der Nähe der Sonne vorbeifliegenden Lichtquanten werden von der Sonne angezogen, ihre Bahn ist also gekrümmt wie die eines mit Lichtgeschwindigkeit geworfenen Körpers. Die Lichtenergie führt im Schwerefelde eine Fallbewegung aus.

542. Das Einsteinsche Gravitationsgesetz. Die Perihelbewegung des Merkur. Die allgemeine Relativitätstheorie führt zu einem Gesetz für die zwischen zwei Massen wirkende anziehende Kraft, d. h. zu einem Gravitationsgesetz (vgl. § 63). Dieses läßt sich nicht, wie das Newtonsche, in geschlossener Form angeben, sondern nur als eine nach Potenzen von $1/r$ ($r =$ Abstand der beiden Körper) schnell fallende Reihe. Das erste und in allen Fällen überwiegend größte Glied dieser Reihe ist mit dem Newtonschen Gravitationsgesetz identisch, das sich also als ein Grenzfall erweist. Der Einfluß des im günstigsten Fall allein noch in Betracht kommenden zweiten Gliedes auf die Planetenbewegung ist nur dann merkbar, wenn die Schwerkraft am Ort des Planeten und die Exzentrizität seiner Bahn nicht zu klein sind. Unter allen Planeten des Sonnensystems treffen wir diese Bedingungen nur beim sonnennächsten, dem Merkur, an. Die Wirkung des zweiten Gliedes besteht in dem Auftreten einer sog. Perihelbewegung, d. h. einer langsamen Drehung der Bahnellipse (Abb. 503). Tatsächlich zeigt der Merkur eine solche. Die Theorie ergibt für sie einen Wert von 43″ in 100 Jahren. Es scheint, daß dies mit der Erfahrung übereinstimmt. Doch ist der Streit der Astronomen deswegen noch nicht ganz verstummt. (Es handelt sich nämlich nur um den kleinen Rest von Perihelbewegung, der noch übrigbleibt, wenn man die von den gegenseitigen Störungen der Planeten herrührenden Wirkungen, die ebenfalls eine Perihelbewegung hervorrufen, durch Rechnung beseitigt hat.)

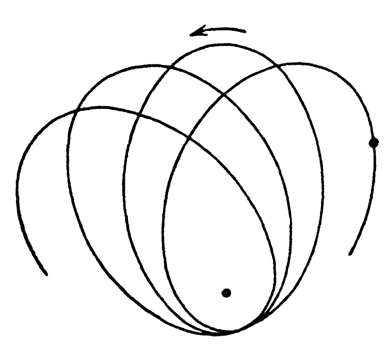


Abb. 503. Schema einer Perihelbewegung.

543. Die Rotverschiebung der Spektrallinien. Die dritte und zur Zeit letzte an der Erfahrung prüfbare Voraussage der allgemeinen Relativitätstheorie ist, daß die Spektrallinien eines Stoffes um so mehr nach Rot verschoben sein müssen, je größer die Schwerkraft am Ort der Lichtaussendung ist. Es ist dies ein Spezialfall der allgemeineren Aussage, daß die Schwerkraft verzögernd auf den Ablauf periodischer Vorgänge einwirkt, also auch auf die Elektronenbewegungen am Atom,

die die Ursache der Lichtaussendung sind. Die Schwerkraft auf der Erde ist so klein, daß wir die im Laboratorium gemessenen Lagen der Spektrallinien (von Einflüssen des Drucks usw. abgesehen) als normal betrachten können. Im Spektrum der Elemente an der Sonnenoberfläche sind jedoch meßbare Verschiebungen gegen diese normale Lage zu erwarten. Die Untersuchungen sind außerordentlich schwierig, weil es auch auf der Sonne noch andere Einflüsse gibt, die die Lage der Linien verändern. Nachdem es eine Zeitlang geschienen hatte, als sei die Rotverschiebung auf der Sonne einwandfrei nachgewiesen, ist die Beweiskraft der betreffenden Untersuchungen neuerdings wieder angezweifelt worden. Es kann aber aus ihnen andererseits keinesfalls ein Argument gegen die Relativitätstheorie gezogen werden. Die Frage des experimentellen Nachweises der Rotverschiebung ist daher zur Zeit noch als offen anzusehen.

Damit sind die derzeitigen Prüfungsmöglichkeiten der allgemeinen Relativitätstheorie erschöpft.

544. **Relativitätstheorie und Geometrie.** Die allgemeine Relativitätstheorie führt zu dem Schluß, daß im Weltraum wegen der in ihm vorhandenen Massen, also wegen der in ihm herrschenden Gravitationsfelder, die gewöhnliche euklidische Geometrie nicht streng gültig ist. Die wahre Geometrie des Weltraumes ist nicht-euklidisch.

Ein zweidimensionales Beispiel einer nichteuklidischen Geometrie ist allgemein bekannt, die Geometrie auf einer Kugelfläche. In dieser gilt z. B. nicht das Parallelenaxiom, und die Winkelsumme im Dreieck ist nicht 180°.

Es ist nun schon von LOBATSCHEWSKI (1829) und fast gleichzeitig von BOLYAI, dann von HELMHOLTZ, RIEMANN und anderen gezeigt worden, daß man eine in sich streng logische Geometrie des Raumes auch auf anderen Axiomen als denen des Euklid aufbauen kann. Denn sie sind ja keine Gesetze, sondern die unbewiesenen Fundamente der euklidischen Geometrie, die allerdings der irdischen Erfahrung nicht zu widersprechen scheinen. Aber das ist für die wirkliche Geometrie des ganzen Weltraumes nicht beweisend. Der räumliche Bereich unserer unmittelbaren geometrischen Erfahrung ist auf die Erdoberfläche beschränkt. Solange sich in früheren Zeiten das Leben der Menschen im kleinsten Umkreise ihrer Behausung abspielte, haben sie nicht daran gezweifelt, daß die Erde eine Ebene sei, für die sie die euklidische Geometrie als gültig hätten annehmen müssen. Als die Menschen allmählich die Erdoberfläche zu erobern begannen, erkannten sie deren Kugelgestalt und begriffen, daß für diese die euklidische Geometrie der Ebene nicht gelten könne. Aber auch auf einer gekrümmten Fläche dürfen wir, solange es sich um ausreichend kleine Bereiche handelt, von ihrer Krümmung absehen. Wer einen Lageplan seines Gartens entwirft, braucht sich um die Krümmung der Erdoberfläche nicht zu kümmern.

Was aber hier für die zweidimensionale Geometrie gilt, kann ebensogut für die Geometrie des Raumes zutreffen. Sie kann nichteuklidisch sein, ohne daß wir es in dem kleinen Bereich unserer unmittelbaren Erfahrung nachweisen können. Denn innerhalb dieses Bereichs weicht sie von der euklidischen nur verschwindend wenig ab. Es sind viel größere Dimensionen, als sie uns zur Verfügung stehen, notwendig, um durch Messungen festzustellen, daß die Winkelsumme im Dreieck nicht genau 180° beträgt. Denn je kleiner ein Dreieck — auch schon auf der Kugelfläche — ist, um so näher liegt seine Winkelsumme diesem Wert.

In Analogie zu den gekrümmten Flächen nennt man einen Raum, in dem eine nichteuklidische Geometrie gilt, einen gekrümmten Raum. Unserer Vorstellung ist dies allerdings entzogen. Eine gekrümmte Fläche können wir uns nur innerhalb eines dreidimensionalen euklidischen Raumes vorstellen, und ebenso

könnten wir uns einen gekrümmten dreidimensionalen Raum nur innerhalb eines vierdimensionalen euklidischen Raumes vorstellen.

Eine gekrümmte Fläche hat, wenn sie geschlossen ist, wie z. B. eine Kugelfläche, eine bestimmte endliche Ausdehnung, aber keine Begrenzung. Das gleiche folgt aus der Relativitätstheorie für den nichteuklidischen Weltraum. Er hat nirgends eine Begrenzung, aber er hat ein endliches Volumen, das genau angebbar wäre, wenn man die Summe aller in ihm enthaltenen Massen kennte, die bestimmt nicht unendlich groß ist.

Die Bahn eines Lichtstrahls im Weltraum ist stets eine „geradeste Bahn". Es entspricht dies räumlich den größten Kreisen auf einer Kugelfläche. Auf Grund dieser Tatsache muß man schließen, daß das Licht jedes Sterns nach einer bestimmten, allerdings ungeheuer langen Zeit schließlich einmal wieder an seinen Ausgangspunkt zurückkehrt. So wie ein Weltumsegler, der immer auf „geradester Bahn", d. h. auf einem größten Kreise, den Erdball umschifft, schließlich wieder in den Hafen zurückkehrt, von dem er ausgefahren ist.

Namenverzeichnis.

Sachverzeichnis.

Druck von C. G. Röder A.-G., Leipzig.

